



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Е. Гутман, И. А. Емельяненко, Локально выпуклые пространства, в которых все архимедовы конусы замкнуты,
Сиб. матем. журн., 2023, том 64, номер 5, 945–970

<https://www.mathnet.ru/smj7807>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.174

27 апреля 2025 г., 14:13:20



ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫЕ ПРОСТРАНСТВА,
В КОТОРЫХ ВСЕ АРХИМЕДОВЫ
КОНУСЫ ЗАМКНУТЫ

А. Е. Гутман, И. А. Емельяненко

Аннотация. Предложено исчерпывающее описание класса локально выпуклых пространств, в которых все архимедовы конусы замкнуты. Введено понятие квазиплотного множества и показано, что описываемый класс состоит из конечномерных и счетномерных пространств X , у которых топологически сопряженное пространство X' квазиплотно в алгебраически сопряженном пространстве $X^\#$.

DOI 10.33048/smzh.2023.64.505

Ключевые слова: архимедово упорядоченное векторное пространство, локально выпуклое пространство, слабая топология, конус, клин.

Анатолию Георгиевичу Кусраеву
в связи с его 70-летием

§ 1. Основные обозначения и термины

Символ \mathbb{N} обозначает множество натуральных чисел $\{1, 2, \dots\}$. Множества целых, рациональных и вещественных чисел обозначаются символами \mathbb{Z} , \mathbb{Q} и \mathbb{R} . Символ \mathbb{R}^+ служит для обозначения совокупности $\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \geq 0\}$ положительных вещественных чисел. Множество \mathbb{R} наделяется стандартными операциями и топологией, относительно которых оно является полем и локально выпуклым пространством. Символом \mathbb{R}_D условимся обозначать множество вещественных чисел, снабженное дискретной топологией.

Знак « \subset » обозначает нестрогое включение множеств. Символ присваивания « $:=$ » используется в значении «полагается равным» или «равно по определению».

В дальнейшем под *векторным пространством* понимается векторное пространство над \mathbb{R} . Термин *подпространство* всюду означает векторное подпространство.

Замкнутые, открытые и полуоткрытые числовые промежутки обозначаются символами $[\alpha, \beta]$, $] \alpha, \beta [$ и $[\alpha, \beta [$. Если X — векторное пространство, $x, y \in X$ и $x \neq y$, то $[x, y] := x + [0, 1](y - x)$ и $]x, y[:= x + [0, 1[(y - x)$. Для удобства полагаем $[x, x] :=]x, x[:= \{x\}$. Множество $S \subset X$ называется *поглощающим*, если для каждого $x \in X$ существует такое число $\varepsilon > 0$, что $[0, \varepsilon x] \subset S$. Символ $\text{core } S$ обозначает *ядро* S — совокупность элементов $s \in S$, для которых множество $S - s$ является поглощающим. Символы $\text{lin } S$ и $\text{co } S$ служат для обозначения

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0004).

линейной и выпуклой оболочки множества S . Подмножество $W \subset X$ называется *клином*, если $W \neq \emptyset$, $W + W \subset W$ и $\mathbb{R}^+ W \subset W$. Клин W называется *конусом*, если $W \cap -W = \{0\}$.

Для любого множества I символом $\mathbb{R}_{\text{fin}}^I$ обозначается подпространство \mathbb{R}^I , состоящее из финитных функций, т. е. функций $x: I \rightarrow \mathbb{R}$ с конечными носителями $\text{supp } x := \{i \in I : x(i) \neq 0\}$. Кортежи $x = (x(1), \dots, x(n)) \in \mathbb{R}^n$, где $n \in \mathbb{N}$, традиционно считаются функциями $x: \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$. В дальнейшем используются обозначения

$$e_n := \chi_{\{n\}} = (0, \dots, 0, \underset{(n)}{1}, 0, 0, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};$$

$$\mathbb{R}_n^{\mathbb{N}} := \text{lin} \{e_1, \dots, e_n\} = \{x \in \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}} : \text{supp } x \subset \{1, \dots, n\}\}.$$

Линейный оператор $\pi_n: \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ определяется формулой

$$\pi_n s := s|_{\{1, \dots, n\}} = (s(1), \dots, s(n)). \quad (1)$$

Условимся использовать обозначение (1) не только для последовательностей $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, но и для кортежей $s \in \mathbb{R}^m$, где $m \geq n$.

Если X — векторное пространство, то символом $X^\#$ обозначается *алгебраически сопряженное* к X пространство линейных функционалов $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Если X снабжено векторной топологией, то символ X' служит обозначением *топологически сопряженного* к X пространства — подпространства $X^\#$, состоящего из непрерывных функционалов.

Символы $\text{cl } S$ и $\text{int } S$ или, точнее, $\text{cl}_X S$ и $\text{int}_X S$ обозначают замыкание и внутренность множества S в топологическом пространстве X .

§ 2. Введение

2.1. Понятие конуса тесно взаимосвязано с понятием *упорядоченного векторного пространства* — вещественного векторного пространства X , снабженного таким отношением порядка \leq , что для любых $x, y, z \in X$ и $\lambda \in \mathbb{R}^+$ из $x \leq y$ следует $x + z \leq y + z$ и $\lambda x \leq \lambda y$. А именно, если (X, \leq) — упорядоченное векторное пространство, то множество $X^+ := \{x \in X : x \geq 0\}$ является конусом; и наоборот: если $K \subset X$ — конус и $x \leq_K y \Leftrightarrow y - x \in K$, то (X, \leq_K) — упорядоченное векторное пространство и $X^+ = K$ (см., например, [1, 3.2; 2]).

2.2. Упорядоченное векторное пространство (X, \leq) называют *архимедовым* при выполнении следующего условия:

$$\text{если } x, y \in X, y \geq 0 \text{ и } x \leq \frac{1}{n}y \text{ для всех } n \in \mathbb{N}, \text{ то } x \leq 0.$$

Конус K в векторном пространстве X называется *архимедовым*, если архимедово соответствующее упорядоченное векторное пространство (X, \leq_K) .

2.3. Предложение [3, 3.1]. *Следующие свойства конуса K в векторном пространстве X равносильны:*

- (a) K архимедов;
- (b) $X \setminus K = \text{core}(X \setminus K)$;
- (c) для любых $x, y \in X$ из $[x, y[\subset K$ следует $y \in K$;
- (d) для любых $x, y \in X$ множество $\{\lambda \in \mathbb{R} : x + \lambda y \in K\}$ замкнуто;
- (e) пересечение K с любым подпространством X размерности ≤ 2 замкнуто;
- (f) пересечение K с любым конечномерным подпространством X замкнуто;

(g) K секвенциально замкнут в какой-либо хаусдорфовой векторной топологии на X ;

(h) K секвенциально замкнут в сильнейшей локально выпуклой топологии на X .

◁ Импликации (a)⇐(b)⇐(c)⇐(d)⇐(e)⇐(f)⇐(g)⇐(h) очевидны.

(a)⇒(f). Рассмотрим конечномерное подпространство $X_0 \subset X$ и положим $K_0 := K \cap X_0$. Поскольку в подпространстве $\text{lin } K_0 \subset X_0$ конус K_0 имеет непустую внутренность, он замкнут в $\text{lin } K_0$ (см. [2, 2.4]), а значит, и в X_0 .

(f)⇒(h). Пусть τ — сильнейшая локально выпуклая топология на X . Благодаря условию (f) достаточно показать, что линейная оболочка любой сходящейся в τ последовательности $x_n \rightarrow x$ имеет конечную размерность. В противном случае нашлась бы такая подпоследовательность $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, что $x \notin \text{lin } \{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$, и тогда сходимости $x_{n_k} \rightarrow x$ в τ противоречила бы наличию (непрерывного) линейного функционала, равного 0 на $\{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ и 1 в точке x . ▷

2.4. В предложении 2.3 прослеживается связь между алгебраическим понятием архимедовости и топологическим понятием замкнутости. В случае, когда упорядоченное векторное пространство X снабжено некоторой хаусдорфовой векторной топологией, архимедовость конуса X^+ и его замкнутость можно переформулировать в терминах перехода к пределу в линейных неравенствах. Из свойства 2.3(f) очевидно, что архимедовость X^+ означает допустимость перехода к пределу в линейных неравенствах с фиксированными векторами и переменными коэффициентами: если $x_1, \dots, x_n \in X$ и $(\lambda_{ij})_{j \in \mathbb{N}}$ ($i = 1, \dots, n$) — сходящаяся числовая последовательности, то

$$\sum_{i=1}^n \lambda_{ij} x_i \geq 0 \quad (j \in \mathbb{N}) \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_{ij} x_i \geq 0. \quad (2)$$

Если же конус X^+ замкнут, то переход к пределу в линейных неравенствах допустим без каких-либо ограничений: для любых сходящихся сетей $(x_{ij})_{j \in J}$ в X и $(\lambda_{ij})_{j \in J}$ в \mathbb{R} ($i = 1, \dots, n$) справедлива импликация

$$\sum_{i=1}^n \lambda_{ij} x_{ij} \geq 0 \quad (j \in J) \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lim_{j \in J} \lambda_{ij} \lim_{j \in J} x_{ij} \geq 0. \quad (3)$$

Эти соображения обосновывают целесообразность описания класса топологических векторных пространств, в которых архимедовость конуса влечет его замкнутость или, что то же самое, (2) влечет (3).

2.5. Замкнутый конус заведомо архимедов, в то время как обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Простым примером незамкнутого архимедова конуса служит множество $(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})^+$ положительных финитных последовательностей в любом из классических банаховых пространств ℓ^p , $1 \leq p \leq \infty$. Как известно, архимедовость конуса и его замкнутость равносильны в конечномерном случае. До недавнего времени этим простым наблюдением фактически исчерпывались сведения о классе пространств, в которых все архимедовы конусы замкнуты. Начало соответствующему исследованию было положено в работе [3], где обсуждаемая проблема получила решение для локально выпуклых пространств несчетной размерности.

Теорема [3, 4.2, 4.3]. Пусть E — базис Гамеля хаусдорфова локально выпуклого пространства X , и пусть $e_0 \in E$. Если $|E| > |\mathbb{N}|$, то \mathbb{R}^+C — незамкнутый архимедов конус в X , где

$$C = \left\{ \sum_{e \in E} x(e)e : x \in (\mathbb{R}_{\text{fin}}^E)^+, x(e_0) = 1, \sum_{e \neq e_0} x(e) \leq 1, \sum_{e \neq e_0} \sqrt{x(e)} \geq 1 \right\}.$$

Таким образом, в несчетномерном случае незамкнутые архимедовы конусы существуют даже в сильнейшей локально выпуклой топологии. С другой стороны, в конечномерных пространствах все архимедовы конусы замкнуты. Счетномерный же случай оказался более сложным, и вопрос об исчерпывающем описании локально выпуклых пространств, в которых замкнуты все архимедовы конусы, до сих пор оставался открытым.

2.6. Поскольку во всех локально выпуклых топологиях, согласованных с данной двойственностью, замкнутые выпуклые множества одни и те же (см., например, [1, 10.4.9; 4, 8-3-6]), изучаемое свойство локально выпуклого пространства X полностью определяется топологически сопряженным к нему пространством X' , а точнее, расположением X' в $X^\#$. При этом можно считать, что пространство X снабжено слабой топологией, согласованной с двойственностью между X и X' . С учетом того факта, что всякое счетномерное векторное пространство X изоморфно $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$, а алгебраически сопряженное к нему пространство $X^\#$ изоморфно $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, рассматриваемая задача может быть сформулирована следующим образом.

ЗАДАЧА [3, 4.5]. Описать векторные подпространства $Y \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, для которых все архимедовы конусы в $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$ замкнуты в слабой топологии, наведенной на $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$ пространством Y посредством двойственности $\langle x | y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} x(n)y(n)$.

Решению этой задачи посвящена данная статья. В параграфе 3 приведены известные и вспомогательные сведения о двойственности и полярах. Параграфы 4–7 посвящены исследованию понятия квазивнутренности и связанных с ним новых понятий квазилокальной ограниченности, квазиплотности и проективности, которые играют ключевую роль на пути к решению. В параграфе 8 установлен основной результат статьи — теорема 8.5, содержащая решение поставленной задачи. Итог подведен в теореме 8.6, где дано исчерпывающее описание класса локально выпуклых пространств, в которых все архимедовы конусы замкнуты: этот класс состоит из конечномерных и счетномерных пространств X с квазиплотными сопряженными пространствами $X' \subset X^\#$. В том же параграфе приведены два следствия, одно из которых подтверждает выдвинутую в [3] гипотезу, а другое предлагает короткое обоснование результата работы [5]. В заключительном параграфе 9 сформулированы несколько вопросов, на данный момент остающихся открытыми.

§ 3. Двойственность

Приведем основные сведения, обозначения и соглашения, связанные с двойственностью между векторными пространствами и со слабыми локально выпуклыми топологиями.

3.1. Тройку $(X, Y, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ назовем *пространством с двойственностью*, если X и Y — векторные пространства и $\langle \cdot | \cdot \rangle$ — двойственность между X и Y , т. е. билинейный функционал $\langle \cdot | \cdot \rangle: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что $\ker \langle \cdot | \cdot \rangle = \{0\}$ и $\ker | \cdot \rangle = \{0\}$,

где $\langle x | = \langle x | \cdot \rangle$ и $|y \rangle = \langle \cdot | y \rangle$ для $x \in X$ и $y \in Y$. Пространство с двойственностью называют также *двойственной парой* (см. [4, 8-2-1]). Вместо $(X, Y, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ будем писать $X|Y$ или просто X , если из контекста ясно, какое пространство Y и какая двойственность $\langle \cdot | \cdot \rangle$ имеются в виду. Для $x \in X$ функционал $\langle x | \in Y^\#$ обозначается символом \hat{x} .

При рассмотрении пространства с двойственностью $(X, Y, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ пространство Y по умолчанию наделяется *сопряженной двойственностью*: $Y = Y|X = (Y, X, \langle \cdot | \cdot \rangle^*)$, где $\langle y | x \rangle^* = \langle x | y \rangle$. В частности, если $y \in Y$, то $\hat{y} = |y \rangle \in X^\#$.

3.2. Всякое хаусдорфово локально выпуклое пространство X по умолчанию считается пространством $X|X' = (X, X', \langle \cdot | \cdot \rangle)$ с двойственностью $\langle x | f \rangle = f(x)$. Наоборот, всякое пространство с двойственностью $X = (X, Y, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ наделяется соответствующей слабой топологией $\sigma(X|Y)$ и тем самым считается хаусдорфовым локально выпуклым пространством. При этом отображение $|\cdot \rangle: y \in Y \mapsto \hat{y} \in X^\#$ является линейным и топологическим изоморфизмом между локально выпуклыми пространствами $Y = Y|X$ и $X' = X'|X$.

3.3. Пусть X — векторное пространство, снабженное хаусдорфовой локально выпуклой топологией τ . Слабая топология $\sigma := \sigma(X|X')$, которой по умолчанию наделяется пространство с двойственностью $X|X'$, может не совпадать с τ . Тем не менее в силу равенства $(X, \sigma)' = (X, \tau)'$ локально выпуклые пространства (X, σ) и (X, τ) имеют одни и те же замкнутые выпуклые множества, замыкания выпуклых множеств и ограниченные множества (см. [4, 8-1-3, 8-3-6, 8-3-7, 8-4-1]). Следовательно, если в утверждении о каком-либо локально выпуклом пространстве X употребление топологии не выходит за рамки упомянутых выше понятий, то в доказательстве такого утверждения можно предполагать, что $X = X|X'$.

3.4. Для любого множества I векторное пространство $\mathbb{R}_{\text{fin}}^I$ по умолчанию считается пространством $\mathbb{R}_{\text{fin}}^I|\mathbb{R}^I = (\mathbb{R}_{\text{fin}}^I, \mathbb{R}^I, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ с двойственностью $\langle x | y \rangle = \sum_{i \in I} x(i)y(i)$. Эта же двойственность подразумевается при рассмотрении пар вида $\mathbb{R}_{\text{fin}}^I|Y$, где Y — подпространство \mathbb{R}^I . Как легко видеть, $\{\hat{y} : y \in \mathbb{R}^I\} = (\mathbb{R}_{\text{fin}}^I)^\#$.

Пространство \mathbb{R}^I наделяется сопряженной двойственностью: $\mathbb{R}^I = \mathbb{R}^I|\mathbb{R}_{\text{fin}}^I$. Слабая топология $\sigma(\mathbb{R}^I|\mathbb{R}_{\text{fin}}^I)$, по умолчанию рассматриваемая в этом пространстве, совпадает с тихоновской топологией произведения $\mathbb{R}^I = \prod_{i \in I} \mathbb{R}$, также называемой топологией поточечной сходимости. Отсюда, в частности, вытекает известный критерий компактности в \mathbb{R}^I : подмножество \mathbb{R}^I компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено. (Это так, например, потому, что всякое ограниченное подмножество \mathbb{R}^I содержится в произведении вида $\prod_{i \in I} [\alpha_i, \beta_i]$, которое компактно по теореме Тихонова.)

Если $n \in \mathbb{N}$, то $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^I = \mathbb{R}_{\text{fin}}^I$, где $I = \{1, \dots, n\}$, а значит, к пространству \mathbb{R}^n применимы все соглашения и обозначения, введенные выше для \mathbb{R}^I и $\mathbb{R}_{\text{fin}}^I$. В частности, \mathbb{R}^n по умолчанию считается пространством $\mathbb{R}^n|\mathbb{R}^n$ с двойственностью $\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n x(i)y(i)$.

3.5. Пусть X — векторное пространство. Если Y — произвольное подпространство $X^\#$, то билинейный функционал $\langle \cdot | \cdot \rangle: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, определенный формулой $\langle x | y \rangle = y(x)$, не обязан быть двойственностью: из условий $\ker \langle \cdot | = \{0\}$ и $\ker |\cdot \rangle = \{0\}$ заведомо выполняется лишь второе.

Предложение. Следующие свойства пространства $Y \subset X^\#$ равносильны:

- (a) $(x, y) \mapsto y(x)$ — двойственность между X и Y ;
- (b) слабая топология $\sigma(X|Y)$ хаусдорфова;
- (c) если $x_1, x_2 \in X$ и $x_1 \neq x_2$, то $y(x_1) \neq y(x_2)$ для некоторого $y \in Y$;
- (d) для любого ненулевого $x \in X$ найдется $y \in Y$ такой, что $y(x) \neq 0$;
- (e) для любых линейно независимых $x_1, \dots, x_n \in X$ и любых $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ найдется $y \in Y$ такой, что $y(x_1) = \lambda_1, \dots, y(x_n) = \lambda_n$;
- (f) Y плотно в $X^\#|X$;
- (g) $\text{cl} Y = X^\#$ в топологическом пространстве \mathbb{R}_D^X .

В литературе плотные подпространства $X^\#|X$ называют также тотальными над X , разделяющими или фундаментальными. Если Y — подпространство X' , где X — хаусдорфово локально выпуклое пространство, то плотность Y в X' равносильна плотности Y в $X^\#$ (см. [4, 8-3-9]). По этой причине использование терминов «плотное подпространство X' » и «плотное подпространство $X^\#$ » не приводит к двусмысленности.

При рассмотрении векторного пространства X и плотного подпространства $Y \subset X^\#$ между X и Y по умолчанию вводится двойственность $\langle x|y \rangle = y(x)$ и рассматриваются соответствующие двойственные пары $X|Y$ и $Y|X$.

3.6. Приведенное ниже описание плотных подпространств $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ легко вывести из предложения 3.5.

Предложение. Следующие свойства пространства $Y \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ равносильны:

- (a) Y — плотное подпространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$;
- (b) $\pi_n Y = \mathbb{R}^n$ для всех $n \in \mathbb{N}$;
- (c) $\pi_n e_n \in \pi_n Y$ для всех $n \in \mathbb{N}$;
- (d) Y плотно в $\mathbb{R}_D^{\mathbb{N}}$.

3.7. Пусть $X|Y$ — двойственная пара, $R \subset \mathbb{R}$ и $S \subset X$. Множество

$$S^{(R)} := \{y \in Y : \langle s|y \rangle \in R \text{ для всех } s \in S\}$$

назовем *полярной S относительно R* . Перечислим классические частные случаи поляр:

$S^\oplus := S^{(\mathbb{R}^+)}$ — *двойственный клин* к S , часто обозначаемый в литературе символом S' ;

$S^\ominus := S^{(-\mathbb{R}^+)} = -S^\oplus$ — *нормальный клин* к S ; множество $(S-x)^\ominus$ называют нормальным клином к S в точке $x \in X$;

$S^\boxplus := (S \setminus \{0\})^{\langle]0, \infty[\rangle} = \{y \in Y : \langle s|y \rangle > 0 \text{ для всех } s \in S \setminus \{0\}\}$ — совокупность *строго положительных* относительно S элементов двойственного пространства;

$S^\circ := S^{\langle]-\infty, 1[\rangle}$ — *односторонняя поляр* S ;

$S^\circ := S^{\langle]-1, 1[\rangle}$ — *абсолютная поляр* S ;

$S^\perp := S^{\langle \{0\} \rangle}$ — *аннулятор* S .

Напомним, что пространство Y по умолчанию наделяется сопряженной двойственностью: $Y = Y|X$. В частности, если $T \subset Y$, то $T^{(R)} \subset X$ (см. предложение 3.8(a) ниже).

3.8. Предложение. Пусть $X|Y$ — двойственная пара. Для любых $R \subset \mathbb{R}$ и $S \subset X$ справедливы следующие соотношения:

- (a) $S \subset S^{\langle R \rangle \langle R \rangle}$;
- (b) если $R_0 \subset R$ и $S_0 \subset S$, то $S_0^{\langle R \rangle} \supset S^{\langle R_0 \rangle}$;
- (c) если $0 \in R$, то $0 \in S^{\langle R \rangle}$;
- (d) если R — выпуклое (абсолютно выпуклое, замкнутое) подмножество \mathbb{R} , то $S^{\langle R \rangle}$ — выпуклое (абсолютно выпуклое, замкнутое) подмножество Y ;
- (e) если R поглощающее (т. е. $0 \in \text{int } R$) и S ограничено, то $S^{\langle R \rangle}$ поглощающее;
- (f) если $R \cap -R$ ограничено и S поглощающее, то $S^{\langle R \rangle}$ ограничено;
- (g) если $R \cap -R$ ограничено и $S^{\langle R \rangle}$ поглощающее, то S ограничено.

3.9. Следствие [6, 5.102]. Для любого подмножества S хаусдорфова локально выпуклого пространства справедливы следующие утверждения:

- (a) поляры $S^\oplus, S^\ominus, S^\boxplus, S^\ominus$ выпуклы;
- (b) поляры S°, S^\perp абсолютно выпуклы;
- (c) поляры $S^\oplus, S^\ominus, S^\circ, S^\circ, S^\perp$ замкнуты и содержат 0;
- (d) если S поглощающее, то S° и S° ограничены;
- (e) S ограничено $\Leftrightarrow S^\circ$ поглощающее $\Leftrightarrow S^\circ$ поглощающее.

3.10. Теорема о биполяре [6, 5.103]. Если S — непустое подмножество хаусдорфова локально выпуклого пространства, то

$$S^{\circ\circ} = \text{cl co}(S \cup \{0\}), \quad S^{\circ\circ} = \text{cl co}(S \cup -S).$$

3.11. Теорема [2, 2.13]. Если $X|Y$ — двойственная пара и W — клин в X , то W^\oplus — замкнутый клин в Y и $W^{\oplus\oplus} = \text{cl } W$.

§ 4. Квазивнутренность

Всюду в этом параграфе X — хаусдорфова локально выпуклое пространство. В соответствии с соглашениями 3.1 и 3.2 пространства X и X' по умолчанию наделяются двойственностью: $X = X|X', X' = X'|X$. (В частности, если $S \subset X'$, то $S^\circ \subset X$.)

Элемент x множества $S \subset X$ называют относительно квазивнутренней точкой S и пишут $x \in \text{qi } S$, если $\text{cl } \mathbb{R}^+(S - x)$ — векторное подпространство X . Понятие относительной квазивнутренности было введено и изучено в [7] и получило дальнейшее распространение в выпуклом анализе и методах оптимизации. В рассматриваемом случае оказывается полезным несколько иное, но очень близкое понятие квазивнутренности (см., например, [8, 2.1.2]). Большинство представленных в этом параграфе фактов о квазивнутренности имеют аналоги, установленные в [7] для относительной квазивнутренности. Каждое из таких утверждений снабжено соответствующей ссылкой.

4.1. Квазивнутренность $\text{qi } S$ множества $S \subset X$ определяется следующим образом:

$$\text{qi } S := \{x \in S : \text{cl } \mathbb{R}^+(S - x) = X\}.$$

(Заметим, что в этом определении нельзя ослабить включение $x \in S$ до $x \in X$ даже для выпуклого множества S . Например, если $X \neq \{0\}$ и $S = K \setminus \{0\}$, где K — плотный конус в X , то $0 \notin S$, в то время как $\text{cl } \mathbb{R}^+(S - 0) = \text{cl } K = X$.) Элементы $\text{qi } S$ называются *квазивнутренними точками* множества S . Множество S назовем *квазиоткрытым*, если $\text{qi } S = S$.

4.2. При необходимости символ квазивнутренности, как и символ замыкания, снабжается уточняющим индексом: $\text{qi}_X S = \{x \in S : \text{cl}_X \mathbb{R}^+(S - x) = X\}$ для $S \subset X$. Если Y — плотное подпространство X , то в случае $S \subset Y$ имеет место равенство $\text{qi}_Y S = \text{qi}_X S$. (Действительно, благодаря плотности Y в X соотношения $\text{cl}_Y \mathbb{R}^+(S - y) = Y$ и $\text{cl}_X \mathbb{R}^+(S - y) = X$ равносильны для каждого элемента $y \in S$.) В таком контексте условимся использовать запись $\text{qi} S$ без указания пространства, относительно которого определяется квазивнутренность.

4.3. Лемма. Если C — непустое выпуклое подмножество X , то

$$C^\ominus = (\text{cl } \mathbb{R}^+ C)^\ominus, \quad C^{\ominus\ominus} = \text{cl } \mathbb{R}^+ C.$$

◁ Для любого функционала $f \in X'$ с учетом включения $\mathbb{R}^+(\text{cl } \mathbb{R}^+ C) \subset \text{cl } \mathbb{R}^+ C$ справедливы соотношения

$$f \in C^\ominus \Leftrightarrow f \leq 0 \text{ на } \text{cl } \mathbb{R}^+ C \Leftrightarrow f \leq 1 \text{ на } \text{cl } \mathbb{R}^+ C \Leftrightarrow f \in (\text{cl } \mathbb{R}^+ C)^\ominus,$$

откуда благодаря теореме о биполяре 3.10 следует

$$C^{\ominus\ominus} = (\text{cl } \mathbb{R}^+ C)^{\ominus\ominus} = \text{cl co}(\text{cl } \mathbb{R}^+ C \cup \{0\}) = \text{cl } \mathbb{R}^+ C. \triangleright$$

4.4. Предложение [7, 2.8]. Для любого выпуклого множества $C \subset X$ и любого элемента $x \in X$ имеет место эквивалентность

$$x \in \text{qi} C \Leftrightarrow x \in C \text{ и } (C - x)^\oplus = \{0\}.$$

◁ Можно считать, что $x = 0$. Если $0 \in \text{qi} C$, то $\text{cl } \mathbb{R}^+ C = X$, откуда с учетом леммы 4.3 следует, что $-C^\oplus = C^\ominus = (\text{cl } \mathbb{R}^+ C)^\ominus = X^\ominus = \{0\}$. Наоборот, если $C^\oplus = \{0\}$, то, вновь привлекая лемму 4.3, заключаем, что $\text{cl } \mathbb{R}^+ C = C^{\ominus\ominus} = (-C^\oplus)^\ominus = \{0\}^\ominus = X$. ▷

В дальнейшем предложение 4.4 будет многократно использоваться без явных ссылок.

4.5. Предложение [7, 2.9]. Если C — выпуклое множество, $x \in \text{qi} C$ и $y \in C$, то $[x, y[\subset \text{qi} C$.

◁ Можно считать, что $x = 0$. Пусть $0 \in \text{qi} C$, $y \in C$ и $0 < \lambda < 1$. Покажем, что $\lambda y \in \text{qi} C$, для чего рассмотрим функционал $f \in (C - \lambda y)^\oplus$ и установим равенство $f = 0$. Подставляя в неравенство $f(c - \lambda y) \geq 0$ значения $c = 0$ и $c = y$, соответственно получаем $f(y) \leq 0$ и $f(y) \geq 0$. Следовательно, $f(c) = f(c - \lambda y) \geq 0$ для всех $c \in C$, т.е. $f \in C^\oplus$. С другой стороны, из $0 \in \text{qi} C$ вытекает $C^\oplus = \{0\}$. ▷

4.6. Следствие [7, 2.11]. Квазивнутренность выпуклого множества выпукла.

4.7. Предложение [7, 2.12]. Если C — выпуклое множество с непустой квазивнутренностью, то $\text{cl } \text{qi} C = \text{cl } C$.

◁ Достаточно показать, что $C \subset \text{cl } \text{qi} C$. Пусть $y \in C$. По условию имеется точка $x \in \text{qi} C$. Согласно предложению 4.5 справедливо включение $[x, y[\subset \text{qi} C$. Остается заметить, что $y \in \text{cl } [x, y[$. ▷

4.8. Предложение [7, 2.13]. Пусть C и D — выпуклые подмножества X , причем $\text{int } D \neq \emptyset$. Тогда $\text{qi } C \cap \text{int } D = \text{qi}(C \cap D)$.

◁ С помощью сдвига доказываемое утверждение сводится к эквивалентности включений $0 \in \text{qi } C \cap \text{int } D$ и $0 \in \text{qi}(C \cap D)$.

Пусть $0 \in \text{qi } C \cap \text{int } D$. Рассмотрим произвольный функционал $f \in (C \cap D)^\oplus$ и покажем, что $f = 0$. Поскольку $0 \in C \cap \text{int } D$, для всякого элемента $c \in C$ найдется такое число $\varepsilon > 0$, что $\varepsilon c \in C \cap D$, а значит, $f(c) = \frac{1}{\varepsilon} f(\varepsilon c) \geq 0$. Следовательно, $f \in C^\oplus$. С другой стороны, из $0 \in \text{qi } C$ следует $C^\oplus = \{0\}$.

Наоборот, пусть $(C \cap D)^\oplus = \{0\}$. Допустим вопреки доказываемому, что $0 \notin \text{int } D$. Поскольку $\text{int } D \neq \emptyset$, по теореме отделимости найдется ненулевой функционал $f \in X'$ такой, что $f \geq 0$ на D . Но тогда, в частности, $f \in (C \cap D)^\oplus$, а значит, $f = 0$. ▷

4.9. Предложение. Пусть C — выпуклое подмножество X .

(а) Справедливы включения $\text{int } C \subset \text{core } C \subset \text{qi } C$.

(б) Включения в утверждении (а) могут быть строгими одновременно. Например, если $f \in X^\# \setminus X'$ и $C = \{x \in X : f(x) \geq 0\}$, то $\text{int } C = \emptyset$, $\text{core } C = \{x \in X : f(x) > 0\}$ и $\text{qi } C = C$.

(в) Если пространство X конечномерно, то $\text{int } C = \text{qi } C$.

(д) Если $\text{int } C \neq \emptyset$, то $\text{int } C = \text{qi } C$ (см. [7, 2.14]).

(е) В пространстве $X := \mathbb{R}^N$ абсолютно выпуклое компактное множество $C := \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq 1\}$ имеет пустую внутренность и непустую квазивнутренность.

◁ (д) Если $\text{int } C \neq \emptyset$, то с учетом предложения 4.8 справедливы равенства $\text{int } C = \text{qi } X \cap \text{int } C = \text{qi}(X \cap C) = \text{qi } C$.

(е) Для любого элемента $x \in C$ имеем $\mathbb{R}^+(C - x) \subset \ell^\infty \neq \mathbb{R}^N$, а значит, $x \notin \text{int } C$. С другой стороны, $0 \in \text{qi } C$, так как $\text{cl } \mathbb{R}^+ C = \text{cl } \ell^\infty = \mathbb{R}^N$. ▷

4.10. Предложение. Если C — выпуклое подмножество X , то множество $\text{qi } C$ квазиоткрыто, т. е. $\text{qi } \text{qi } C = \text{qi } C$.

◁ Достаточно предположить $0 \in \text{qi } C$ и установить включение $0 \in \text{qi } \text{qi } C$. Рассмотрим произвольный функционал $f \in (\text{qi } C)^\oplus$ и покажем, что $f = 0$. Поскольку $\text{qi } C \neq \emptyset$, согласно предложению 4.7 справедливо равенство $\text{cl } \text{qi } C = \text{cl } C$, а значит, из положительности непрерывного функционала f на $\text{qi } C$ вытекает его положительность на C . Следовательно, $f = 0$, поскольку $C^\oplus = \{0\}$. ▷

4.11. Операция квазивнутренности $\text{qi}: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$, вообще говоря, не является внутренностью относительно какой-либо топологии на X , поскольку равенство $\text{qi}(S_1 \cap S_2) = \text{qi } S_1 \cap \text{qi } S_2$ может нарушаться, причем для выпуклых множеств S_1 и S_2 . Например, если $X \neq \{0\}$ и K — плотный конус в X , то $0 \in \text{qi}(K) \cap \text{qi}(-K)$, в то время как $K \cap -K = \{0\}$ и поэтому $0 \notin \text{qi}(K \cap -K)$.

4.12. Следующий факт служит незначительным усилением предложения [8, 2.1.1].

Предложение. (а) Для любого выпуклого множества $C \subset X$ имеет место включение $\text{qi } C^\oplus \subset C^\boxplus$.

(б) Если W — замкнутый клин в X , то $\text{qi } W^\oplus = W^\boxplus$.

◁ (а) Допустим, $f \in \text{qi } C^\oplus$, но $f(x) = 0$ для некоторого элемента $x \in C \setminus \{0\}$. Тогда для всех $g \in C^\oplus$ имеем $\langle x | g - f \rangle = \langle x | g \rangle \geq 0$, т. е. $x \in (C^\oplus - f)^\oplus$, что невозможно, поскольку $(C^\oplus - f)^\oplus = \{0\}$.

(b) Допустим, что $f > 0$ на $W \setminus \{0\}$, но $f \notin \text{qi } W^\oplus$. Тогда $(W^\oplus - f)^\oplus \neq \{0\}$ и, следовательно, существует такой ненулевой элемент $x \in X$, что $\langle x | g \rangle \geq \langle x | f \rangle$ для всех $g \in W^\oplus$. Поскольку W^\oplus — клин, отсюда следует $\langle x | g \rangle \geq 0$ для всех $g \in W^\oplus$, а значит, $x \in W^{\oplus\oplus} = \text{cl } W = W$ (см. теорему 3.11) и поэтому $\langle x | f \rangle > 0$. Но тогда $\langle x | g \rangle \geq \langle x | f \rangle > 0$ для всех $g \in W^\oplus$, что невозможно, так как $0 \in W^\oplus$. \triangleright

4.13. Теорема. Для любого выпуклого множества $C \subset \mathbb{R}^N$ справедливо равенство

$$\text{qi } C = \{c \in C : \pi_n c \in \text{int } \pi_n C \text{ для всех } n \in \mathbb{N}\}.$$

В частности, выпуклое множество C квазиоткрыто в \mathbb{R}^N тогда и только тогда, когда каждая проекция $\pi_n C$ открыта в \mathbb{R}^n .

\triangleleft Достаточно установить эквивалентность

$$0 \in \text{qi } C \Leftrightarrow 0 \in C \text{ и } 0 \in \text{int } \pi_n C \text{ для всех } n \in \mathbb{N},$$

которая с учетом предложений 4.4 и 4.9(c) сводится к эквивалентности

$$C^\oplus = \{0\} \Leftrightarrow (\pi_n C)^\oplus = \{0\} \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $C^\oplus = \{0\}$. Если $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^n$ и $\hat{x} \geq 0$ на $\pi_n C$, то для последовательности $y := (x(1), \dots, x(n), 0, 0, \dots) \in \mathbb{R}_{\text{fin}}^N$ выполняется неравенство $\hat{y} \geq 0$ на C , откуда $y = 0$ и, в частности, $x = \pi_n y = 0$.

Наоборот, пусть $(\pi_n C)^\oplus = \{0\}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}_n^N$ и $\hat{x} \geq 0$ на C , то $(\pi_n x)^\wedge \geq 0$ на $\pi_n C$, откуда $\pi_n x = 0$, а значит, $x = 0$. \triangleright

§ 5. Квазилокальная ограниченность

Данный параграф посвящен исследованию нового понятия — квазилокально ограниченного локально выпуклого пространства. Как выяснится позже (см. § 6), такие пространства обладают рядом полезных свойств, связанных с замкнутостью конусов в наведенных ими слабых топологиях. Основным результатом этого параграфа является теорема 5.10, согласно которой пространство \mathbb{R}^N является квазилокально ограниченным.

Всюду ниже X — хаусдорфово локально выпуклое пространство.

5.1. Выпуклое множество $C \subset X$ назовем *квазилокально ограниченным* в точке $x \in \text{qi } C$, если $x \in \text{qi } B$ для некоторого ограниченного подмножества $B \subset C$. Пространство X назовем *квазилокально ограниченным*, если в X любое выпуклое множество C квазилокально ограничено в каждой точке $x \in \text{qi } C$.

Как легко видеть, всякое нормированное пространство квазилокально ограничено. Более широкий класс примеров квазилокально ограниченных пространств обеспечивается предложением 5.9.

5.2. Предложение. Если пространство X бесконечномерно и $X' = X^\#$, то любое ограниченное подмножество X обладает пустой квазивнутренностью. В частности, такое пространство X не является квазилокально ограниченным.

\triangleleft Пусть X бесконечномерно, $X' = X^\#$, и пусть S — подмножество X с непустой квазивнутренностью. Можно считать, что $0 \in \text{qi } S$ и тем самым $\text{cl } \mathbb{R}^+ S = X$. Рассмотрим максимальное линейно независимое подмножество $E \subset S$. Тогда $S \subset \text{lin } E$, и множество E бесконечно, так как в противном случае $X = \text{cl } \mathbb{R}^+ S \subset \text{cl } \text{lin } E = \text{lin } E$ вопреки бесконечномерности X . Следовательно, существует неограниченная функция $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, которая продолжается до неограниченного на S функционала $\bar{f} \in X^\# = X'$. \triangleright

5.3. Лемма. Пусть C — выпуклое подмножество X и $x \in \text{qi} C$. Положим $D := \frac{1}{2}(C + x) = \frac{1}{2}(C - x) + x$. Тогда $x \in \text{qi} D$ и $D \subset \text{qi} C$. В частности, если $0 \in \text{qi} C$, то $\frac{1}{2}C \subset \text{qi} C$.

◁ Включение $x \in \text{qi} D$ вытекает из $x \in D$ и $(D - x)^\oplus = \frac{1}{2}(C - x)^\oplus = \{0\}$. Кроме того, благодаря предложению 4.5 для всех $c \in C$ имеют место включения $\frac{1}{2}(c + x) \in [x, c] \subset \text{qi} C$, а значит, $D \subset \text{qi} C$. ▷

5.4. Предложение. Пусть выпуклое множество $C \subset X$ квазилокально ограничено в точке $x \in \text{qi} C$. Тогда

(а) существует ограниченное выпуклое подмножество $B \subset C$ такое, что $x \in \text{qi} B$, $B \subset \text{qi} C$ и $\text{cl} B \subset \text{qi} \text{cl} C$;

(б) если C замкнуто, то существует замкнутое ограниченное выпуклое подмножество $B \subset C$ такое, что $x \in \text{qi} B \subset \text{cl} \text{qi} B = B \subset \text{qi} C$.

◁ Можно считать, что $x = 0$.

(а) Пусть $0 \in \text{qi} B_0$, где B_0 — ограниченное подмножество C . Тогда множество $B := \frac{1}{2} \text{co} B_0$ является искомым. Действительно, включение $0 \in \text{qi} B$ очевидно, а благодаря лемме 5.3 справедливы включения $B \subset \frac{1}{2}C \subset \text{qi} C$ и $\text{cl} B \subset \frac{1}{2} \text{cl} C \subset \text{qi} \text{cl} C$.

(б) Согласно утверждению (а) имеется ограниченное выпуклое подмножество $B_0 \subset C$ такое, что $0 \in \text{qi} B_0$ и $\text{cl} B_0 \subset \text{qi} \text{cl} C = \text{qi} C$. Поскольку $\text{qi} \text{cl} B_0 \neq \emptyset$, в силу предложения 4.7 имеем $\text{cl} \text{qi} \text{cl} B_0 = \text{cl} B_0$ и, следовательно, $0 \in \text{qi} \text{cl} B_0 \subset \text{cl} \text{qi} \text{cl} B_0 = \text{cl} B_0 \subset \text{qi} C$. Таким образом, множество $B := \text{cl} B_0$ является искомым. ▷

5.5. Предложение. Пространство X квазилокально ограничено тогда и только тогда, когда любой плотный клин $W \subset X$ содержит такое ограниченное подмножество $B \subset W$, что $0 \in \text{qi} B$.

◁ В пояснении нуждается лишь достаточность. Пусть C — выпуклое подмножество X и $0 \in \text{qi} C$. Покажем, что $0 \in \text{qi} B$ для некоторого ограниченного подмножества $B \subset C$. По условию плотный клин $\mathbb{R}^+ C$ содержит такое ограниченное подмножество $\bar{B} \subset \mathbb{R}^+ C$, что $0 \in \text{qi} \bar{B}$. Можно считать \bar{B} выпуклым. Тогда пересечение $B := \bar{B} \cap C$ является искомым. Поскольку $\text{cl} \mathbb{R}^+ \bar{B} = X$, для установления требуемого соотношения $\text{cl} \mathbb{R}^+ B = X$ достаточно рассмотреть произвольный элемент $\bar{b} \in \bar{B}$ и заметить, что $\bar{b} \in \mathbb{R}^+ B$. Действительно, из включения $\bar{B} \subset \mathbb{R}^+ C$ следует $\bar{b} = \lambda c$ для некоторых $\lambda \geq 0$ и $c \in C$. Если $\lambda \leq 1$, то $\bar{b} = \lambda c \in [0, c] \subset C$, а значит, $\bar{b} \in \bar{B} \cap C = B$ и, в частности, $\bar{b} \in \mathbb{R}^+ B$. Если же $\lambda > 1$, то $c \in [0, \lambda c] = [0, \bar{b}] \subset \bar{B}$, откуда $c \in \bar{B} \cap C = B$ и тогда вновь $\bar{b} = \lambda c \in \mathbb{R}^+ B$. ▷

5.6. Локально выпуклое пространство назовем *субнормируемым*, если его топология слабее некоторой нормируемой топологии.

Очевидно, всякое нормируемое пространство субнормируемо. Метризуемость, вообще говоря, не влечет субнормируемость. Например, пространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ метризуемо, но не содержит ограниченных поглощающих множеств и поэтому не субнормируемо (см. предложение 5.7).

5.7. Предложение. Следующие свойства локально выпуклого пространства X равносильны:

- (а) X субнормируемо;
- (б) на X существует норма с ограниченным в X шаром;
- (в) в X существует ограниченное поглощающее множество;

- (d) в X существует ограниченное множество с непустым ядром;
 (e) в X существует ограниченный базис Гамеля.

◁ (a)⇒(b). Если B — единичный шар нормы, чья топология сильнее топологии пространства X , то B ограничен в X . Действительно, любая окрестность нуля U в X содержит шар εB для некоторого $\varepsilon > 0$, а значит, $B \subset \frac{1}{\varepsilon}U$.

Импликация (b)⇒(c)⇔(d) тривиальны.

(c)⇒(e). Если B — ограниченное поглощающее множество и E — базис Гамеля, то имеется семейство таких чисел $\lambda_e > 0$, что $\lambda_e e \in B$ для всех $e \in E$, и тогда $\{\lambda_e e : e \in E\}$ — ограниченный базис Гамеля.

(e)⇒(a). Пусть E — ограниченный базис Гамеля в X . Определим на X норму, полагая $\|x\| := \sum_{e \in E} |x_e|$, где x_e — коэффициент при e в разложении x по базису E . Покажем, что топология нормы $\|\cdot\|$ сильнее топологии пространства X . Любая окрестность нуля в X содержит абсолютно выпуклую подокрестность U . Из ограниченности E вытекает включение $E \subset \lambda U$ для некоторого числа $\lambda > 0$. Поскольку единичный шар B нормы $\|\cdot\|$ представляет собой абсолютно выпуклую оболочку множества E , имеем $B \subset \lambda U$. Следовательно, $\frac{1}{\lambda}B \subset U$, а значит, U является окрестностью нуля в топологии нормы $\|\cdot\|$. ▷

5.8. Предложение. *Субнормируемость X равносильна субнормируемости X' .*

◁ Если B — ограниченное поглощающее подмножество X , то согласно следствию 3.9(d),(e) его поляра B° — ограниченное поглощающее подмножество X' . По той же причине существование ограниченного поглощающего множества в X' влечет существование такого множества в X . ▷

5.9. Предложение. *Всякое субнормируемое пространство является квазилокально ограниченным.*

◁ Пусть B — ограниченное поглощающее подмножество X (см. предложение 5.7), и пусть W — плотный клин в X . Тогда $\mathbb{R}^+(W \cap B) = W$, а значит, $\text{cl } \mathbb{R}^+(W \cap B) = X$, т. е. $0 \in \text{qi}(W \cap B)$. Остается сослаться на предложение 5.5. ▷

Заметим, что обратное утверждение не имеет места: например, пространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ квазилокально ограничено (см. теорему 5.10), но не субнормируемо.

5.10. Теорема. *Пространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ является квазилокально ограниченным.*

◁ Используя предложение 5.5, рассмотрим произвольный плотный клин $W \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и покажем, что $0 \in \text{qi } B$ для некоторого ограниченного подмножества $B \subset W$. По теореме 4.13 для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеем $0 \in \text{int } \pi_n W$, а поскольку проекция $\pi_n W$ является клином в \mathbb{R}^n , справедливо равенство $\pi_n W = \mathbb{R}^n$. Следовательно, для всех $n \in \mathbb{N}$ и $m \in \{1, \dots, n\}$ найдутся такие элементы $w_{nm}^+, w_{nm}^- \in W$, что $\pi_n w_{nm}^+ = \pi_n e_m$ и $\pi_n w_{nm}^- = -\pi_n e_m$. Положим

$$B := \text{co} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{w_{n1}^+, \dots, w_{nn}^+, w_{n1}^-, \dots, w_{nn}^-\} \cup \{0\} \right).$$

Очевидно, $B \subset W$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество $\pi_n B$ содержит векторы $\pi_n w_{n1}^\pm = \pm \pi_n e_1, \dots, \pi_n w_{nn}^\pm = \pm \pi_n e_n$, выпуклая оболочка которых является шаром ℓ^1 -нормы в \mathbb{R}^n . Следовательно, $0 \in \text{int } \pi_n B$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и поэтому $0 \in \text{qi } B$ согласно теореме 4.13. Для доказательства ограниченности множества B рассмотрим произвольное число $k \in \mathbb{N}$ и покажем, что числовое множество $B(k) := \{b(k) : b \in B\}$ ограничено. Действительно, для всех $n \geq k$

и $m \in \{1, \dots, n\}$ справедливы соотношения

$$w_{nm}^\pm(k) = (\pi_n w_{nm}^\pm)(k) = (\pm \pi_n e_m)(k) \in \{-1, 0, 1\},$$

а значит, $B(k)$ лежит в выпуклой оболочке конечного множества

$$\bigcup_{n=1}^{k-1} \{w_{n1}^\pm(k), \dots, w_{nn}^\pm(k)\} \cup \{-1, 0, 1\}. \triangleright$$

§ 6. Квазиплотность

В данном параграфе исследована связь между двумя новыми понятиями — квазиплотного подпространства и строго замкнутого конуса. Основными результатами здесь являются теорема 6.11 и ее следствие 6.12, согласно которому строгая замкнутость конусов наследуется топологиями, наведенными квазиплотными подпространствами квазилокально ограниченных пространств.

Всюду в этом параграфе X — хаусдорфово локально выпуклое пространство. Символом $\mathcal{P}_{\text{cbc}}(X)$ условимся обозначать совокупность всех замкнутых ограниченных выпуклых подмножеств X .

6.1. Лемма. Пусть Z — подпространство X . Следующие свойства подмножества $S \subset X$ равносильны:

- (a) если $B \in \mathcal{P}_{\text{cbc}}(X)$ и $\text{qi}(Z \cap B) \neq \emptyset$, то $S \cap B \neq \emptyset$;
- (b) если $B \in \mathcal{P}_{\text{cbc}}(X)$ и $\text{qi}(Z \cap B) \neq \emptyset$, то $S \cap \text{qi} B \neq \emptyset$;
- (c) если $B \in \mathcal{P}_{\text{cbc}}(Z)$ и $\text{qi} B \neq \emptyset$, то $S \cap \text{cl} B \neq \emptyset$;
- (d) если $B \in \mathcal{P}_{\text{cbc}}(Z)$ и $\text{qi} B \neq \emptyset$, то $S \cap \text{qi cl} B \neq \emptyset$,

где операции cl и qi во всех пунктах производятся в пространстве X .

\leftarrow (a) \Rightarrow (b). Пусть $B \in \mathcal{P}_{\text{cbc}}(X)$ и $z \in \text{qi}(Z \cap B)$. Положим $C := \frac{1}{2}(B - z) + z$. Очевидно, $C \in \mathcal{P}_{\text{cbc}}(X)$. Из равенств $Z \cap C - z = \frac{1}{2}(Z \cap B - z)$ и $(Z \cap B - z)^\oplus = \{0\}$ следует, что $(Z \cap C - z)^\oplus = \{0\}$, т.е. $z \in \text{qi}(Z \cap C)$. Тогда $S \cap C \neq \emptyset$ согласно условию (a). Кроме того, $C \subset \text{qi} B$ по лемме 5.3. Следовательно, $S \cap \text{qi} B \neq \emptyset$.

(b) \Rightarrow (d). Пусть $B \in \mathcal{P}_{\text{cbc}}(Z)$ и $\text{qi} B \neq \emptyset$. Ясно, что $\text{cl} B \in \mathcal{P}_{\text{cbc}}(X)$. Включение $Z \cap \text{cl} B \supset B$ влечет $\text{qi}(Z \cap \text{cl} B) \supset \text{qi} B \neq \emptyset$, а значит, $S \cap \text{qi cl} B \neq \emptyset$ согласно условию (b).

Импликация (d) \Rightarrow (c) тривиальна.

(c) \Rightarrow (a). Пусть $B \in \mathcal{P}_{\text{cbc}}(X)$ и $\text{qi}(Z \cap B) \neq \emptyset$. Поскольку $Z \cap B \in \mathcal{P}_{\text{cbc}}(Z)$, условие (c) влечет $S \cap \text{cl}(Z \cap B) \neq \emptyset$. При этом $\text{cl}(Z \cap B) \subset \text{cl} B = B$. \triangleright

6.2. Подмножество $S \subset X$, удовлетворяющее перечисленным в лемме 6.1 равносильным условиям (a)–(d), будем называть *квазиплотным в X относительно Z* . Множество, квазиплотное в X относительно X , назовем *квазиплотным в X* . Таким образом, следующие утверждения равносильны:

- (a) S квазиплотно в X ;
- (b) если $B \in \mathcal{P}_{\text{cbc}}(X)$ и $\text{qi} B \neq \emptyset$, то $S \cap B \neq \emptyset$;
- (c) если $B \in \mathcal{P}_{\text{cbc}}(X)$ и $\text{qi} B \neq \emptyset$, то $S \cap \text{qi} B \neq \emptyset$.

6.3. Предложение. Если в X существует ограниченное множество с непустой квазивнутренностью, то всякое квазиплотное подмножество X плотно в X .

\leftarrow Пусть B — ограниченное подмножество X , имеющее непустую квазивнутренность. Можно считать, что $0 \in \text{qi} B$. Допустим, в X имеется квазиплотное, но не плотное множество S . Тогда найдутся U и u такие, что \bar{U} — замкнутое выпуклое подмножество X , $u \in \text{int} U$ и $U \subset X \setminus S$. Положим $\bar{B} := \text{cl co} B$

и $C := (\overline{B} + u) \cap U$. Ясно, что $C \in \mathcal{P}_{\text{cbc}}(X)$, причем $\text{qi } C \neq \emptyset$. Действительно, поскольку $u \in \overline{B} + u$ и $((\overline{B} + u) - u)^\oplus = \overline{B}^\oplus \subset B^\oplus = \{0\}$, имеем $u \in \text{qi } (\overline{B} + u)$, откуда с учетом предложения 4.8 следует $u \in \text{qi } (\overline{B} + u) \cap \text{int } U = \text{qi } ((\overline{B} + u) \cap U) = \text{qi } C$. Тогда квазиплотность S в X влечет непустоту пересечения $S \cap C$, которая противоречит включениям $C \subset U \subset X \setminus S$. \triangleright

Если же в X все ограниченные множества имеют пустую квазивнутренность (см., например, предложение 5.2), то $\mathcal{P}_{\text{cbc}}(X) = \emptyset$, и тогда в соответствии с определением 6.2 любое подмножество X квазиплотно.

6.4. Следствие. В пространстве $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ все квазиплотные множества являются плотными.

\triangleleft Благодаря предложению 6.3 достаточно заметить, что $\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |x| \leq 1\}$ — ограниченное подмножество $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ с непустой квазивнутренностью (см. предложение 4.9(e)). \triangleright

Обратное утверждение неверно: $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$ служит примером плотного, но не квазиплотного подмножества $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Действительно, множество

$$B := \{s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |s(n) - 1| \leq \frac{1}{2} \text{ для всех } n \in \mathbb{N}\}$$

принадлежит $\mathcal{P}_{\text{cbc}}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, причем $(1, 1, \dots) \in \text{qi } B$, в то время как $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}} \cap B = \emptyset$.

6.5. Псевдобазой (соответственно, *базой*) клина K в X называется такое выпуклое подмножество $B \subset K$, что $0 \notin B$ и для любого ненулевого элемента $x \in K$ существует (соответственно, существует единственное) число $\lambda > 0$, для которого $\lambda x \in B$. Очевидно, всякий клин, имеющий псевдобазу, является конусом. Как известно (см., например, [9, 3.6]), наличие базы у конуса K равносильно существованию строго положительного на $K \setminus \{0\}$ линейного функционала.

6.6. Предложение. Следующие свойства клина $K \subset X$ равносильны:

- (a) $K^\boxplus \neq \emptyset$, т. е. существует такой функционал $f \in X'$, что $f > 0$ на $K \setminus \{0\}$;
- (b) K имеет такую псевдобазу B , что $0 \notin \text{cl } B$;
- (c) K имеет такую базу B , что $0 \notin \text{cl } B$;
- (d) $K \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^+ U$ для некоторого открытого выпуклого множества $U \subset X$ такого, что $0 \notin U$;
- (e) $K \setminus \{0\} \subset \text{int } \overline{K}$ для некоторого конуса $\overline{K} \subset X$.

6.7. Клин $K \subset X$ назовем *строго замкнутым*, если каждый элемент $x \in X \setminus K$ строго отделим от $K \setminus \{0\}$, т. е. существует функционал $f \in X'$ такой, что $f > 0$ на $K \setminus \{0\}$ и $f(x) < 0$.

Очевидно, строго замкнутый клин является конусом. В конечномерном пространстве всякий замкнутый конус строго замкнут. Множества положительных последовательностей $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^+$ и $(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})^+$ служат примерами замкнутых, но не строго замкнутых конусов в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} | \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$ и $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}} | \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$. С другой стороны, в $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}} | \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ все замкнутые конусы строго замкнуты (см. теорему 8.4).

6.8. Предложение. Следующие свойства клина $K \subset X$ равносильны:

- (a) K — строго замкнутый конус;
- (b) K замкнут и $K^\boxplus \neq \emptyset$;
- (c) K замкнут и имеет замкнутую псевдобазу;
- (d) K замкнут и имеет замкнутую базу.

\triangleleft С учетом предложения 6.6 в пояснении нуждается лишь импликация (b) \Rightarrow (a). Пусть K замкнут, $g \in K^\boxplus$ и $x \in X \setminus K$. По теореме о строгой отделимости существует функционал $h \in X'$ такой, что $h \geq 0$ на K и $h(x) < 0$.

Пусть $\lambda > 0$ — такое число, что $\lambda h(x) < -g(x)$. Тогда функционал $f := g + \lambda h$ строго отделяет x от $K \setminus \{0\}$. \triangleright

6.9. Лемма. Если $C \in \mathcal{P}_{\text{cbc}}(X)$, $C \neq \emptyset$ и $0 \notin C$, то \mathbb{R}^+C — замкнутый конус в X .

\triangleleft Множество \mathbb{R}^+C , очевидно, является конусом. Для доказательства его замкнутости рассмотрим сети $\lambda_\alpha \in \mathbb{R}^+$ и $c_\alpha \in C$, предположим, что $\lambda_\alpha c_\alpha \rightarrow x \in X$, и установим включение $x \in \mathbb{R}^+C$. Можно считать, что $x \neq 0$. Поскольку множество C замкнуто и не содержит 0, по теореме о строгой отделимости существует такой функционал $f \in X'$, что $f \geq 1$ на C . Из ограниченности C вытекает ограниченность сети $f(c_\alpha)$. Переходя к подсети, можно считать, что $f(c_\alpha) \rightarrow \mu$ для некоторого числа $\mu \geq 1$. Положим $\lambda := \frac{f(x)}{\mu}$. Соотношения $\frac{1}{f(c_\alpha)} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ и $f(\lambda_\alpha c_\alpha) \rightarrow f(x)$ влекут $\lambda_\alpha = \frac{1}{f(c_\alpha)} f(\lambda_\alpha c_\alpha) \rightarrow \frac{1}{\mu} f(x) = \lambda$. Так как C ограничено и $\lambda_\alpha c_\alpha \rightarrow x \neq 0$, сеть λ_α не может сходиться к нулю, а значит, $\lambda > 0$. Будем считать, что $\lambda_\alpha > 0$ для всех α . Поскольку $\frac{1}{\lambda_\alpha} \rightarrow \frac{1}{\lambda}$ и $\lambda_\alpha c_\alpha \rightarrow x$, имеем $c_\alpha = \frac{1}{\lambda_\alpha} \lambda_\alpha c_\alpha \rightarrow \frac{1}{\lambda} x$. Привлекая замкнутость C , заключаем, что $\frac{1}{\lambda} x \in C$, и, следовательно, $x \in \mathbb{R}^+C$. \triangleright

6.10. Лемма. Пусть Y и Z — плотные подпространства X' , $B \in \mathcal{P}_{\text{cbc}}(X')$, $\text{qi cl}(Z \cap B) \neq \emptyset$, $Y \cap B = \emptyset$. Тогда $(Z \cap B)^\oplus \subset X$ — конус, строго замкнутый в $X|Z$ и плотный (в частности, не замкнутый) в $X|Y$.

\triangleleft По условию для множеств $C := Z \cap B$ и $D := \text{cl} C$ справедливы соотношения $D \in \mathcal{P}_{\text{cbc}}(X')$, $0 \notin D \subset B$, $\text{qi} D \neq \emptyset$. Из леммы 6.9 следует, что \mathbb{R}^+D — замкнутый конус в X' . Положим $K := C^\oplus = D^\oplus = (\mathbb{R}^+D)^\oplus$. Благодаря теореме 3.11 имеем $K^\oplus = (\mathbb{R}^+D)^{\oplus\oplus} = \mathbb{R}^+D$. Поскольку $C \subset Z$, клин $K = C^\oplus$ замкнут в $X|Z$. Кроме того, согласно предложению 4.12(a) выполняются включения $Z \cap K^\oplus \supset Z \cap \text{qi} K^\oplus \supset Z \cap \text{qi} D = \text{qi} D \neq \emptyset$, а значит, K — строго замкнутый конус в $X|Z$ (см. предложение 6.8(b)). Из условия $Y \cap B = \emptyset$ следует $Y \cap K^\oplus = Y \cap \mathbb{R}^+D \subset Y \cap \mathbb{R}^+B = \{0\}$. Привлекая предложение 4.4, заключаем, что $0 \in \text{qi}_{X|Y} K$, т. е. $\text{cl}_{X|Y} K = X$. \triangleright

6.11. Теорема. Пусть Y и Z — плотные подпространства X' . Рассмотрим следующие условия:

- (a) всякий строго замкнутый конус в $X|Z$ строго замкнут в $X|Y$;
- (b) всякий строго замкнутый конус в $X|Z$ замкнут в $X|Y$;
- (c) Y квазиплотно в X' относительно Z .

Тогда справедливы импликации (a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c), а если пространство Z квазилокально ограничено, то условия (a)–(c) равносильны.

\triangleleft Импликация (a) \Rightarrow (b) тривиальна, а (b) \Rightarrow (c) сразу следует из леммы 6.10 с учетом леммы 6.1(a). Предположим, что пространство Z квазилокально ограничено, и установим импликацию (c) \Rightarrow (a).

Пусть Y квазиплотно в X' относительно Z , и пусть K — строго замкнутый конус в $X|Z$. Для доказательства строгой замкнутости K в $X|Y$ рассмотрим произвольный элемент $x \in X \setminus K$ и установим существование такого функционала $y \in Y$, что $y > 0$ на $K \setminus \{0\}$ и $y(x) < 0$. В терминах поляры K^\oplus и открытого полупространства $H_0 := \{f \in X' : f(x) < 0\}$ текущая цель формулируется следующим образом:

$$Y \cap K^\oplus \cap H_0 \neq \emptyset. \quad (4)$$

Благодаря строгой замкнутости K в $X|Z$ имеем $Z \cap K^\oplus \cap H_0 \neq \emptyset$, что согласно предложению 4.12(b) означает наличие элемента $z \in \text{qi}(Z \cap K^\oplus) \cap H_0$

(см. п. 4.2). В силу квазилокальной ограниченности Z найдется такое множество $B \in \mathcal{P}_{\text{cbc}}(Z)$, что $z \in \text{qi} B$ и $B \subset Z \cap K^\oplus$ (см. предложение 5.4(b)). Положим $C := \text{cl} B \cap H$, где $H := \{f \in X' : f(x) \leq 0\}$. Ясно, что $C \in \mathcal{P}_{\text{cbc}}(X')$. Кроме того, поскольку $\text{int} H = H_0 \neq \emptyset$, согласно предложению 4.8 имеем $z \in \text{qi} B \cap H_0 = \text{qi}(B \cap H) = \text{qi}(Z \cap B \cap H) \subset \text{qi}(Z \cap C)$. Привлекая квазиплотность Y в X' относительно Z , заключаем, что $Y \cap \text{qi} C \neq \emptyset$. Вновь используя предложение 4.8, имеем $\text{qi} C = \text{qi}(\text{cl} B \cap H) = \text{qi} \text{cl} B \cap H_0 \subset H_0$, а значит, $Y \cap \text{qi} C \cap H_0 \neq \emptyset$. Для обоснования соотношения (4) осталось заметить, что $\text{qi} C \subset \text{qi} \text{cl} B \subset \text{qi} \text{cl} K^\oplus = \text{qi} K^\oplus \subset K^\boxplus$. \triangleright

6.12. Следствие. Пусть Y — плотное подпространство X' , и пусть пространство X' квазилокально ограничено. Тогда следующие утверждения равносильны:

- (а) всякий строго замкнутый конус в X строго замкнут в $X|Y$;
- (б) всякий строго замкнутый конус в X замкнут в $X|Y$;
- (с) Y квазиплотно в X' .

Если вопреки условию (с) существует такое множество $B \in \mathcal{P}_{\text{cbc}}(X')$, что $\text{qi} B \neq \emptyset$ и $Y \cap B = \emptyset$, то B^\oplus служит примером строго замкнутого конуса в X , не замкнутого (более того, плотного) в $X|Y$.

§ 7. Проективные множества

Пространство $\mathbb{R}_{\text{fn}}^{\mathbb{N}}$, снабженное сильнейшей локально выпуклой топологией, является прямым пределом (копределом) $\varinjlim \mathbb{R}^n$ последовательности $(\mathbb{R}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ в категории локально выпуклых пространств относительно вложений $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m \times \{(0, \dots, 0)\} \subset \mathbb{R}^m$ ($n \leq m$) и совпадает со строгим индуктивным пределом последовательности подпространств $\mathbb{R}_{\text{fn}}^{\mathbb{N}} = \text{lin} \{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathbb{R}_{\text{fn}}^{\mathbb{N}}$ (см. [4, 13-3-3; 10, 19.4]). Соответствующее двойственное пространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} | \mathbb{R}_{\text{fn}}^{\mathbb{N}}$ представляет собой обратный предел $\varprojlim \mathbb{R}^n$ в той же категории относительно проекций $(x \mapsto \pi_n x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($m \geq n$) и совпадает с топологическим проективным пределом последовательности локально выпуклых пространств \mathbb{R}^n относительно проекций $\pi_n : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ (см. [10, 19.8]).

Приведенные выше соображения служат идейной предпосылкой для введения понятий проективного множества, проективной последовательности и проективного предела, исследованию которых посвящен этот параграф. Основной целью являются связи перечисленных понятий с понятием квазивнутренности.

Как и прежде, пространства $\mathbb{R}_{\text{fn}}^{\mathbb{N}}$ и $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ наделяются естественной двойственностью и снабжаются соответствующими слабыми топологиями (см. п. 3.4).

7.1. Пусть $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность подмножеств $S_n \subset \mathbb{R}^n$. Последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ назовем *цепью* в $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, если $x_n \in S_n$ и $x_n = \pi_n x_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В этом случае *объединение цепи* $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} x_n$ представляет собой такой элемент $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, что $\pi_n s = x_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Лемма. Следующие свойства множества $S \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ равносильны:

- (а) если $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и $\pi_n s \in \pi_n S$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $s \in S$;
- (б) если $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — цепь в $(\pi_n S)_{n \in \mathbb{N}}$, то $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} x_n \in S$;
- (с) S замкнуто в $\mathbb{R}_{\text{D}}^{\mathbb{N}}$.

Множество $S \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, обладающее равносильными свойствами (а)–(с), будем называть *проективным*. Примерами проективных множеств служат произвольные декартовы произведения $\prod_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n$, где $\Lambda_n \subset \mathbb{R}$. Кроме того, любое замкнутое подмножество $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ замкнуто также в $\mathbb{R}_{\text{D}}^{\mathbb{N}}$ и поэтому является проективным.

7.2. Из леммы 7.1 следует, что для любого $S \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ следующие множества совпадают:

- (a) $\{\bar{s} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \pi_n \bar{s} \in \pi_n S \text{ для всех } n \in \mathbb{N}\}$;
- (b) $\left\{ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} x_n : (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ — цепь в } (\pi_n S)_{n \in \mathbb{N}} \right\}$;
- (c) наибольшее подмножество $\bar{S} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ такое, что $\pi_n \bar{S} = \pi_n S$ для всех $n \in \mathbb{N}$;
- (d) проективное подмножество $\bar{S} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ такое, что $\pi_n \bar{S} = \pi_n S$ для всех $n \in \mathbb{N}$;
- (e) наименьшее проективное подмножество $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, содержащее S ;
- (f) замыкание S в топологическом пространстве $\mathbb{R}_D^{\mathbb{N}}$.

Множество, описываемое любым из эквивалентных способов (a)–(f), будем называть *проективным замыканием* множества S .

7.3. Лемма. Следующие свойства последовательности множеств $S_n \subset \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) равносильны:

- (a) существует такое множество $S \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, что $S_n = \pi_n S$ для всех $n \in \mathbb{N}$;
- (b) $S_n = \pi_n S_m$ при $n \leq m$;
- (c) $S_n = \pi_n S_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

При этом множество

$$\begin{aligned} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \pi_n^{-1}(S_n) &= \{s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \pi_n s \in S_n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}\} \\ &= \left\{ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} x_n : (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ — цепь в } (S_n)_{n \in \mathbb{N}} \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

представляет собой наибольшее среди множеств S , удовлетворяющих условию пункта (a), является единственным проективным среди таких множеств и совпадает с проективным замыканием любого из них.

Последовательность $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, удовлетворяющую условиям последней леммы, будем называть *проективной последовательностью*, а множество (5) будем обозначать символом $\varprojlim (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ или, менее громоздко, $\varprojlim S_n$, и называть *проективным пределом* последовательности $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Равенство $S = \varprojlim S_n$ будем иногда прочитывать так: S является проективным пределом множеств S_n .

Таким образом, для любой проективной последовательности $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и любого множества $S \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ имеют место следующие соотношения:

$$\varprojlim S_n = \{s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \pi_n s \in S_n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}\}; \quad (6)$$

$$S = \varprojlim S_n \Leftrightarrow S \text{ проективно и } \pi_n S = S_n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}; \quad (7)$$

$$S \text{ проективно} \Leftrightarrow S = \varprojlim \pi_n S. \quad (8)$$

7.4. Лемма. Если $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — проективная последовательность выпуклых множеств с непустыми внутренностями, то $(\text{int } C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — проективная последовательность и $\varprojlim \text{int } C_n = \text{qi } \varprojlim C_n$.

◁ Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и покажем, что $\text{int } C_n = \pi_n(\text{int } C_{n+1})$.

Включение $\text{int } C_n \supset \pi_n(\text{int } C_{n+1})$ очевидно: если $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\varepsilon > 0$ и шар равномерной нормы $B(x, \varepsilon)$ содержится в C_{n+1} , то $B(\pi_n x, \varepsilon) = \pi_n(B(x, \varepsilon)) \subset \pi_n C_{n+1} = C_n$.

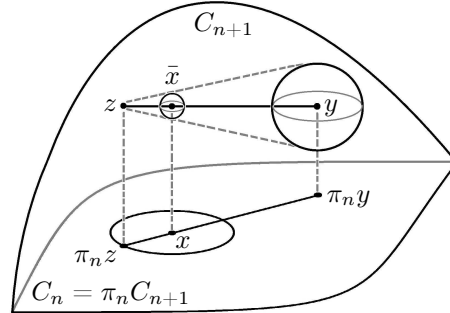


Рис. 1

Пусть теперь $x \in \text{int } C_n$ (см. рис. 1). Покажем, что $x = \pi_n \bar{x}$ для некоторого элемента $\bar{x} \in \text{int } C_{n+1}$. Рассмотрим произвольный элемент $y \in \text{int } C_{n+1}$. Если $\pi_n y = x$, то доказывать нечего. Пусть $\pi_n y \neq x$. Поскольку $x \in \text{int } C_n$, имеется такое число $\lambda > 0$, что $x + \lambda(x - \pi_n y) \in C_n$. Благодаря равенству $C_n = \pi_n C_{n+1}$ существует элемент $z \in C_{n+1}$, для которого $x + \lambda(x - \pi_n y) = \pi_n z$. Положим $\bar{x} := \frac{\lambda}{\lambda+1}y + \frac{1}{\lambda+1}z$. Из включения $y \in \text{int } C_{n+1}$ следует, что $\bar{x} \in [y, z] \subset \text{int } C_{n+1}$. Кроме того,

$$\pi_n \bar{x} = \frac{\lambda}{\lambda+1} \pi_n y + \frac{1}{\lambda+1} \pi_n z = \frac{\lambda}{\lambda+1} \pi_n y + \frac{1}{\lambda+1} (x + \lambda(x - \pi_n y)) = x.$$

Равенство $\varprojlim \text{int } C_n = \text{qi } \varprojlim C_n$ вытекает из соотношения (6) и теоремы 4.13, так как для всех $s \in \mathbb{R}^N$

$$s \in \varprojlim \text{int } C_n \Leftrightarrow s \in \varprojlim C_n \text{ и } \pi_n s \in \text{int } C_n \text{ для всех } n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow s \in \text{qi } \varprojlim C_n. \triangleright$$

7.5. В формулировке леммы 7.4 и выпуклость, и непустота внутренностей являются существенными требованиями.

Например, если $S_1 = [0, 2]$, $S_2 = [0, 1]^2 \cup ([1, 2] \times \{0\})$ и $S_n = S_2 \times \mathbb{R}^{n-2}$ при $n > 2$, то $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — проективная последовательность и $\text{int } S_n \neq \emptyset$ для всех $n \in \mathbb{N}$, но последовательность $(\text{int } S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ не проективна, поскольку $\text{int } S_1 =]0, 2[$, в то время как $\pi_1(\text{int } S_2) = \pi_1([0, 1]^2) =]0, 1[$.

Если же $S_1 = [0, 1]$ и $S_n = [0, 1] \times \{(0, \dots, 0)\}$ при $n > 1$, то $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — проективная последовательность и все множества S_n выпуклы, но последовательность $(\text{int } S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ вновь не проективна, так как $\text{int } S_1 =]0, 1[$, а $\pi_1(\text{int } S_2) = \emptyset$.

7.6. Приведенное ниже утверждение вытекает из теоремы 4.13, леммы 7.4 и соотношения (8).

Следствие. Если C — проективное выпуклое подмножество \mathbb{R}^N , то множество $\text{qi } C$ проективно. Если, кроме того, $\text{qi } C \neq \emptyset$, то $(\text{int } \pi_n C)_{n \in \mathbb{N}}$ — проективная последовательность, $\text{qi } C = \varprojlim \text{int } \pi_n C$ и, в частности, $\pi_n \text{qi } C = \text{qi } \pi_n C = \text{int } \pi_n C$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

7.7. Какое-либо свойство P подмножеств локально выпуклого пространства назовем *проективно инвариантным*, если для любого проективного множества $S \subset \mathbb{R}^N$ верно следующее: S обладает свойством P тогда и только тогда, когда $\pi_n S$ обладают свойством P для всех $n \in \mathbb{N}$, т. е. когда S является проективным пределом множеств, обладающих свойством P .

Предложение. Следующие свойства проективно инвариантны:

- (a) непустота;
- (b) выпуклость;
- (c) ограниченность;
- (d) компактность (замкнутость и ограниченность);
- (e) выпуклость и квазиоткрытость;
- (f) выпуклость и непустота квазивнутренности.

◁ Проективная инвариантность свойств (a) и (c) очевидна. Проективная инвариантность (b) и (d) обеспечивается линейностью и непрерывностью отображений $\pi_n: \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ и представлением $S = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \pi_n^{-1}(\pi_n S)$, см. (5). Проективная инвариантность (e) и (f) вытекает из теоремы 4.13 и леммы 7.4. ▷

Как легко видеть, проективный предел замкнутых множеств замкнут. Тем не менее замкнутость не является проективно инвариантным свойством даже при дополнительном требовании выпуклости. Например, выпуклое множество

$$S = \{s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : s(1) > 0, s(1) \cdot s(2) \geq 1\}$$

замкнуто (и поэтому проективно), но проекция $\pi_1 S =]0, \infty[$ не замкнута.

7.8. Подмножество $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, имеющее вид $\prod_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n$, где Λ_n — открытые подмножества \mathbb{R} , называется *открытой коробкой*. Топология на $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, для которой открытые коробки служат базовыми открытыми множествами, называется *коробочной топологией*. Как легко видеть, для любого элемента $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ выпуклые открытые коробки

$$\prod_{n \in \mathbb{N}}]s(n) - \varepsilon_n, s(n) + \varepsilon_n[, \quad \varepsilon_n > 0, \tag{9}$$

образуют базу окрестностей точки s в коробочной топологии.

Предложение. (a) Всякая выпуклая открытая коробка в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ служит примером проективного квазиоткрытого множества. Более того, все подмножества $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, открытые в коробочной топологии, квазиоткрыты.

(b) Утверждение, обратное (a), не имеет места. Например, проективное выпуклое множество

$$C := \{s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |s(1) - s(n)| < \frac{1}{n}\}$$

квазиоткрыто, но $\text{int } C = \emptyset$ в коробочной топологии.

◁ (a) Первое утверждение следует из предложения 7.7(e), а второе вытекает из первого, так как любая коробочная окрестность содержит подокрестность вида (9).

(b) Проективность множества C очевидна. Его выпуклость и квазиоткрытость вытекают из предложения 7.7(e), так как проекции $\pi_n C$ — выпуклые открытые подмножества \mathbb{R}^n . Равенство $\text{int } C = \emptyset$ в коробочной топологии обусловлено тем фактом, что все элементы $c \in C$ удовлетворяют условию $\lim_{n \rightarrow \infty} c(n) = c(1)$, в то время как в любой непустой открытой коробке, очевидно, имеется последовательность, нарушающая это условие. ▷

§ 8. Критерий замкнутости архимедовых конусов

В этом параграфе после характеристики архимедовых конусов в $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$ (теорема 8.4) полученные ранее вспомогательные результаты применяются для решения целевой задачи — описания класса подпространств $Y \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, обеспечивающих замкнутость всех архимедовых конусов в $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}|Y$. Основным результатом является теорема 8.5, согласно которой искомый класс составляют квазиплотные подпространства. Предложения 8.8 и 8.9 описывают этот класс, предлагая ряд необходимых и достаточных условий для квазиплотности подмножества $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

В качестве следствия дано исчерпывающее описание локально выпуклых пространств, в которых все архимедовы конусы замкнуты (теорема 8.6). Кроме того, получены ответы на вопросы, связанные с так называемыми «тонкими» пространствами — плотными подпространствами $Y \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, для которых в $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}|Y$ существуют незамкнутые архимедовы конусы. А именно, следствие 8.10 подтверждает выдвинутую в [3] гипотезу о том, что пространство $\text{lin } \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ не является тонким, и в частности, дает отрицательный ответ на поставленный в [3] и [5] вопрос о тонкости всех собственных подпространств $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Кроме того, с помощью теоремы 8.5 удается предложить короткое обоснование результата работы [5] о существовании тонкого гиперпространства (следствие 8.11).

8.1. Последовательность подмножеств $S_n \subset \mathbb{R}_n^{\mathbb{N}}$ ($n \in \mathbb{N}$) назовем *индуктивной*, если она обладает любым из следующих равносильных свойств:

- (а) существует такое множество $S \subset \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$, что $S_n = S \cap \mathbb{R}_n^{\mathbb{N}}$ для всех $n \in \mathbb{N}$;
- (б) $S_n = S_m \cap \mathbb{R}_n^{\mathbb{N}}$ при $n \leq m$;
- (в) $S_n = S_{n+1} \cap \mathbb{R}_n^{\mathbb{N}}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

При этом множество S , удовлетворяющее условию (а), единственно и равно объединению $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$.

8.2. Лемма [11, 3.3]. Пусть K — замкнутый локально квазикompактный конус в локально выпуклом пространстве X , X_0 — замкнутое подпространство X , и пусть $f_0 \in X'_0$. Если $f_0 \in (K \cap X_0)^{\text{fin}}$, то f_0 допускает продолжение на X до функционала $f \in K^{\text{fin}}$.

8.3. Лемма. Если $K_n \subset \mathbb{R}_n^{\mathbb{N}}$ ($n \in \mathbb{N}$) — индуктивная последовательность замкнутых конусов, то $(\pi_n K_n)^{\text{fin}}$ ($n \in \mathbb{N}$) — проективная последовательность и

$$\varprojlim (\pi_n K_n)^{\text{fin}} = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n \right)^{\text{fin}}. \quad (10)$$

◁ Рассмотрим $n \in \mathbb{N}$ и установим включение $(\pi_n K_n)^{\text{fin}} \subset \pi_n(\pi_{n+1} K_{n+1})^{\text{fin}}$. (Проверка обратного включения и равенства (10) не составляет труда.) Пусть $y \in (\pi_n K_n)^{\text{fin}}$. Положим $X := \mathbb{R}^{n+1}$, $X_0 := \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset X$ и $K := \pi_{n+1} K_{n+1}$. Тогда K — замкнутый конус в X и $\hat{y} \circ \pi_n \in (\pi_n K_n \times \{0\})^{\text{fin}} = (K \cap X_0)^{\text{fin}}$. По лемме 8.2 имеется такой элемент $z \in K^{\text{fin}}$, что $\hat{z} = \hat{y} \circ \pi_n$ на X_0 . В этом случае $y = \pi_n z$ и, следовательно, $y \in \pi_n(\pi_{n+1} K_{n+1})^{\text{fin}}$. ▷

8.4. Теорема. Следующие свойства множества $K \subset \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$ равносильны:

- (а) K — архимедов конус;
- (б) K — замкнутый конус;
- (в) K — строго замкнутый конус;
- (д) $K \cap \mathbb{R}_n^{\mathbb{N}}$ — замкнутый конус в $\mathbb{R}_n^{\mathbb{N}}$ для всех $n \in \mathbb{N}$;

(е) $K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ для некоторой индуктивной последовательности замкнутых конусов $K_n \subset \mathbb{R}^n$.

◁ Импликации (с)⇒(b)⇒(a)⇒(d)⇒(е) очевидны (см. предложение 2.3(f)). Покажем (е)⇒(с). В рамках условия (е) объединение $K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$, очевидно, является архимедовым конусом. Как известно, сильнейшая локально выпуклая топология τ на $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$ секвенциальна (см. [4, упр. 12-3-113]). С учетом предложения 2.3(h) отсюда следует, что архимедов конус K замкнут в топологии τ , а значит, и в слабой топологии $\sigma(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}} | \mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. Далее, конусы $\pi_n K_n$ замкнуты в конечномерных пространствах \mathbb{R}^n и поэтому строго замкнуты. Из предложения 6.8 следует, что $(\pi_n K_n)^{\text{th}} \neq \emptyset$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Привлекая лемму 8.3, заключаем, что $K^{\text{th}} = \varprojlim (\pi_n K_n)^{\text{th}} \neq \emptyset$. ▷

8.5. Приведенный ниже критерий содержит решение задачи, которой посвящена эта статья.

Теорема. Следующие свойства плотного подпространства $Y \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ равносильны:

- (а) в $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}} | Y$ все архимедовы конусы замкнуты;
- (b) в $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}} | Y$ все архимедовы конусы строго замкнуты;
- (с) Y квазиплотно в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Если вопреки условию (с) существует такое компактное выпуклое множество $C \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, что $\text{qi } C \neq \emptyset$ и $Y \cap C = \emptyset$ (см. предложение 8.8(b)), то C^{\oplus} служит примером архимедова, но не замкнутого (более того, плотного) конуса в $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}} | Y$.

◁ Согласно теореме 5.10 двойственное к $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$ пространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ квазилокально ограничено. Кроме того, по теореме 8.4 в $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$ совпадают классы строго замкнутых и архимедовых конусов. Остается воспользоваться следствием 6.12 с $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$ в роли X . ▷

8.6. Теперь благодаря теоремам 2.5 и 8.5 появилась возможность дать исчерпывающее описание пространств, в которых все архимедовы конусы замкнуты.

Теорема. В хаусдорфовом локально выпуклом пространстве X все архимедовы конусы замкнуты тогда и только тогда, когда X имеет конечную или счетную размерность и сопряженное пространство X' квазиплотно в $X^{\#}$ относительно слабой* топологии.

8.7. Лемма. Пусть C — проективное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, и пусть $x \in \text{qi } C$. Положим $D := \frac{1}{2}(C + x)$. Тогда $x \in \text{qi } D$ и $\text{cl } D \subset \text{qi } C$.

◁ Можно считать, что $x = 0$. Включение $0 \in \text{qi } \frac{1}{2}C$ очевидно. Поскольку $\text{qi } C = \varprojlim \text{int } \pi_n C$ (см. следствие 7.6), для доказательства включения $\text{cl } \frac{1}{2}C \subset \text{qi } C$ достаточно фиксировать $n \in \mathbb{N}$ и показать, что $\pi_n \text{cl } \frac{1}{2}C \subset \text{int } \pi_n C$. Согласно теореме 4.13 из $0 \in \text{qi } C$ вытекает $0 \in \text{int } \pi_n C$. Следовательно, $\text{cl } \frac{1}{2}\pi_n C \subset \text{int } \pi_n C$ (см., например, [1, 7.1.1(1)]). Остается заметить, что благодаря непрерывности линейного оператора $\pi_n : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ справедливо включение $\pi_n \text{cl } \frac{1}{2}C \subset \text{cl } \frac{1}{2}\pi_n C$. ▷

8.8. Предложение. Следующие свойства множества $S \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ равносильны:

- (а) S квазиплотно в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$;
- (b) если C — компактное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и $\text{qi } C \neq \emptyset$, то $S \cap C \neq \emptyset$;
- (с) если B — непустое проективное ограниченное квазиоткрытое выпуклое подмножество $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, то $S \cap B \neq \emptyset$;

(d) если $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — проективная последовательность непустых ограниченных открытых выпуклых множеств, то $S \cap \varprojlim B_n \neq \emptyset$;

(e) если C — проективное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и $\text{qi } C \neq \emptyset$, то $S \cap C \neq \emptyset$.

◁ С учетом критерия компактности в пространстве $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (см. п. 3.4) эквивалентность (a) \Leftrightarrow (b) справедлива непосредственно по определению 6.2 (b).

(b) \Rightarrow (c). Пусть $B \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ обладает свойствами, перечисленными в условии (c), и пусть $b \in B$. Положим $C := \text{cl } \frac{1}{2}(B + b)$. По лемме 8.7 имеем $\text{qi } C \neq \emptyset$ и $C \subset B$. Поскольку C компактно (см. п. 3.4), из условия (b) следует $S \cap C \neq \emptyset$ и, в частности, $S \cap B \neq \emptyset$.

Эквивалентность (c) \Leftrightarrow (d) обеспечивается проективной инвариантностью комбинации перечисленных в условии (c) свойств проективного множества B (см. предложение 7.7).

(c) \Rightarrow (e). Пусть C — проективное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и $\text{qi } C \neq \emptyset$. По лемме 8.7 имеется такое замкнутое выпуклое множество $D \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, что $\text{qi } D \neq \emptyset$ и $D \subset C$. Далее, благодаря теореме 5.10 и предложению 5.4 (b) существует компактное выпуклое подмножество $B \subset D$, для которого $\text{qi } B \neq \emptyset$. Будучи замкнутым, множество B проективно, а значит, согласно следствию 7.6 множество $\text{qi } B$ также является проективным. Кроме того, $\text{qi } B$ квазиоткрыто (см. предложение 4.10). Тогда из условия (c) следует $S \cap B \neq \emptyset$, откуда в силу включений $B \subset D \subset C$ вытекает $S \cap C \neq \emptyset$.

Импликация (e) \Rightarrow (b) очевидна, так как компактность влечет замкнутость, а замкнутость влечет проективность. ▷

8.9. Предложение. В каждом из перечисленных ниже случаев множество $S \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ является квазиплотным:

(a) S содержит $\Lambda^{\mathbb{N}}$, где Λ — плотное подмножество \mathbb{R} ;

(b) S содержит $\prod_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n$, где Λ_n — плотные подмножества \mathbb{R} ;

(c) S содержит проективное подмножество P , удовлетворяющее следующим условиям:

$$\text{cl } \{p(1) : p \in P\} = \mathbb{R}; \tag{11}$$

$$\text{cl } \{p(n+1) : p \in P, \pi_n p = x\} = \mathbb{R} \text{ для всех } n \in \mathbb{N} \text{ и } x \in \pi_n P. \tag{12}$$

◁ Условия (a) и (b) являются частными случаями (c), а для условия (c) легко проверяется критерий 8.8 (d). Действительно, пусть $P \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ удовлетворяет соотношениям (11) и (12), и пусть $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — проективная последовательность непустых открытых выпуклых множеств. Рекурсией по $n \in \mathbb{N}$ построим последовательность элементов $b_n \in B_n \cap \pi_n P$ следующим образом. Согласно (11) существует элемент $b_1 \in B_1 \cap \pi_1 P$. Пусть определен элемент $b_n \in B_n \cap \pi_n P$. Поскольку $B_n = \pi_n B_{n+1}$, имеется такое число $\lambda \in \mathbb{R}$, что $(b_n(1), \dots, b_n(n), \lambda) \in B_{n+1}$. Благодаря открытости B_{n+1} существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $(b_n(1), \dots, b_n(n), \mu) \in B_{n+1}$ для всех $\mu \in]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[$. Из (12) вытекает наличие элемента $p \in P$, удовлетворяющего условиям $\pi_n p = b_n$ и $p(n+1) \in]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[$. Положим $b_{n+1} := \pi_{n+1} p$. Тогда $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — цепь и в $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$, и в $(\pi_n P)_{n \in \mathbb{N}}$, а значит, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} b_n$ принадлежит и $\varprojlim B_n$, и P . ▷

8.10. В работе [3] плотные подпространства $Y \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, для которых в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}|_Y$ существуют незамкнутые архимедовы конусы, названы *тонкими*. (Благодаря теореме 8.5 теперь известно, что тонкие пространства — это в точности плотные

подпространства, не являющиеся квазиплотными.) Следующий факт подтверждает гипотезу [3, 4.9], а также дает (отрицательный) ответ на поставленный в [3] и [5] вопрос о том, все ли собственные подпространства $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ являются тонкими.

Следствие. В пространствах $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}} \mid \text{lin } \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ и $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}} \mid \text{lin } \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ все архимедовы конусы замкнуты.

◁ Пространство $\text{lin } \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, очевидно, обладает свойством 8.9(a). Этим же свойством обладает и $\text{lin } \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Действительно, по теореме Кронекера множество $\Lambda := \{m\sqrt{2} + n : m, n \in \mathbb{Z}\}$ плотно в \mathbb{R} . Остается заметить, что

$$\begin{aligned} \text{lin } \mathbb{N}^{\mathbb{N}} &= \text{lin } (\mathbb{N}^{\mathbb{N}} - \mathbb{N}^{\mathbb{N}}) = \text{lin } (\mathbb{N} - \mathbb{N})^{\mathbb{N}} \\ &= \text{lin } \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \supset \sqrt{2} \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} + \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} = (\sqrt{2} \mathbb{Z} + \mathbb{Z})^{\mathbb{N}} = \Lambda^{\mathbb{N}}. \quad \triangleright \end{aligned}$$

8.11. Теорема 8.5 позволяет получить короткое подтверждение основного результата работы [5].

Следствие. Если $L \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^{\#}$ и $L(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(n)$ для сходящихся последовательностей $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, то в пространстве $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}} \mid \ker L$ существует незамкнутый архимедов конус.

◁ Положим $C := \prod_{n \in \mathbb{N}} [1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}]$. Тогда $\ker L \cap C = \emptyset$, а значит, согласно теореме 8.5 и предложениям 7.8 и 8.8 в пространстве $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}} \mid \ker L$ существует незамкнутый архимедов конус, причем C^{\oplus} служит примером такого конуса. ▷

§ 9. Открытые вопросы

В завершение сформулируем несколько естественных вопросов, на данный момент остающихся открытыми.

9.1. Квазилокальная ограниченность. В параграфе 5 предпринято лишь начальное изучение понятия квазилокальной ограниченности. В рамках более детального исследования было бы уместно прояснить взаимосвязи между следующими свойствами хаусдорфова локально выпуклого пространства X и, в частности, выяснить, какие из них равносильны:

- (a) X квазилокально ограничено;
- (b) всякое выпуклое подмножество X с непустой квазивнутренностью содержит ограниченное подмножество с непустой квазивнутренностью;
- (c) в X существует ограниченное множество с непустой квазивнутренностью;
- (d) в X существует плотное субнормируемое подпространство;
- (e) для любого плотного клина $W \subset X$ существует субнормируемое подпространство $Z \subset X$ такое, что $Z \cap W$ плотно в X ;
- (f) всякое плотное подпространство X содержит плотное субнормируемое подпространство.

Перечислим импликации, представляющиеся очевидными: (a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Leftrightarrow (d), (e) \Rightarrow (f) \Rightarrow (d), (e) \Rightarrow (a).

9.2. Пределы квазилокально ограниченных пространств. Пространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$ представляет собой обратный предел $\varprojlim \mathbb{R}^n$ последовательности $(\mathbb{R}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ в категории локально выпуклых пространств относительно естественных проекций $\pi_n : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\pi_{nm} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n \leq m$). Анализ доказательств теорем 4.13 и 5.10 позволяет выдвинуть гипотезу о том, что утверждения этих теорем допускают обобщение на случай произвольных обратных пределов.

А именно, пусть $(X, (\pi_i)_{i \in I})$ — обратный предел сети $(X_i)_{i \in I}$ локально выпуклых пространств. Если C — выпуклое подмножество X , имеет ли место равенство

$$\text{qi } C = \{c \in C : \pi_i c \in \text{qi } \pi_i C \text{ в } X_i \text{ для всех } i \in I\}?$$

Если пространства X_i квазилокально ограничены, обладает ли этим же свойством их обратный предел $\varprojlim X_i$?

9.3. ЗАМКНУТЫЕ ТОТАЛЬНЫЕ КЛИНЬЯ. Теорема 6.11 и ее следствие 6.12 предлагают критерии наследования строгой замкнутости конусов в пространстве, сопряженное к которому квазилокально ограничено. Из доказательства теоремы 6.11 видно, что доказываемое утверждение останется справедливым, если в его формулировке ослабить условие квазилокальной ограниченности пространства до требования квазилокальной ограниченности клиньев вида K^\oplus в их квазивнутренних точках, где K — замкнутый конус в сопряженном пространстве. Приведенное ниже описание таких клиньев вытекает из [2, 2.13].

Подмножество S хаусдорфова локально выпуклого пространства X называют *тотальным*, если $\text{cl lin } S = X$ (см. [4, 2-3-12]).

Предложение. Следующие свойства множества $W \subset X$ равносильны:

- (a) W — замкнутый тотальный клин;
- (b) W — замкнутый клин и W^\oplus — конус;
- (c) W^\oplus — конус и $W^{\oplus\oplus} = W$;
- (d) $W = K^\oplus$ для некоторого замкнутого конуса $K \subset X'$.

Таким образом, утверждения теоремы 6.11 и следствия 6.12 сохраняют силу для пространств Z и соответственно X' , в которых все замкнутые тотальные клинья квазилокально ограничены в своих квазивнутренних точках. Равносильно ли это условие квазилокальной ограниченности пространства?

9.4. СТРОГО ЗАМКНУТЫЕ КОНУСЫ. Обозначим символами $\nabla(X)$ и $\nabla_s(X)$ совокупности замкнутых и строго замкнутых конусов в хаусдорфовом локально выпуклом пространстве X . Если пространство X' квазилокально ограничено, то согласно следствию 6.12 квазиплотность подпространства $Y \subset X'$ равносильна включению $\nabla_s(X) \subset \nabla(X|Y)$ и равенству $\nabla_s(X) = \nabla_s(X|Y)$. Как с этими утверждениями соотносятся равенства $\nabla(X) = \nabla(X|Y)$ и $\nabla(X|Y) = \nabla_s(X|Y)$?

9.5. СТРОГО ЗАМКНУТЫЕ КОНУСЫ В $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Аналогичный вопрос возникает в связи с теоремой 8.5. Поскольку замкнутые конусы архимедовы, согласно этой теореме из квазиплотности подпространства $Y \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ следует равенство $\nabla(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}|Y) = \nabla_s(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}|Y)$. Верно ли обратное? Иными словами, можно ли к списку 8.5 (a)–(c) добавить утверждение о том, что в $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}|Y$ все замкнутые конусы строго замкнуты?

9.6. ПОЛЯРЫ КОНУСОВ. Если $K_n \subset \mathbb{R}_n^{\mathbb{N}}$ ($n \in \mathbb{N}$) — индуктивная последовательность замкнутых конусов, то согласно лемме 8.3 последовательность поляр $(\pi_n K_n)^\oplus$ проективна. Проективна ли в этой ситуации последовательность двойственных клиньев $(\pi_n K_n)^\oplus$?

9.7. КВАЗИПЛОТНОСТЬ И ПРОЕКТИВНОСТЬ. Согласно предложению 8.8 квазиплотность множества $S \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ равносильна каждому из следующих условий:

- (a) S пересекается с любым непустым выпуклым множеством $B \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, которое является ограниченным, квазиоткрытым и *проективным*;
- (b) S пересекается с любым выпуклым множеством $C \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, которое имеет непустую квазивнутренность и является *проективным*.

Существенно ли требование проективности множеств B и C в этих двух условиях? Если исключить проективность, останутся ли эти условия равносильными квазиплотности S в случае, когда S является плотным векторным подпространством \mathbb{R}^N ?

9.8. ПРИМЕРЫ КВАЗИПЛОТНЫХ ПРОСТРАНСТВ. Подмножество \mathbb{R}^N , обладающее сформулированными в предложении 8.9 свойствами (a), (b) и (c), назовем соответственно *экспоненциально плотным*, *декартово плотным* и *рекурсивно плотным*. Эти три свойства связаны очевидными импликациями (a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) и согласно предложению 8.9 влекут квазиплотность. На данный момент немногочисленный список примеров квазиплотных подпространств \mathbb{R}^N включает лишь пространства, экспоненциально плотные в \mathbb{R}^N (см. следствие 8.10). В этой связи возникают три естественных вопроса — о существовании таких квазиплотных подпространств $Y \subset \mathbb{R}^N$, что

- (a) Y декартово плотно, но не экспоненциально плотно;
- (b) Y рекурсивно плотно, но не декартово плотно;
- (c) Y не является рекурсивно плотным.

9.9. КОРОБОЧНАЯ ПЛОТНОСТЬ. Согласно предложению 8.8 подмножество пространства \mathbb{R}^N квазиплотно тогда и только тогда, когда оно пересекается с каждым непустым проективным квазиоткрытым выпуклым множеством B . Поскольку в число таких множеств B входят открытые коробки (9), образующие базу коробочной топологии на \mathbb{R}^N , отсюда следует, что всякое квазиплотное множество коробочно плотно. Верно ли обратное? Существует ли плотное подпространство $Y \subset \mathbb{R}^N$, являющееся коробочно плотным, но не квазиплотным?

9.10. ТОПОЛОГИЧНОСТЬ КВАЗИПЛОТНОСТИ. Если ответ на предыдущий вопрос оказывается отрицательным, и коробочная плотность не равносильна квазиплотности, то найдется ли на \mathbb{R}^N какая-либо иная топология, плотность относительно которой была бы равносильна квазиплотности? Топологична ли квазиплотность для плотных подпространств \mathbb{R}^N ?

9.11. КОНУСЫ И ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫЕ МНОЖЕСТВА. Несложно показать, что наличие незамкнутого линейно независимого множества в хаусдорфовом локально выпуклом пространстве влечет наличие в нем незамкнутого архимедова конуса (см. [3, 4.7]). Справедливо ли обратное утверждение? Существует ли такое плотное подпространство $Y \subset \mathbb{R}^N$, что в $\mathbb{R}_{\text{fin}}^N|_Y$ все линейно независимые множества замкнуты, но имеются незамкнутые архимедовы конусы?

ЛИТЕРАТУРА

1. Кутателадзе С. С. Основы функционального анализа. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2006.
2. Aliprantis C. D., Tourky R. Cones and duality. Providence, RI: American Mathematical Society, 2007.
3. Гутман А. Е., Емельянов Э. Ю., Матюхин А. В. Незамкнутые архимедовы конусы в локально выпуклых пространствах // Владикавказ. мат. журн. 2015. Т. 17, № 3. С. 36–43.
4. Wilansky A. Modern methods in topological vector spaces. New York: McGraw-Hill, 1978.
5. Сторожук К. В. Тонкие гиперплоскости // Сиб. электрон. матем. изв. 2018. Т. 15. С. 1553–1555.
6. Aliprantis C. D., Border K. C. Infinite dimensional analysis. A hitchhiker's guide. 3rd ed. Heidelberg: Springer-Verlag Berlin, 2006.
7. Borwein J. M., Lewis A. S. Partially finite convex programming, Part I: Quasi relative interiors and duality theory // Mathematical Programming. 1992. V. 57. P. 15–48.

8. *Boj R. I., Grad S.-M., Wanka G.* Duality in vector optimization. Heidelberg: Springer-Verlag Berlin, 2009.
9. *Peressini A. L.* Ordered topological vector spaces. New York, etc.: Harper & Row, 1967.
10. *Köthe G.* Topological vector spaces I. New York: Springer-Verlag, 1969.
11. *Anger B., Lembcke J.* Extension of linear forms with strict domination on locally compact cones // *Math. Scand.* 1980. V. 47. P. 251–265.

Поступила в редакцию 3 мая 2023 г.

После доработки 3 мая 2023 г.

Принята к публикации 16 мая 2023 г.

Гутман Александр Ефимович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090

Емельяненко Иван Александрович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
gutman@math.nsc.ru, EmelIvanA1@yandex.ru