2. У р б о н а с А. П. Автоморфизмы пространства тензорных опорных элементов. Ш Прибалтийская геометрич.конф.Тезисы докладов. Паланга, 1968.

3. Ш а п у к о в Б. Н. Теория кривизны векторного расслоения. - Труды геометрического семинара, вып.9. Казань, 1976, 118-137.

4. Ш а п у к о в Б. Н. Связности на дифференцируемом расслоении. - Труды геометрического семинара, вып.12.Казань, 1980, с.97-110.

5. Ш а п у к о в Б. Н. Производная Ли в расслоенных пространствах. - Труды геометрического семинара, вып.13. Казань, 1981, с.90-100.

А.П.Широков

О СПЕЦИАЛЬНЫХ МЕТРИКАХ И СВЯЗНОСТЯХ В КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЯХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ АФФИННЫХ И НЕЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

В статьях [3] и [4] рассматривались специальные метрики в касательных расслоениях пространств постоянной кривизны. Метрики эти имели внутренне инвариантный смысл, однако их истолкование было связано с реализацией данного пространства постоянной кривизны в виде гиперсферы пространства постоянной кривизны на единицу большей размерности. На этом пути можно, конечно, не ограничиваться рассмотрением гиперсфер и осуществить построение упомянутых выше метрик в касательных расслоениях произвольных гиперповерхностей пространства постоянной кривизны. Это построение и является целью первых двух пунктов настоящей заметки.

I. Сначала рассмотрим специальные метрики в касательных расслоениях гиперповерхностей, нормали которых пересекают абсолют неевклидова пространства в паре вещественных точек. Пусть x -нормированная точка гиперповерхности, так что (x,x) =I. Обозначим через X нормированную точку на нормали к гиперповерхности в точке x , полярно сопряженную с

x. Тогда будут справедливы равенства

$$(x, x_i) = (X, x_i) = (x, X) = 0\,, \qquad (X, X) = -1\,,$$

где $x_i = \dfrac{\partial x}{\partial u^i}$ – частная производная от x по внутренней локальной координате u^i гиперповерхности. Вводя метрический тензор гиперповерхности

$$g_{ij} = \sigma k^2 (x_i, x_j)\,,$$

где $\sigma = \pm 1$, а k – радиус кривизны пространства, запишем основные деривационные уравнения гиперповерхности :

$$\nabla_j x_i = -\frac{\sigma}{k^2} g_{ij} x + b_{ij} X\,,$$
$$\partial_i X = \sigma k^2 b_i^s x_s\,.$$

Отсюда получаем выражение для тензора кривизны внутренней геометрии этой гиперповерхности :

$$R_{kji}{}^{r} = \frac{\sigma}{k^2}(g_{ij}\delta_k^r - g_{ik}\delta_j^r) - \sigma k^2 (b_{ij} b_k^r - b_{ik} b_j^r)\,. \qquad (\mathrm{I})$$

Взяв в точке x вектор v^i, построим точку $v = x + x_i v^i$ и соединим ее с точкой $f = x + X$ абсолюта прямой линией. Эта прямая пересечет абсолют во второй точке

$$f^* = \frac{1}{2}\left(1 - \sigma \frac{\vec{v}^2}{k^2}\right) x + x_i v^i - \frac{1}{2}\left(1 + \sigma \frac{\vec{v}^2}{k^2}\right) X\,.$$

В соответствии с методом Б.А.Розенфельда и А.П.Нордена ([I], [2], [4]), мы можем ввести во множестве рассматриваемых прямых инвариантную метрику с линейным элементом

$$ds^2 = \frac{(df, df^*)}{(f, f^*)} - \frac{(f, df^*)(f^*, df)}{(f, f^*)^2}\,.$$

Производя подсчет, получим:

$$ds^2 = \frac{\sigma}{k^2}(d\vec{z}, \delta\vec{v}) + b(dz, \delta v) + \frac{1}{2k^2}\left(\sigma - \frac{\vec{v}^2}{k^2}\right) d\vec{z}^{\,2} -$$
$$- \sigma \frac{\vec{v}^2}{k^2} b(dz, dz) + \frac{1}{k^4}(\vec{v}, d\vec{z})^2 + \frac{2\sigma}{k^2}(\vec{v}, d\vec{z}) \cdot \qquad (2)$$
$$\cdot\, b(v, dz) - \frac{1}{2}(\sigma k^2 + \vec{v}^2) \overset{(2)}{b}(dz, dz) + [b(v, dz)]^2,$$

где $b(d\vec{r},\delta\vec{v}) = b_{ij}du^i\delta v^j$, а $\overset{(2)}{b}$ - символ квадрата тензора b_{ij}. Заметим, что умножение точки X на множитель -1 меняет знак тензора b_{ij}. Кроме того, равенство

$$df = (\delta^i_s + \sigma k^2 b^i_s)du^s x_i$$

показывает, что локально взаимная однозначность соответствия между прямыми неевклидова пространства и элементами касательного расслоения гиперповерхности возможна лишь в том случае, когда аффинор b^i_j не имеет собственных значений $-\frac{\sigma}{k^2}$. Линейный элемент (2) задает инвариантную метрику множества прямых $(n+1)$ - мерного неевклидова пространства, пересекающих абсолют в парах вещественных точек, и эта метрика реализуется в касательном расслоении n-мерного риманова пространства с тензором кривизны (I).

В частности, если рассматриваемая гиперповерхность является омбилической (гиперсферой), то можно положить $b_{ij} = \frac{\sigma}{\varkappa^2} g_{ij}$ ($\varkappa = const$), и тогда в силу (I) внутренняя геометрия этой гиперсферы будет иметь кривизну $\mathcal{K} = \sigma k^2\left(\frac{1}{k^4} - \frac{1}{\varkappa^4}\right)$. Положив $\vec{w} = \sigma\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{\varkappa^2}\right)\vec{v}$, получим из (2) простой линейный элемент

$$ds^2 = 2(d\vec{r},\delta\vec{w}) + (\vec{w}^2 - \mathcal{K})d\vec{r}^2 - 2(\vec{w},d\vec{r})^2,$$

отмечавшийся в статье [4].

Несмотря на сравнительно сложный вид линейного элемента (2), строение фундаментальной 2-формы келеровой метрики гиперболического типа, определяемой этим линейным элементом, весьма просто. Эта 2-форма имеет вид $\Omega = d\omega$, где

$$-\omega = \frac{\sigma}{k^2}(\vec{v},d\vec{r}) + b(v,dr).$$

Учитывая условие Кодацци, легко проверить, что

$$\Omega = \left(\frac{\sigma}{k^2}g_{ij} + b_{ij}\right)du^i\wedge\delta v^j.$$

Интегрируемая структура почти произведения, возникающая в касательном расслоении гиперповерхности, определяет две системы n-мерных поверхностей, вполне изотропных в метрике (2). Поверхности одной системы являются слоями касательного расслоения ($du^i = 0$), а поверхности второй системы отвечают векторным полям $\vec{v}$, определяемым вполне интегрируемым дифференциальным уравнением

$$\delta\vec{v} + \frac{1}{2}\left(1-\sigma\frac{\vec{v}^{2}}{k^{2}}\right)d\vec{z} + \frac{1}{2}\left(1+\sigma\frac{\vec{v}^{2}}{k^{2}}\right)\sigma k^{2} b\,(d\vec{z}) + $$
$$+ \left[\frac{\sigma}{k^{2}}(\vec{v}, d\vec{z}) + b\,(v, dz)\right]\vec{v} = 0 ,$$

где $b\,(d\vec{z})$ означает воздействие аффинора b_j^i на вектор du^j; это уравнение выражает факт постоянства точки f^* на абсолюте.

2. Другой вид специальной метрики в касательном расслоении получится, если через точку $v = x + v^i x_i$ проводить прямую, перпендикулярную касательной гиперплоскости к гиперповерхности. В этом случае вещественность абсолюта не является обязательной. Поэтому в отношении нормированной вершины X на нормали к гиперповерхности можно сделать наиболее общее предположение $(X, X) = \varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$.Основные деривационные уравнения гиперповерхности примут теперь вид

$$\nabla_j x_i = -\frac{\sigma}{k^2} g_{ij}\, x + b_{ij} X ,$$
$$\partial_j X = -\varepsilon\sigma k^2 b_j^s x_s .$$

Тензор кривизны гиперповерхности имеет следующее строение :

$$R_{kji}{}^{r} = \frac{\sigma}{k^2}\left(g_{ij}\delta_k^r - g_{ik}\delta_j^r\right) + \varepsilon\sigma k^2\left(b_{ij} b_k^r - b_{ik} b_j^r\right). \qquad (3)$$

Прямая, соединяющая точки v и X , пересекает абсолют в точках

$$z = x + v^i x_i + \sqrt{-\varepsilon\left(1+\sigma\frac{\vec{v}^2}{k^2}\right)}\cdot X ,$$
$$z^* = x + v^i x_i - \sqrt{-\varepsilon\left(1+\sigma\frac{\vec{v}^2}{k^2}\right)}\cdot X ,$$

причем подкоренное выражение может быть как положительным, так и отрицательным. Такой же подсчет, как и при выводе формулы (2), приводит к следующему линейному элементу :

$$ds^2 = \frac{2\sigma(d\vec{z}, \delta\vec{v})}{k^2\left(1+\sigma\frac{\vec{v}^2}{k^2}\right)} + \frac{\sigma\, d\vec{z}^{\,2}}{k^2\left(1+\sigma\frac{\vec{v}^2}{k^2}\right)} +$$

$$+ \varepsilon\sigma k^2 \overset{(2)}{B}(dz, dz) + \frac{(\vec{v}, d\vec{z})^2}{k^4\left(1+\sigma\frac{\vec{v}^2}{k^2}\right)} - \varepsilon\frac{[B(v, dz)]^2}{1+\sigma\frac{\vec{v}^2}{k^2}} + \tag{4}$$

$$+ \frac{\sigma\,\delta\vec{v}^{\,2}}{k^2\left(1+\sigma\frac{\vec{v}^2}{k^2}\right)} - \frac{(\vec{v}, \delta\vec{v})^2}{k^4\left(1+\sigma\frac{\vec{v}^2}{k^2}\right)^2}$$

Вводя вещественную или чисто мнимую величину

$$\mathcal{L} = \sqrt{-\varepsilon\left(1+\sigma\frac{\vec{v}^2}{k^2}\right)},$$

можно следующим образом охарактеризовать те элементарные смещения $(\underset{1}{d}u^i; \underset{1}{\delta}v^i)$, $(\underset{2}{d}u^i; \underset{2}{\delta}v^i)$ в касательном расслоении, для которых остается неизменной точка Z или Z^*:

$$\underset{1}{\delta}v^i = \left(-\delta^i_s + \varepsilon\sigma k^2\mathcal{L}B^i_s - \frac{\sigma}{k^2}v_s v^i\right)\underset{1}{d}u^s,$$

$$\underset{2}{\delta}v^i = \left(-\delta^i_s - \varepsilon\sigma k^2\mathcal{L}B^i_s - \frac{\sigma}{k^2}v_s v^i\right)\underset{2}{d}u^s.$$

Указанные элементарные смещения определяют в касательном расслоении два действительных или комплексно сопряженных распределения. Раскладывая произвольный касательный вектор V касательного расслоения на две компоненты, принадлежащие площадкам этих распределений, и меняя знак у одной из этих компонент, получим новый вектор $\tilde{V}$, и переход $V \to \tilde{V}$ осуществляется с помощью аффинора $\mathcal{F}$. В корепере $\{du^i; \delta v^i\}$ этот аффинор имеет координаты

$$\mathcal{F}^i_j = \frac{\varepsilon}{k^2\mathcal{L}}\left(\sigma\tilde{B}^i_j + \frac{1}{k^2}\tilde{B}^i_s v^s v_j\right),$$

$$\mathcal{F}^{n+i}_j = \frac{\varepsilon}{\mathcal{L}}\Big[-\frac{\sigma}{k^2}\tilde{B}^i_j - \frac{1}{k^4}\tilde{B}^i_s v^s v_j + \sigma k^2\mathcal{L}^2 B^i_j -$$

$$- \frac{1}{k^4}\tilde{B}^s_j v_s v^i - \frac{\sigma}{k^6}\tilde{B}(v,v)v_j v^i\Big], \tag{5}$$

$$\mathcal{F}^{\,i}_{n+j} = \frac{\varepsilon\sigma}{k^2\mathcal{L}}\,\tilde{b}^{\,i}_{j}\,,$$

$$\mathcal{F}^{\,n+i}_{n+j} = -\frac{\varepsilon}{k^2\mathcal{L}}\left(\sigma\,\tilde{b}^{\,i}_{j} + \frac{1}{k^2}\,\tilde{b}^{\,s}_{j}\,v_s\,v^i\right).$$

Здесь $\tilde{b}^{\,i}_{j}$ – аффинор, обратный к аффинору $b^{\,i}_{j}$, а $\tilde{b}(v,v) = \tilde{b}_{ij}\,v^i v^j$. Следует заметить, что рассматриваемый способ задания прямых неевклидова пространства с помощью касательных векторов гиперповерхности требует (для взаимной однозначности соответствия в малом) тангенциальной невырожденности гиперповерхности. Аффинор $\mathcal{F}^{\alpha}_{\beta}$ удовлетворяет условию $\mathcal{F}^{\sigma}_{\beta}\,\mathcal{F}^{\alpha}_{\sigma} = \delta^{\alpha}_{\beta}$, и если величина $\mathcal{L}$ чисто мнима, то $\mathcal{F}^{\alpha}_{\beta} = i\,\mathring{\mathcal{F}}^{\alpha}_{\beta}$, где вещественный аффинор $\mathring{\mathcal{F}}^{\alpha}_{\beta}$ задает на касательном расслоении почти комплексную структуру. Метрика (4) совместно с почти двойной или почти комплексной структурой, определяемой аффинором (5), соответствует той келеровой структуре гиперболичес - кого или эллиптического типа, которая существует в многообразии прямых неевклидова пространства и теперь реализована в касательном расслоении гиперповерхности. Если $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$ -метри - ческий тензор, соответствующий линейному элементу (4), то фундаментальный бивектор $\mathcal{F}_{\alpha\beta} = \mathcal{F}^{\sigma}_{\alpha}\,\mathcal{G}_{\sigma\beta}$ келеровой геометрии определяется 2-формой

$$\Omega = \frac{1}{\mathcal{L}}\,b_{ij}\,du^i\wedge\delta v^j + \frac{\varepsilon\sigma}{k^2\mathcal{L}^3}\,b_{pi}\,g_{qj}\,v^p v^q\,du^i\wedge\delta v^j .$$

При этом $\Omega = -d\omega$, где

$$\omega = \frac{b_{ij}\,v^i du^j}{\sqrt{-\varepsilon\left(1+\sigma\frac{\vec{v}^{\,2}}{k^2}\right)}}\,.$$

Второй способ внесения метрики в касательное расслоение тангенциально невырожденной гиперповерхности представляет интерес и с той точки зрения, что в касательном расслоении возникает три-ткань, образованная интегральными поверхностями структурных распределений и слоями касательного расслоения.

3. Сделаем еще одно замечание о геометрии в касательном расслоении гиперповерхности аффинного пространства $\mathcal{D}_{n+1}$, служащей индикатрисой для релятивной линейчатой геометрии этого пространства (см. [5]). При $n>2$ эта геометрия оказывается геометрией аффинной связности без кручения и строится следующим образом. Если $\vec{r}$ – радиус-вектор точки индикатрисы, заданной уравнением $\vec{r}=\vec{r}\,(x^1,\dots,x^n)$, то ориентированная прямая пространства $\mathcal{D}_{n+1}$ задается элементом $(\vec{r},\vec{v})$ касательного расслоения индикатрисы, где $\vec{v}=x^{n+s}\vec{r}_s$ Оснащая индикатрису ее радиусом-вектором, определим из деривационных уравнений $\nabla_j\vec{r}_i=b_{ij}\,\vec{r}$ внутреннюю эквипроективную связность Γ^i_{jk} и асимптотический тензор b_{ij}. Тогда в касательном расслоении индикатрисы можно построить аффинную связность, имеющую в индуцированных координатах x^α $(\alpha,\beta,\gamma,\dots=$ $=1,\dots,2n)$ компоненты

$$\overset{*}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}={}^{c}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}-{}^{c}b_{\beta\sigma}w^{\sigma}f^{\alpha}_{\gamma}-{}^{c}b_{\gamma\sigma}w^{\sigma}f^{\alpha}_{\beta}+{}^{c}b_{\beta\sigma}f^{\sigma}_{\gamma}w^{\alpha},$$

где ${}^{c}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ – полный лифт связности Γ^i_{jk}, ${}^{c}b_{\alpha\beta}$ – полный лифт тензора b_{ij}, f^{α}_{β} – аффинор естественной почти касательной структуры, w^α – векторное поле Лиувилля. Эта связность инвариантна при преобразованиях касательного расслоения, индуцируемых параллельными переносами пространства $\mathcal{D}_{n+1}$. Можно показать, что эта связность по существу является одной из тех связностей в нормализованном пространстве $(1,n-1)$ пар пространства $\mathcal{D}_{n+1}$, расширенного до проективного пространства, которые были введены Э.Г.Нейфельдом [6]. Действительно, поставим в соответствие ориентированной прямой $\mathcal{P}_1$ пространства $\mathcal{D}_{n+1}$, определяемой элементом касательного расслоения ($\vec{r}$, $\vec{v}=x^{n+s}\vec{r}_s$), несобственную $(n-1)$-мерную плоскость $\mathcal{P}_{n-1}$ касательной гиперплоскости к индикатрисе в точке с радиусом-вектором $\vec{r}$. Обозначая через ($\vec{a}$: I) и ($\vec{b}$: 0) наборы однородных координат соответственно собственной точки с радиусом-вектором $\vec{a}$ и несобственной точки, определяемой направлением $\vec{b}$, зададим прямую $\mathcal{P}_1$ парой точек X_A ($A=0,\mathrm{I}$) : X_0 ($\vec{r}$:0) и $X_{\mathrm{I}}(x^{n+s}\vec{r}_s$: I), а несобственную $\mathcal{P}_{n-1}$ – набором n несобственных точек $X_{\bar{a}}$ ($\vec{r}_a$: 0). Записывая разложения

$$\partial_\beta X_A = \Gamma^{\mathcal{D}}_{\beta A} X_{\mathcal{D}} + B^{\bar a}_{\beta A} X_{\bar a} \, ,$$

$$\partial_\beta X_{\bar a} = \Gamma^{\bar b}_{\beta \bar a} X_{\bar b} + B^{\mathcal{D}}_{\beta \bar a} X_{\mathcal{D}} \, ,$$

найцем

$$B^{\bar a}_{i\,o} = \delta^a_i \, , \qquad B^{\bar a}_{i\,\bar I} = x^{n+s} \Gamma^a_{s\,i} \, ,$$

$$B^{\bar a}_{n+i\,,\,o} = 0 \, , \qquad B^{\bar a}_{n+i\,,\,\bar I} = \delta^a_i \, .$$

$$\Gamma^o_{\beta o} = \Gamma^{\bar I}_{\beta o} = 0 \, , \quad \Gamma^o_{i \bar I} = x^{n+s} b_{s i} \, , \quad \Gamma^{\bar I}_{i \bar I} = 0 \, ,$$

$$\Gamma^o_{n+i\,,\,\bar I} = \Gamma^{\bar I}_{n+i\,,\,\bar I} = 0 \, , \quad \Gamma^{\bar c}_{i \bar a} = \Gamma^c_{i a} \, , \quad \Gamma^{\bar c}_{n+i\,,\,\bar a} = 0 .$$

В таком случае условия

$$\nabla_\beta B^{\bar a}_{\alpha A} \equiv \partial_\beta B^{\bar a}_{\alpha A} - \Gamma^{\mathcal{D}}_{\beta A} B^{\bar a}_{\alpha \mathcal{D}} + \Gamma^{\bar a}_{\beta \bar c} B^{\bar c}_{\alpha A} - \overset{*}{\Gamma}{}^{\sigma}_{\beta\alpha} B^{\bar a}_{\sigma A} = 0$$

определят в точности связность $\overset{*}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ релятивной линейчатой геометрии пространства $\mathcal{D}_{n+1}$.

При n =2 релятивная линейчатая геометрия пространства $\mathcal{D}_3$ оказывается римановой, и метрический тензор, ковариантно постоянный в связности $\overset{*}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}$, соответствует линейному элементу

$$ds^2 = 2\,\varepsilon_{ij}\, dx^i \delta x^{n+j} \, ,$$

где ε_{ij} - бивектор, ковариантно постоянный в эквипроективной связности Γ^i_{jk} , а δx^{n+i} - абсолютный дифференциал касательного вектора. Эта риманова геометрия конформно - евклидова и может быть получена по методу А.П.Норцена, если осуществить нормализацию гиперквадрики Плюккера-Клейна, ставя в соответствие ориентированной прямой пространства $\mathcal{D}_3$ несобственную прямую касательной плоскости индикатрисы. Соответствующие рассмотрения были недавно произвецены в дипломной работе Е.Н.Сосова.

Л и т е р а т у р а

1. Р о з е н ф е л ь д Б. А. Проективная геометрия как метрическая геометрия. - Труды семинара по векторн. и тензорн. анализу, вып.8. М., 1950, 328-354.

2. Н о р д е н А. П. О структуре связности на многообразии прямых неевклидова пространства. - Изв.вузов. Матем., 1972, № 12, 84-94.

3. Ш и р о к о в А. П. Об одной модели для линейчатой геометрии пространства Лобачевского. - Труды геометрического семинара, вып.12. Казань, 1979, с.111-117.

4. Ш и р о к о в А. П. О касательных расслоениях и линейчатой геометрии неевклидовых пространств. - Труды геометрического семинара, вып.13. Казань, 1981, с.101-108.

5. Ш и р о к о в А. П. К вопросу о релятивной линейчатой геометрии. - В сб.: Дифференциальная геометрия, вып. 3. Межвузовский научный сборник. Саратов, 1976, с.69-81.

6. Н е й ф е л ь д Э. Г. Аффинные связности на нормализованном многообразии плоскостей проективного пространства. - Изв. вузов. Матем., 1976, № 11, 48-55.

Ш.А.Яфаров

СХОДЯЩИЕСЯ СЕТИ В ПРОСТРАНСТВАХ A_n

Через A_n $(n \geq 2)$ обозначается пространство аффинной связности n измерений без кручения. В работе [1] дается обобщение сходящейся сети риманова пространства V_2 на случай пространства A_2. В настоящей статье понятие сходящейся сети пространства A_2 обобщается на случай n-мерной сети пространства A_n. Исследуется вопрос ее существования и находятся необходимые и достаточные инвариантные признаки такой сети.

Введение

Траектории сходимости векторных полей пространства A_2 изучены в [1,2]. Понятия траектории сходимости и вектора