

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Вольмир, И. Г. Кильдибеков, Исследование процесса выпучивания стержней при ударе, *Докл. АН СССР*, 1966, том 167, номер 4, 775–777

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.173

25 марта 2025 г., 18:49:23



А. С. ВОЛЬМИР, И. Г. КИЛЬДИБЕКОВ

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВЫПУЧИВАНИЯ СТЕРЖНЕЙ  
ПРИ УДАРЕ**

(Представлено академиком Ю. Н. Работновым 30 VI 1965)

В 1949 г. М. А. Лаврентьев и А. Ю. Ишлинский впервые показали <sup>(1)</sup>, что при динамическом приложении параметрической нагрузки стержень или оболочка, обладающие начальными несовершенствами, получают преимущественное выпучивание по некоторым высшим формам статической потери устойчивости. Установлению этих форм и определению характера поведения конструкции в зависимости от программы нагружения был посвящен ряд работ, изложенных в книге <sup>(2)</sup>. Во всех этих работах предполагалось, что нагрузка как бы мгновенно «пронизывает» конструкцию; волновой характер распространения усилий вдоль конструкции не учитывался. В настоящей статье исследуется неустановившийся процесс выпучивания стержня, подвергающегося продольному удару, когда волна сжатия распространяется вдоль длины стержня, а затем несколько раз последовательно отражается от торцов. С известным приближением результаты исследования этой модели могут быть отнесены и к процессу общей потери устойчивости замкнутой цилиндрической оболочки при осевом ударе.

Допустим, что стержень шарнирно опирается концами и воспринимает удар жесткой массы по одному из концов. Будем считать, что стержень имеет некоторую начальную погибь. Выпишем систему нелинейных уравнений, описывающих поведение стержня:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \left( \frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} \right) \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{1}{c_1^2 c_2^2} \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} - \\ & - \frac{1}{i^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial v}{\partial x} \right\} + \frac{1}{c_1^2 i^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^4 v_0}{\partial x^4}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $u$  — перемещение точек осевой линии стержня вдоль длины;  $v$  и  $v_0$  — полный и начальный прогибы;  $i$  — радиус инерции сечения;  $x$  — осевая координата;  $t$  — время;  $c_1$  и  $c_2$  — скорости распространения продольных и поперечных волн в материале стержня. Начало координат совмещено с торцом стержня, подвергающимся удару. Граничные и начальные условия примем в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{G}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + P = 0 \text{ при } x = 0; \quad u = 0 \text{ при } x = L; \\ & v = 0, \quad \partial^2 v / \partial x^2 = 0 \text{ при } x = 0, x = L; \end{aligned} \quad (3)$$

$$u = 0 \text{ при } 0 \leq x \leq L; \quad \partial u / \partial t = V_0 \text{ для } x = 0 \text{ при } t = 0;$$

$$\partial u / \partial t = 0 \text{ для } 0 < x \leq L \text{ при } t = 0;$$

$$v = v_0, \quad \partial v / \partial t = 0 \text{ при } t = 0,$$

где  $G/g$  — величина ударяющей жесткой массы;  $P$  — сжимающее усилие в сечениях стержня;  $L$  — длина стержня;  $V_0$  — скорость удара.

Если опустить в (1), (2) нелинейные члены, то получим известные уравнения, вытекающие из теории Тимошенко (3, 4). Уравнения, близкие к (1), (2), содержались в работе (5).

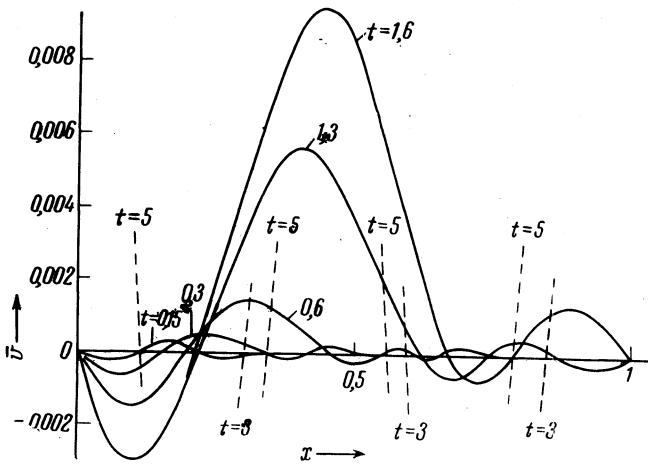


Рис. 1. Изменение волнообразования вдоль оси стержня во времени

Решение уравнений (1), (2), удовлетворяющее условиям (3), было получено с помощью цифровой электронной машины. Был применен метод конечных разностей; шаг вдоль оси  $x$  был выбран от  $1/16$  до  $1/60$  длины стержня, а шаг по нормированному времени от  $1/5$  до 1 по отношению к безразмерному шагу вдоль  $x$ .

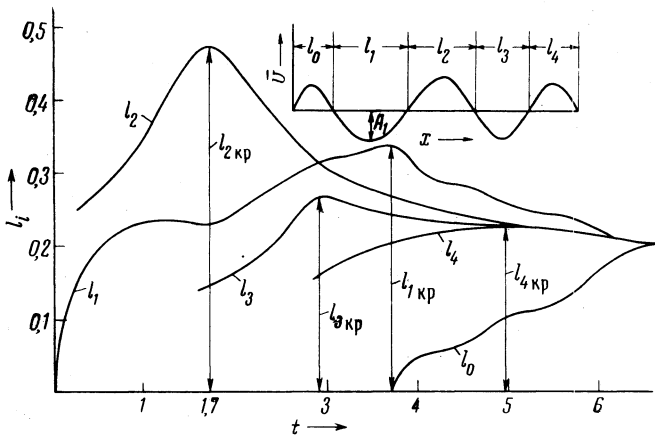


Рис. 2. Критические длины полуволн

На рис. 1—3 показаны полученные результаты для некоторых значений безразмерных параметров, характеризующих жесткость стержня и скорость удара; отношение  $G/G_1$ , где  $G_1$  — вес стержня, принято здесь бесконечно большим.

На рис. 1 изображены упругие линии стержня, соответствующие дополнительным прогибам, для ряда последовательных значений периода времени, отсчитываемого от момента удара; пунктиром нанесены участки упругих линий, отвечающих моментам времени  $t = 3$  и  $t = 5$ . Время отнесено к периоду прохождения упругой волны вдоль длины стержня. После удара образуется бегущая изгибная волна, узловыми точками которой

сначала перемещаются вправо, к неподвижному торцу. После отражения волны сжатия от правого торца здесь возникают дополнительные выпучины. Далее, по мере возрастания сжимающего усилия в различных сечениях стержня, картина выпучивания конструкции становится все более симметричной относительно среднего сечения.

Рассмотрим процесс изменения во времени расстояний между соседними узловыми точками, называемых далее длинами полуволн (рис. 2). Под  $l_0, \dots, l_4$  понимаются длины полуволн, отнесенные к полной длине стержня; они отсчитываются последовательно, считая от левого конца стержня к правому. Проследим, например, за длиной полуволны  $l_2$ . Сначала она возрастает, а затем, после достижения максимума ( $l_2 = 0,45$ ),

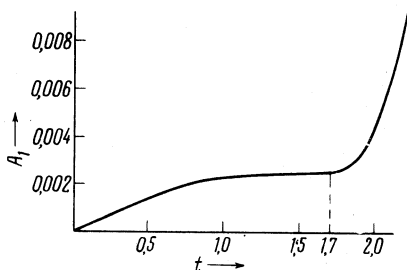


Рис. 3. Процесс динамического выпучивания

начинает падать. Было установлено, что во всех случаях может быть определена критическая длина каждой полуволны, которая является максимальной за всю историю выпучивания стержня. Оказалось, что критические длины  $l_{1кр}, \dots, l_{4кр}$  почти не зависят от амплитуды начальной погиби; они оказываются одними и теми же, например, при амплитудах, составляющих 0,01 и 0,001 от радиуса инерции сечения. По-видимому, эти результаты могут быть распространены и на идеальный стержень как на предельный случай. Отметим, что своеобразные «рывки» в изменении длины основных полуволн (см., например, кривую  $l_1$ ) соответствуют прощелкиваниям стержня при образовании или исчезновении побочных выпучин. В дальнейшем длины полуволн выравниваются между собой. На рис. 2 для момента времени  $t = 6,75$  длина «унифицированной» полуволны составляет около  $0,2 L$ . Начиная с этого момента, выпучивание можно считать установившимся; к последующему процессу может быть применен подход к задаче, предложенный М. А. Лаврентьевым и А. Ю. Ишлинским.

На рис. 3 показано изменение амплитуды одной из главных полуволн ( $l_1$ ) во времени. Кривая  $A_1(t)$  обращена сначала выпуклостью вверх. Тому моменту, когда вторая главная полуволна ( $l_2$ ) достигает «критической» величины  $l_{2кр}$ , соответствует точка перегиба кривой  $A_1(t)$ . В последующем имеет место резкое возрастание амплитуды прогиба во времени. По-видимому, достижение главными полуволнами «критических» величин определяет начало бурного выпучивания стержня — процесса, который можно условно охарактеризовать как динамическую потерю устойчивости. Поэтому характеристика «пакета» критических полуволн, относящегося к неустановившемуся периоду выпучивания системы, представляет практический интерес.

Московский авиационный институт  
им. С. Орджоникидзе

Поступило  
28 VI 1965

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> М. А. Лаврентьев, А. Ю. Ишлинский, ДАН, 64, № 6, 779 (1949).  
<sup>2</sup> А. С. Вольмир, Устойчивость упругих систем, М., 1963. <sup>3</sup> С. П. Тимошенко, Колебания в инженерном деле, М., 1959. <sup>4</sup> Я. С. Уфлянд, ПММ, 12, № 3, 287 (1948). <sup>5</sup> N. Huffington, AIAA J., 1, № 9, 2099 (1963).