В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, Ха Тьен Нгоан, Усреднение и G-сходимость дифференциальных операторов,
УМН, 1979, том 34, выпуск 5, 65–133

https://www.mathnet.ru/rm4116

1979 г. сентябрь—октябрь *т. 34, вып. 5(209)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УСРЕДНЕНИЕ И G-СХОДИМОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник,
Ха Тьен Нгоан

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Вопрос об усреднении дифференциальных операторов с частными производными и связанный с ним более общий вопрос о G-сходимости последовательности операторов возникли в связи с задачами математической физики. По-видимому, одними из первых работ, где исследовались задачи об усреднении дифференциальных уравнений с частными производными, были работы Пуассона [1], Максвелла [2], Рэлея [3].

Теория усреднения для обыкновенных дифференциальных уравнений в связи с задачами механики была разработана Н. Н. Боголюбовым и его учениками (см. [4], [5]). В сопоставлении с этими работами вопросы, рассматриваемые в настоящей статье, можно назвать «многомерным усреднением». Эти вопросы изучались (как правило, «на физическом уровне строгости») во многих работах, где рассматривались конкретные задачи физики и механики (см., например, [6] — [25], [118]).

За последние десять лет многомерному усреднению дифференциальных операторов и связанным с ним задачам (G-сходимость операторов и Г-сходимость функционалов) посвящено большое число математических исследований (см. [26] — [88]).

1. Различные задачи механики сильно неоднородных сред приводят к необходимости построения усредненных моделей для этих сред. Требуется построить модель среды, локальные свойства которой быстро меняются, и поэтому удобнее перейти от микроскопического ее описания к макроскопическому, т. е. рассматривать усредненные характеристики среды. Во многих случаях рассматриваемые физические процессы описываются уравнениями с частными производными, причем сильная неоднородность этих сред приводит к изучению дифференциальных уравнений с резко изменяющимися коэффициентами. Такие задачи возникают в теории упругости, в теории гетерогенных сред и композитных материалов, теории фильтрации и многих других разделах физики и механики. Непосредственное численное решение таких задач, как правило, невозможно даже на современных ЭВМ. Поэтому возникает вопрос о построении моделей для сильно неоднородных сред, приводящих к более простым дифференциальным уравнениям, которые по отношению к исходным уравнениям, описывающим сильно неоднородную среду, называются усредненными. Часто такие дифференциальные уравнения имеют постоянные коэффициенты. Усредненные уравнения дают возможность определить с большой точностью эффективные характеристики первоначальной среды. Это условие обеспечивается основным требованием, которому должны удовлетворять усредненные уравнения — близость решений соответствующих краевых задач для исходных и усредненных уравнений.

Во многих случаях в литературе известны рецепты построения коэффициентов усредненного уравнения, однако, они недостаточно эффективны и лишь в ряде специальных случаев приводят к явным формулам (для сред с одномерными неоднородностями — слоистые среды — [67], [68], для некоторых двумерных сред — [9], [73]) и др. Поэтому большое число работ посвящено приближенному построению усредненных уравнений при различных упрощающих предположениях (см., например, [6], [10], [18]). Приближенное построение усредненных характеристик для некоторых периодических структур проведено, в частности, в уже упоминавшихся работах Максвелла [2] и Рэлея [3].

Математическое описание сильно неоднородных сред часто базируется на предположении о наличии у таких сред какой-либо упорядоченной микроструктуры (например, периодической, квазипериодической, случайной однородной и др.). Если масштаб неоднородности среды имеет порядок ε, то среда описывается дифференциальными уравнениями, коэффициенты которых имеют структуру вида $\sigma(\varepsilon^{-1}x)$, где функция $\sigma(y)$ в зависимости от характера микроструктуры среды является периодической, квазипериодической, реализацией однородного случайного поля или др.

Сформулируем простейшую математическую постановку задачи об усреднении. Рассмотрим семейство эллиптических уравнений второго порядка, зависящее от малого параметра ε, вида

$$(1)\qquad A^\varepsilon(u^\varepsilon) \equiv \sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(\varepsilon^{-1}x)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}\right) = f(x)$$

в ограниченной области Q с граничными условиями Дирихле на ее границе

$$(2)\qquad u^\varepsilon|_{\partial Q} = 0.$$

Задача усреднения для семейства операторов, заданного условиями (1), (2), состоит в нахождении в области Q усредненного оператора $\hat{A}$ такого, что решения задачи Дирихле

$$\hat{A}(v) \equiv \sum_{i,\ j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\hat{a}_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) = f(x), \tag{3}$$

$$v|_{\partial Q} = 0 \tag{4}$$

обладают тем свойством, что $u^\varepsilon \to v$ в норме $L^2(Q)$ при $\varepsilon \to 0$ для любой функции $f \in L^2(Q)$.

В случае, когда коэффициенты $a_{ij}(y)$ являются периодическими функциями y, оператор $\hat{A}$ был построен в работе Е. Де Джорджи и С. Спаньоло [31] с помощью вариационных методов, а также в работе Н. С. Бахвалова [62], в которой был предложен вариант метода теории возмущений, использующий двухмасштабные асимптотические разложения. Интересные эвристические рассмотрения, ведущие к построению $\hat{A}$, были даны Е. Санчес-Паленсия [12].

Задача усреднения для операторов с периодическими коэффициентами допускает большое число различных подходов для ее исследования. Мы укажем здесь лишь некоторые из них. Недавно вышла интересная книга А. Бенсуссана, Ж. Л. Лионса и Г. Папаниколау [43], посвященная задачам усреднения и асимптотическому анализу уравнений с частными производными эллиптического, параболического и гиперболического типов с быстро осциллирующими периодическими коэффициентами. В ней изложены различные подходы к изучению дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими периодическими коэффициентами и дана подробная библиография работ, относящихся к рассматриваемым там вопросам.

Изложим здесь коротко подход к исследованию задачи усреднения для эллиптического уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами, который формально наиболее близок к методам настоящей работы.

Рассмотрим задачу Дирихле (1), (2), предполагая, что коэффициенты $a_{ij}(x)$ ограничены, измеримы,

$$\lambda_0 |\xi|^2 \leqslant \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \leqslant \lambda_1 |\xi|^2, \qquad \lambda_0,\ \lambda_1 = \mathrm{const} > 0,$$

функция $f \in L^2(Q)$. Тогда, как известно (см. [89]), существует единственное решение u^ε задачи (1), (2), принадлежащее пространству $\mathring{H}^1(Q)$ $\Big(\mathring{H}^1(Q)$ — пополнение функций класса $C_0^\infty(Q)$ по норме $\left(\|u\|^2_{L^2(Q)} + \sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(Q)}\right)^{1/2}\Big)$.

Предположим, что все коэффициенты $a_{ij}(x)$ периодичны по $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$ с периодом 1. Проведем сначала формальные построения. Наряду с медленной переменной x введем быструю переменную $y = \varepsilon^{-1}x$ и будем искать решение u^ε задачи (1), (2) в виде асимптотического ряда

$$u^\varepsilon(x) = u_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x,\ y), \tag{5}$$

где $u_k(x, y)$ — периодические функции по y с периодом 1. Легко видеть, что для любой гладкой функции $\varphi(x, y)$, где $y = \varepsilon^{-1}x$, имеем

$$A^\varepsilon(\varphi(x,\ y)) = \varepsilon^{-2}A_2\varphi + \varepsilon^{-1}A_1\varphi + A_0\varphi, \tag{6}$$

$$A_2 \equiv \sum_{i,\ j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial}{\partial y_j}\right), \quad A_1 \equiv \sum_{i,\ j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial}{\partial y_j}\right),$$

$$A_0 \equiv \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}(y)\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}.$$

Подставляя искомое решение (5) в уравнение (1) и используя формулу (6), находим

$$(7)\quad (\varepsilon^{-2}A_2 + \varepsilon^{-1}A_1 + A_0)(u_0(x) + \varepsilon u_1(x, y) + \varepsilon^2 u_2(x, y) + \ldots) = f.$$

Если приравняем члены с одинаковыми степенями ε в правой и левой частях равенства (7), то получим соотношения

$$(8)\qquad A_2u_0 = 0, \qquad A_2u_1 + A_1u_0 = 0, \qquad A_2u_2 + A_1u_1 + A_0u_0 = f.$$

Первое из этих соотношений выполняется автоматически, так как u_0 не зависит от y. Выпишем подробнее второе из соотношений (8). Имеем

$$(9)\qquad \sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\,\frac{\partial u_1(x, y)}{\partial y_j}\right) = -\sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}\,a_{ij}(y)\,\frac{\partial u_0}{\partial x_j}.$$

Из равенства (9) следует, что $u_1(x, y)$ представляется в виде

$$u_1(x, y) = \sum_{s=1}^{n} N_s(y)\,\frac{\partial u_0(x)}{\partial x_s},$$

где $N_s(y)$ — периодические с периодом 1 функции на $\mathbb{R}^n_y$, удовлетворяющие уравнениям

$$(10)\qquad \sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\,\frac{\partial N_s(y)}{\partial y_j}\right) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}(a_{is}(y)).$$

Третье уравнение из соотношений (8) приводит к нахождению функции $u_2(x, y)$, периодической по y с периодом 1. Условием разрешимости этого уравнения является равенство нулю среднего значения его свободного члена:

$$(11)\qquad \langle f - A_1u_1 - A_0u_0\rangle = 0, \quad \text{где} \quad \langle\psi\rangle = \int_T \psi\, dy,$$

$T = \{y\colon 0 \leqslant y_j \leqslant 1,\ j = 1, 2, \ldots, n\}$. Условие (11) можно записать в виде

$$\sum_{i,\,j,\,l=1}^{n} \left\langle a_{il}\frac{\partial N_j}{\partial y_l}\right\rangle \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i\,\partial x_j} + \sum_{i,\,j=1} \langle a_{ij}\rangle\,\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i\,\partial x_j} = f.$$

Отсюда следует, что $u_0(x)$ удовлетворяет уравнению

$$(12)\qquad \hat{A}u_0(x) \equiv \sum_{i,\,j=1}^{n} \hat{a}_{ij}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i\,\partial x_j} = f, \qquad u_0(x) \in \mathring{H}^1(Q),$$

где

$$(13)\qquad \hat{a}_{ij} = \sum_{l=1}^{n} \left\langle a_{il}\frac{\partial N_j}{\partial y_l}\right\rangle + \langle a_{ij}\rangle.$$

Итак, указанные выше рассмотрения привели нас к усредненному уравнению (12), коэффициенты которого задаются формулами (13), с граничным условием $u_0\,|_{\partial Q} = 0$. Для решений задач (1), (2) и (12) справедливы следующие утверждения (см., например, [43]):

1) $u^\varepsilon(x) \to u_0(x)$ при $\varepsilon \to 0$ в норме $L^2(Q)$ и, кроме того, равномерно в любой внутренней подобласти Q' такой, что $\overline{Q'} \subset Q$;

2) $u^\varepsilon(x) - \left(u_0(x) + \varepsilon \sum\limits_{s=1}^{n} N_s(\varepsilon^{-1}x)\,\dfrac{\partial u_0(x)}{\partial x_s}\right) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ в норме $H^1(Q)$.

Таким образом, для построения коэффициентов усредненного уравнения (12) по формулам (13) требуется определить функции $N_s(y)$. Эти функции являются периодическими решениями уравнений (10). Аналогичные уравнения лежат в основе построения коэффициентов усредненного уравнения для широких классов задач на усреднение для эллиптических операторов высокого порядка с детерминированными или случайными коэффициентами, рассмотренных в настоящей работе.

Для случая квазипериодических коэффициентов общего положения также имеют место утверждения 1), 2). Доказательство в этом случае, как и для периодических коэффициентов, основано на том, что уравнения (10) для функций N_s разрешимы в классе квазипериодических функций (см. [71]).

Аналогичная формальная процедура построения коэффициентов усредненного уравнения для дифференциальных уравнений и систем высокого порядка с быстро осциллирующими периодическими коэффициентами, а также для некоторых классов нелинейных уравнений и систем, дана в работах Н. С. Бахвалова [63], [64].

Вопрос о построении асимптотических разложений вида (5) в замкнутой области $\overline{Q}$ до сих пор остается открытым. Для областей специального вида (полупространство, слой) такие асимптотические разложения любого порядка были построены в работе [79].

В задачах усреднения для уравнений второго порядка широкое применение находят методы теории диффузионных процессов. Этими методами в работе [66] построен усредненный оператор для семейства эллиптических операторов вида

$$A^{\varepsilon}(u) \equiv \sum_{i,\, j=1} a_{ij}(\varepsilon^{-1}x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(\varepsilon^{-1}x)\frac{\partial u}{\partial x_j},$$

с периодическими коэффициентами a_{ij}, b_j. Вероятностные методы применялись в ряде работ французских математиков (см. [43]). Усреднение эллиптических операторов второго порядка с почти-периодическими и случайными коэффициентами было проведено в работах [71] — [73]. В случае, когда коэффициенты уравнения удовлетворяют условию сильного перемешивания, усредненный оператор был также построен в работе [82].

Усреднение параболических уравнений второго порядка в связи с задачей стабилизации рассматривалось в работах [90], [91].

Теория усреднения для нелинейных уравнений с частными производными в настоящее время интенсивно развивается во многих странах. Эти вопросы связаны с понятиями G-сходимости операторов и Г-сходимости функционалов (см. [33]). Однако в настоящей статье мы не будем касаться нелинейных уравнений и укажем лишь на известные нам работы в этом направлении [21], [32] — [36], [39], [40], [46] — [49], [51], [119], [64]. Мы также не будем рассматривать вопросы усреднения вариационных неравенств и уравнений, связанных с оптимальным управлением (см. [49], [56], [59], [60]).

2. Понятие G-сходимости последовательности операторов было введено в работах С. Спаньоло [26], [27] и в применении к уравнениям с частными производными впервые исследовалось в работах Е. Де Джорджи и С. Спаньоло [26], [27], [31] (см. также [29], [30], [32], [34]).

Пусть V — банахово сепарабельное пространство, V' — пространство, сопряженное с V. Значение функционала $f \in V'$ на элементе $v \in V$ обозначим $\langle f, v\rangle$.

Будем говорить, что последовательность операторов A_k: $V \to V'$ ($k = 1, 2, \ldots$) G-сходится при $k \to \infty$ к оператору $\hat{A}$: $V \to V'$ и коротко записывать $A_k \xrightarrow{G} \hat{A}$, если для любых $f,\ g \in V'$

$$\lim_{k\to\infty} \langle g,\ A_k^{-1} f\rangle = \langle g,\ \hat{A}^{-1} f\rangle. \tag{14}$$

Обозначим через $\mathscr{E}(\lambda_0,\ \lambda_1)$ класс эллиптических дифференциальных операторов второго порядка вида

$$Au \equiv \sum_{i,\ j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right), \qquad a_{ij} = a_{ji}, \tag{15}$$

$$\lambda_0 |\xi|^2 \leqslant \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \leqslant \lambda_1 |\xi|^2, \qquad \lambda_0,\ \lambda_1 = \mathrm{const} > 0,$$

где a_{ij} — ограниченные, измеримые функции в области Q.

Рассмотрим решение u^k задачи Дирихле в ограниченной области Q:

$$A_k u^k \equiv \sum_{i,\ j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^k(x)\frac{\partial u^k}{\partial x_j}\right) = f, \tag{16}$$

$$u^k|_{\partial Q} = 0, \tag{17}$$

где $f \in H^{-1}(Q)$, $u^k \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)$, $H^{-1}(Q)$ — пространство, сопряженное с $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$. Равенства (16), (17) определяют операторы A_k: $\overset{\circ}{H}{}^1(Q) \to H^{-1}(Q)$. Тогда G-сходимость операторов A_k при $k\to\infty$ к оператору $\hat{A}$ означает, что $u^k \to u$ при $k \to \infty$ слабо в $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$, $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ и $\hat{A}u = f$.

Оказывается, что оператор $\hat{A}$ принадлежит классу $\mathscr{E}(\lambda_0,\ \lambda_1)$, если $A^k \in \mathscr{E}(\lambda_0,\ \lambda_1)$.

В работах [27], [31] установлены важные свойства G-сходимости операторов из класса $\mathscr{E}(\lambda_0,\ \lambda_1)$, доказаны компактность множества операторов класса $\mathscr{E}(\lambda_0,\ \lambda_1)$, свойство локальности (если $A_k \xrightarrow{G} \hat{A}$ в области Q, то $A_k \xrightarrow{G} \hat{A}$ в любой подобласти $Q' \subset Q$), дано необходимое и достаточное условие G-сходимости в терминах сходимости интегралов энергии. В работах [26], [27], [30], [50], [54], [55], [69] изучается вопрос о G-сходимости для параболических уравнений второго порядка. Ряд результатов о G-сходимости для гиперболических уравнений получен в [43], [53]. Компактность в смысле G-сходимости для множества общих эллиптических операторов второго порядка вида

$$Au \equiv \sum_{i,\ j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(b_j(x)\,u) + c(x)\,u, \qquad a_{ij}(x) \neq a_{ji}(x),$$

доказана в работах П. Марчеллини [38] и К. Сбордоне [50]. Л. Тартар [44], [45], [86] установил, что если операторы A_k, определенные равенствами (16), (17), G-сходятся при $k \to \infty$, то

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^k \frac{\partial u^k}{\partial x_j} \to \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}$$

слабо в $L^2(Q)$ при $k \to \infty$. Это наблюдение послужило авторам основой для определения понятия сильной G-сходимости операторов (см. гл. I).

В диссертации Ха Тьен Нгоан [74], [75] было дано достаточное условие G-сходимости для эллиптических уравнений и систем высокого порядка, которое является также и необходимым условием G-сходимости для класса операторов $\mathscr{E}(\lambda_0, \lambda_1)$. Аналогичное условие (мы называем его условием N) играет важную роль в настоящей работе; оно является необходимым и достаточным условием сильной G-сходимости для широкого класса эллиптических дифференциальных операторов высокого порядка с граничными условиями Дирихле.

G-сходимость последовательности операторов, как следует из ее определения, означает слабую сходимость последовательности обратных операторов.

В работе [27] проведено сравнение G-сходимости с другими видами сходимости последовательности дифференциальных операторов. Пусть последовательность операторов A_k из класса $\mathscr{E}(\lambda_0, \lambda_1)$ определена условиями (16), (17); $A_k\colon \overset{\circ}{H}{}^1(Q) \to H^{-1}(Q)$, Q — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$.

Рассматриваются следующие три типа сходимости последовательности A_k к оператору A: $\overset{\circ}{H}{}^1(Q) \to H^{-1}(Q)$.

I. $\|(A_k-A)\varphi\|_{H^{-1}(Q)} \to 0$ при $k\to\infty$ равномерно по φ на сфере $\|\varphi\|_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)}=1$;

II. $\|(A_k-A)\varphi\|_{H^{-1}(Q)}\to 0$ при $k\to\infty$ для любой функции $\varphi\in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)$;

III. $\lim\limits_{k\to\infty}\langle (A_k-A)\varphi, \psi\rangle=0$ для любых φ, $\psi\in\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$.

Доказывается, что сходимость вида I эквивалентна условию

$$\lim_{k\to\infty}\|a_{ij}^k-a_{ij}\|_{L^\infty(Q)}=0,$$

где a_{ij} — коэффициенты предельного оператора A из класса $\mathscr{E}(\lambda_0, \lambda_1)$. Сходимость II эквивалентна тому, что для любого $\lambda\geqslant 0$

$$\lim_{k\to\infty}\|(\lambda I+A_k)^{-1}f-(\lambda I+A)^{-1}f\|_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)}=0$$

для любого $f\in H^{-1}(Q)$. Легко видеть, что из сходимости последовательности $\{A_k\}$ в смысле I либо в смысле II следует ее G-сходимость.

Сходимость вида III эквивалентна условию

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_Q (a_{ij}^k-a_{ij})\,w\,dx=0$$

для любой функции $w\in C_0^\infty(Q)$.

Сходимость вида III и G-сходимость независимы. В [27] приводится пример последовательности $\{A_k\}$, которая сходится в смысле III и в смысле G-сходимости, но соответствующие пределы различны.

Пусть $a(x)$ — периодическая функция с периодом 1, $x\in\mathbb{R}^1$. Рассмотрим последовательность операторов

$$A_k u=\frac{d}{dx}\left(a(kx)\frac{du}{dx}\right),\qquad u|_{x=0}=u|_{x=1}=0.$$

Легко показать, что последовательность $\{A_k\}$ сходится при $k\to\infty$ в смысле III к оператору

$$\tilde{A}u\equiv\frac{d}{dx}\left(\tilde{a}\frac{du}{dx}\right),\qquad u|_{x=0}=u|_{x=1}=0,$$

где

$$\tilde{a}=\int\limits_0^1 a(x)\,dx,$$

и G-сходится к оператору

$$\hat{A}u \equiv \frac{d}{dx}\left(\hat{a}\frac{du}{dx}\right), \qquad u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0,$$

где

$$\hat{a} = \left(\int_0^1 a^{-1}(x)\,dx\right)^{-1}.$$

3. Глава I настоящей работы посвящена G-сходимости эллиптических операторов высокого порядка. В § 1 приведены некоторые вспомогательные сведения о G-сходимости абстрактных операторов. Доказывается теорема об обратимости коэрцитивных операторов и теорема о компактности семейства таких операторов. Кроме того, в § 1 понятие G-сходимости распространяется на класс полуограниченных операторов.

В § 2 вводится важное для всего дальнейшего условие N и доказывается ряд вспомогательных предложений для эллиптических операторов порядка $2m$ вида

$$A_k u \equiv \sum_{|\alpha|,\,|\beta| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a^k_{\alpha\beta}(x)\, D^\beta u) \tag{18}$$

с граничными условиями Дирихле

$$D^\alpha u|_{\partial Q} = 0, \qquad |\alpha| \leqslant m-1. \tag{19}$$

Предполагается, что $a^k_{\alpha\beta}$ — ограниченные, измеримые функции в Q и для главной части оператора выполнено неравенство Гординга (см. [98]). В § 2 вводится понятие G-сходимости и сильной G-сходимости при $k \to \infty$ для операторов (18), (19). Сильная G-сходимость последовательности операторов означает G-сходимость этой последовательности и слабую в $L^2(Q)$ сходимость ее A_k-градиентов

$$\sum_{|\beta| \leqslant m} a^k_{\alpha\beta} D^\beta u^k, \qquad |\alpha| \leqslant m.$$

Доказанные в § 2 леммы служат основой для доказательства теорем § 3, которые вместе с теоремами § 5 составляют основное содержание теории G-сходимости эллиптических операторов порядка $2m$.

В § 3 доказано, что условие N является необходимим и достаточным условием сильной G-сходимости операторов (18), (19). Устанавливаются теоремы о компактности и локальности сильной G-сходимости, теоремы о сходимости энергии, о сильной G-сходимости последовательности сопряженных операторов, о сходимости решений задачи Дирихле для уравнений вида (18) при неоднородных граничных условиях.

Выполнение условия N в ряде случаев может быть проверено непосредственно и тем самым получено утверждение о сильной G-сходимости последовательности операторов. В § 4 подробно рассмотрен случай $n = 1$. Для обыкновенных дифференциальных уравнений вида (18) показано, что выполнение условия N эквивалентно некоторому легко проверяемому условию на коэффициенты уравнения.

В § 4 рассмотрена также в качестве примера задача усреднения для эллиптических уравнений порядка $2m$ с периодическими коэффициентами. Легко устанавливается, что для соответствующего семейства операторов выполнено условие N. Рассмотрены также и некоторые другие примеры.

В § 5 указан энергетический критерий сильной G-сходимости для операторов вида (18), аналогичный тому, который для операторов второго порядка из класса $\mathscr{E}(\lambda_0, \lambda_1)$ был получен ранее в работе [31]. Этот критерий может быть использован для приближенного нахождения G-предельного оператора, что представляет большой интерес для многих прикладных задач.

В § 5 дано некоторое обобщение условия N, именно, доказывается, что более широкое условие N^{δ} также является необходимым и достаточным условием сильной G-сходимости операторов. К проверке выполнения условия N^{δ} сводится доказательство основных теорем гл. II об усреднении эллиптических операторов. Условие N и условие N^{δ} указывают способ построения коэффициентов G-предельного оператора, что также может быть использовано в прикладных задачах. Иллюстрацией этому могут служить примеры § 4.

В § 5 рассматривается также вопрос о G-сходимости в неограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$. В этом же параграфе детальнее изучается некоторый более узкий класс эллиптических операторов, содержащий, в частности, эллиптические операторы второго порядка. Для этого класса доказываются более сильные теоремы о компактности, о сходимости энергии, даются двусторонние оценки для коэффициентов G-предельного оператора на основе вариационных принципов.

В гл. II рассматривается задача усреднения для эллиптических операторов. В этой главе коэффициенты эллиптического оператора рассматриваются как реализации функций, заданных на вероятностном пространстве с многомерной динамической системой. Этот подход позволяет единым методом доказать теоремы об усреднении для операторов с почти-периодическими коэффициентами, случайными коэффициентами и других. Формулировки «статистических» и «индивидуальных» теорем об усреднении эллиптических операторов даны в § 1. Для их доказательства используется теорема 19 главы I об условии N^{δ}.

В гл. III даны приложения результатов глав I—II к изучению асимптотики фундаментальных решений эллиптических и параболических уравнений второго порядка на бесконечности и к изучению поведения решения задачи Коши для параболических уравнений второго порядка при $t \to \infty$.

Авторы благодарны проф. Е. Де Джорджи, С. Спаньоло, П. Марчеллини, Ф. Коломбини за интересные обсуждения вопросов G-сходимости операторов.

Настоящая статья посвящается Н. Н. Боголюбову в связи с его семидесятилетием.

ГЛАВА I
G-СХОДИМОСТЬ ОПЕРАТОРОВ

§ 1. G-сходимость абстрактных операторов

В этом параграфе для полноты изложения мы приведем доказательства ряда известных теорем для абстрактных операторов, которые существенно используются в последующих параграфах. Аналогичные вопросы рассматривались в работах [27], [29].

Пусть V — вещественное рефлексивное, сепарабельное банахово пространство, V' — пространство, сопряженное с V. Значение функционала $f \in V'$ на элементе $v \in V$ обозначим $\langle f, v\rangle$. Через $\| u \|_E$ обозначим норму элемента u в банаховом пространстве E.

Определение 1. Линейный непрерывный оператор A: $V \to V'$ называется *коэрцитивным*, если существует число $\lambda_0 > 0$ такое, что для любого $u \in V$ выполняется неравенство

$$(1) \qquad \langle Au, u\rangle \geqslant \lambda_0 \| u \|_V^2.$$

Теорема 1. *Пусть коэрцитивный оператор A: $V \to V'$ удовлетворяет условию* (1), $f \in V'$. *Тогда уравнение*

(2) $$Av = f$$

имеет единственное решение $v \in V$, *причем*

(3) $$\|v\|_V = \|A^{-1}f\|_V \leqslant \lambda_0^{-1} \|f\|_{V'}.$$

Доказательство. Единственность решения уравнения (2) следует из того, что если $Au = 0$, то согласно (1) $u = 0$ в V.

Если уравнение $Av = f$ имеет решение $v \in V$, то согласно условию (1)

(4) $$\lambda_0 \|v\|_V^2 \leqslant \langle Av, v\rangle \leqslant \|f\|_{V'} \|v\|_V, \qquad \|v\|_V \leqslant \lambda_0^{-1} \|f\|_{V'}.$$

Отсюда и из ограниченности оператора A следует, что образ пространства V при отображении A: $V \to V'$ замкнут в V'. Если предположить, что этот образ не совпадает с V', то в силу рефлексивности пространства V и теоремы Хана — Банаха найдется элемент $z \in V$ такой, что $\langle Au, z\rangle = 0$ для любого $u \in V$ и $z \neq 0$. Полагая в этом равенстве $u = z$, получим согласно (1) $z = 0$. Это означает, что уравнение $Av = f$ разрешимо при любом $f \in V'$. Теорема доказана.

Определение 2. Будем говорить, что последовательность коэрцитивных операторов A_k: $V \to V'$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *G-сходится при* $k \to \infty$ *к коэрцитивному оператору* $\hat{A}$, и коротко записывать $A_k \xrightarrow{G} \hat{A}$, если для любых $f, g \in V'$

(5) $$\lim_{k\to\infty} \langle g, A_k^{-1}f\rangle = \langle g, \hat{A}^{-1}f\rangle.$$

Через $\widetilde{E}(\lambda_0, \lambda_1)$ будем обозначать класс коэрцитивных операторов A: $V \to V'$ таких, что для любого $u \in V$ выполнено соотношение

(6) $$\langle Au, u\rangle \geqslant \lambda_0 \|u\|_V^2, \qquad \|A\| \leqslant \lambda_1,$$

где $\lambda_0, \lambda_1 = \text{const} > 0$.

Следующая теорема устанавливает условия компактности множества коэрцитивных операторов.

Теорема 2. *Пусть* $\{A_k\}$ — *последовательность коэрцитивных операторов из класса* $\widetilde{E}(\lambda_0, \lambda_1)$. *Тогда существуют подпоследовательность* $\{A_{k'}\}$ *этой последовательности и оператор* $\hat{A}$ *из класса* $\widetilde{E}(\lambda_0, \lambda_0^{-1}\lambda_1^2)$ *такие, что* $A_{k'} \xrightarrow{G} \hat{A}$ *при* $k' \to \infty$.

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что нормы операторов A_k^{-1} ограничены постоянной λ_0^{-1}. Так как пространство V сепарабельно, то диагональным процессом из последовательности $\{A_k\}$ можно выделить подпоследовательность $\{A_{k'}\}$ такую, что для любых $f, g \in V'$

(7) $$\lim_{k'\to\infty} \langle g, A_{k'}^{-1}f\rangle = \langle g, Bf\rangle,$$

где B: $V' \to V$ — некоторый линейный оператор.

Покажем, что B^{-1}: $V \to V'$ существует и принадлежит классу $\widetilde{E}(\lambda_0, \lambda_0^{-1}\lambda_1^2)$. Согласно условиям (6) для любого k' и любого элемента $v \in V'$

(8) $$\langle v, A_{k'}^{-1}v\rangle \geqslant \lambda_0 \|A_{k'}^{-1}v\|_V^2.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $k' \to \infty$, получим

(9) $$\langle v, Bv\rangle \geqslant \lambda_0 \varliminf_{k'\to\infty} \|A_{k'}^{-1}v\|_V^2 \geqslant \lambda_0 \|Bv\|_V^2.$$

Отсюда следует, что $\|B\| \leqslant \lambda_0^{-1}$. Так как $\|A_k\| \leqslant \lambda_1$, то $\|A_k^{-1}v\| \geqslant \lambda_1^{-1} \|v\|_{V'}$, и поэтому из неравенства (8) следует, что для любого $v \in V'$

$$\langle v, A_{k'}^{-1} v\rangle \geqslant \lambda_0 \lambda_1^{-2} \|v\|_{V'}^2.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $k' \to \infty$, находим, что

(10) $$\langle v, Bv\rangle \geqslant \lambda_0\lambda_1^{-2}\|v\|_{V'}^2.$$

Это означает, что оператор B: $V' \to V$ является коэрцитивным. Поэтому согласно теореме 1 существует обратный оператор $B^{-1} = \hat{A}$, для которого в силу (9) и (10)

$$\langle \hat{A}u, u\rangle \geqslant \lambda_0\|u\|_V^2, \qquad \|\hat{A}u\|_{V'}^2 \leqslant \lambda_0^{-1}\lambda_1^2\|\hat{A}u\|_{V'}\|u\|_V,$$

и, следовательно, $\|\hat{A}\| \leqslant \lambda_0^{-1}\lambda_1^2$. Теорема доказана.

Пусть коэрцитивный оператор A: $V \to V'$ удовлетворяет условию

(11) $$\langle Au, v\rangle = \langle Av, u\rangle$$

при любых $u, v \in V$. Такой оператор называется самосопряженным. Для самосопряженного оператора A, как легко видеть, условие $\|A\| \leqslant \lambda_1$ эквивалентно условию

(12) $$\langle Au, u\rangle \leqslant \lambda_1\|u\|_V^2.$$

Действительно, для такого оператора A справедливо неравенство Коши — Буняковского

(13) $$|\langle Au, v\rangle| \leqslant \langle Au, u\rangle^{1/2}\langle Av, v\rangle^{1/2}.$$

Поэтому если выполнено (12), то

$$\langle Au, v\rangle \leqslant \lambda_1\|u\|_V\|v\|_V, \qquad \|Au\|_{V'} \leqslant \lambda_1\|u\|_V,$$

и, следовательно, $\|A\| \leqslant \lambda_1$. Если $\|A\| \leqslant \lambda_1$, то условие (12) очевидно выполнено.

Теорема 3. *Пусть A_k: $V \to V'$ — последовательность коэрцитивных самосопряженных операторов, принадлежащих классу $\tilde{E}(\lambda_0, \lambda_1)$. Тогда существуют подпоследовательность $\{A_{k'}\}$ этой последовательности и оператор $\hat{A}$ из класса $\tilde{E}(\lambda_0, \lambda_1)$ такие, что $A_{k'} \xrightarrow{G} \hat{A}$ при $k' \to \infty$.*

Доказательство. Теорема 3 вытекает из теоремы 2, если дополнительно доказать, что оператор $\hat{A}$ удовлетворяет условиям (11), (12). Пусть $A_k u_k = \hat{A}u$, $A_k v_k = \hat{A}v$, $u, v \in V$ и пусть $\{A_{k'}\}$ — последовательность операторов, построенная в теореме 2. Тогда для любых $u, v \in V$ имеем

$$\langle \hat{A}u, v\rangle = \lim_{k'\to\infty}\langle \hat{A}u, v_{k'}\rangle = \lim_{k'\to\infty}\langle A_{k'}u_{k'}, v_{k'}\rangle.$$

Так как операторы A_k удовлетворяют условиям (11), то

$$\lim_{k'\to\infty}\langle A_{k'}u_{k'}, v_{k'}\rangle = \lim_{k'\to\infty}\langle A_{k'}v_{k'}, u_{k'}\rangle = \lim_{k'\to\infty}\langle \hat{A}v, u_{k'}\rangle = \langle \hat{A}v, u\rangle.$$

Для доказательства условия (12) воспользуемся неравенством (13). Имеем

$$\langle \hat{A}u, u\rangle = \langle A_{k'}u_{k'}, u\rangle \leqslant \langle A_{k'}u_{k'}, u_{k'}\rangle^{1/2}\langle A_{k'}u, u\rangle^{1/2} \leqslant \lambda_1^{1/2}\|u\|_V\langle \hat{A}u, u_{k'}\rangle^{1/2}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $k' \to \infty$, получим

$$\langle \hat{A}u, u\rangle \leqslant \lambda_1^{1/2}\|u\|_V\langle \hat{A}u, u\rangle^{1/2}.$$

Теорема доказана.

Точно также получаем, что для любого $u \in V$

$$\langle \hat{A}u, u\rangle \leqslant \langle \hat{A}u, u_{k'}\rangle^{1/2}\langle A_{k'}u, u\rangle^{1/2}$$

и, следовательно, имеет место соотношение

(14) $$\langle \hat{A}u, u\rangle \leqslant \lim_{k'\to\infty}\langle A_{k'}u, u\rangle,$$

если операторы A_k удовлетворяют условиям теоремы 3.

Рассмотрим теперь оператор A^*, сопряженный с коэрцитивным оператором A. Оператор A^* определим как оператор, действующий из пространства V в V' и такой, что для любых элементов $\varphi, \psi \in V$ имеет место равенство

$$(15) \qquad \langle A\varphi, \psi\rangle = \langle A^*\psi, \varphi\rangle.$$

(Для самосопряженного оператора $A^* = A$.)

Легко видеть, что A^* — коэрцитивный оператор, если A — коэрцитивный и $\| A \| = \| A^* \|$.

Теорема 4. *Пусть операторы* A_k *коэрцитивны и* $A_k \xrightarrow{G} \hat{A}$ *при* $k \to \infty$. *Тогда* $A_k^* \xrightarrow{G} \hat{A}^*$ *при* $k \to \infty$.

Доказательство. Пусть $A_k u_k = \hat{A}u$, $A_k^* v_k = \hat{A}^* v$, $u, v \in V$. Покажем, что v_k сходятся слабо в V к v. Имеем

$$\lim_{k\to\infty} \langle \hat{A}u, v_k\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle A_k u_k, v_k\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle A_k^* v_k, u_k\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle \hat{A}^* v, u_k\rangle = \langle \hat{A}u, v\rangle,$$

что и требовалось показать.

Теорема 5. *Пусть* $A_k \xrightarrow{G} \hat{A}$ *при* $k \to \infty$, $\langle A_k u, u\rangle \geqslant \lambda_0 \| u \|_V^2$, $f_k \to f$ *в норме* V' *при* $k \to \infty$, $A_k u_k = f_k$.

Тогда $u_k \to u$ *слабо в* V *при* $k \to \infty$ *и* $\hat{A}u = f$.

Доказательство. Имеем

$$A_k u_k = f + f_k - f, \qquad u_k = A_k^{-1} f + A_k^{-1}(f_k - f).$$

Так как согласно теореме 1 $\| A_k^{-1} \| \leqslant \lambda_0^{-1}$, то $A_k^{-1}(f_k - f) \to 0$ по норме V. Из G-сходимости A_k к $\hat{A}$ следует, что $A_k^{-1} f \to \hat{A}^{-1} f$ слабо в V. Поэтому $u_k \to u = \hat{A}^{-1} f$ слабо в V при $k \to \infty$. Теорема доказана.

Далее мы рассмотрим более общий класс операторов. Для этого введем дополнительные предположения относительно пространства V. Пусть H — гильбертово пространство такое, что существуют два линейных компактных оператора вложения

$$j\colon V \to H, \qquad \tilde{j}\colon H \to V',$$

причем оператор $I = \tilde{j} \cdot j\colon V \to V'$ удовлетворяет условию

$$(16) \qquad \langle Iu, v\rangle = (ju, jv)_H,$$

при любых u, v из V, где $(ju, jv)_H$ означает скалярное произведение в пространстве H. Если $A_k \in \tilde{E}(\lambda_0, \lambda_1)$, то G-сходимость операторов A_k к оператору $\hat{A}$ эквивалентна тому, что $jA_k^{-1} f \to j\hat{A}^{-1} f$ в H при $k \to \infty$ для любого $f \in V'$.

Определение 3. Пусть $V \subset H \subset V'$. Оператор $A\colon V \to V'$ называется *полуограниченным снизу*, если для любого $u \in V$

$$(17) \qquad \langle Au, u\rangle \geqslant \lambda_0 \| u \|_V^2 - \lambda_2 \| ju \|_H^2,$$

где $\lambda_0, \lambda_2 = \text{const} > 0$.

Очевидно, что если A — полуограниченный снизу оператор, то $A + \lambda I\colon V \to V'$, где $\lambda = \text{const}$, является коэрцитивным оператором при условии, что $\lambda \geqslant \lambda_2$.

Действительно, при $\lambda \geqslant \lambda_2$ имеем

$$\langle Au + \lambda Iu, u\rangle = \langle Au, u\rangle + \lambda \langle Iu, u\rangle \geqslant \lambda_0 \| u \|_V^2 - \lambda_2 \| ju \|_H^2 + \lambda \| ju \|_H^2 \geqslant \lambda_0 \| u \|_V^2.$$

Так как операторы j и $\tilde{j}$ компактны, то $\| I \| \leqslant c_1$, $c_1 = \text{const}$. Поэтому если $\| A \| \leqslant \lambda_1$, то при любом λ

$$\| A + \lambda I \| \leqslant \lambda_1 + |\lambda| c_1.$$

Через $\widetilde{E}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ будем обозначать класс полуограниченных снизу операторов A, удовлетворяющих условию (17), и таких, что $\|A\| \leqslant \lambda_1$.

Очевидно, что если $A \in \widetilde{E}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$, то при $\lambda \geqslant \lambda_2$ оператор $A + \lambda I$ принадлежит классу $\widetilde{E}(\lambda_0, \lambda_1 + \lambda c_1)$.

Теорема 6. *Пусть A_k — последовательность операторов из класса $\widetilde{E}(\lambda_0, \lambda_1)$, $A_k \xrightarrow{G} \hat{A}$ при $k \to \infty$, $V \subset H \subset V'$. Тогда*

$$A_k + \lambda I \xrightarrow{G} \hat{A} + \lambda I \tag{18}$$

при любом $\lambda \geqslant 0$. Если $\lambda \leqslant 0$, то соотношение (18) *имеет место при условии, что*

$$\langle (A_k + \lambda I) u, u \rangle \geqslant \widetilde{\lambda}_0 \|u\|_V^2, \tag{19}$$

где $\widetilde{\lambda}_0 > 0$ и не зависит от k.

Доказательство. Пусть $f \in V'$. Покажем, что решения u_k уравнений $(A_k + \lambda I) u_k = f$ слабо в V сходятся при $k \to \infty$ к $u \in V$, причем $(\hat{A} + \lambda I) u = f$. Так как

$$(A_k + \lambda I) \in \widetilde{E}(\lambda_0', \lambda_1 + |\lambda| c_1),$$

где $\lambda_0' = \min\{\lambda_0, \widetilde{\lambda}_0\}$, то $\|u_k\|_V \leqslant (\lambda_0')^{-1} \|f\|_{V'}$. Поэтому, ввиду компактности оператора I, из последовательности $\{u_k\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{u_{k'}\}$ такую, что $u_{k'} \to u$ слабо в V, а $Iu_{k'} \to Iu$ по норме V' при $k' \to \infty$. Имеем

$$A_{k'} u_{k'} = -\lambda I u + f + \lambda I (u - u_{k'}).$$

Так как $A_{k'} \xrightarrow{G} \hat{A}$ и $\|\lambda I (u - u_{k'})\|_{V'} \to 0$ при $k' \to \infty$, то согласно теореме 5 получим

$$\hat{A} u + \lambda I u = f. \tag{20}$$

Покажем, что оператор $\hat{A} + \lambda I$ коэрцитивный. Пусть $A_k v_k = \hat{A} v$, $v_k, v \in V$. Так как $A_k \xrightarrow{G} \hat{A}$, то

$$\langle (\hat{A} + \lambda I) v, v \rangle = \lim_{k \to \infty} \langle (\hat{A} + \lambda I) v, v_k \rangle =$$
$$= \lim_{k \to \infty} \{\langle A_k v_k + \lambda I v_k, v_k \rangle + \lambda \langle I v - I v_k, v_k \rangle\} \geqslant$$
$$\geqslant \lim_{k \to \infty} \lambda_0' \|v_k\|_V^2 + \lim_{k \to \infty} \lambda \langle I (v - v_k), v_k \rangle \geqslant \lambda_0' \|v\|_V^2.$$

Это означает, что оператор $\hat{A} + \lambda I$ коэрцитивный, уравнение (20) имеет единственное решение и поэтому вся последовательность $u_k \to u$ при $k \to \infty$ слабо в V. Теорема доказана.

Заметим, что теорема 6 не верна для G-сходящейся последовательности коэрцитивных операторов A_k из класса $\widetilde{E}(\lambda_0, \lambda_1)$, если на V не наложено дополнительных условий. Это показывает следующий простой пример. Пусть

$$V = L^2(0, 2\pi), \quad V' = L^2(0, 2\pi), \quad A_k u \equiv a(kx) u,$$

где $a(x)$ — непрерывная, периодическая с периодом 2π функция, $-\infty < x < +\infty$, $\lambda_1 \geqslant a(x) \geqslant \lambda_0$, $\lambda_1, \lambda_0 = \mathrm{const} > 0$. Имеем

$$\langle A_k u, u \rangle \geqslant \lambda_0 \|u\|_{L^2}, \qquad \|A_k\| \leqslant \lambda_1.$$

Это означает, что A_k принадлежат классу $\widetilde{E}(\lambda_0, \lambda_1)$ при $V = L^2(0, 2\pi)$.

Очевидно, что $A_k \to \hat{A}$ при $k \to \infty$, где

$$\hat{A}u = [a^{-1}(x)]^{-1} u, \qquad [b] = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} b(s)\, ds.$$

С другой стороны,

$$(A_k + \lambda I) \xrightarrow{G} \hat{A}_\lambda, \qquad \hat{A}_\lambda u = [(a+\lambda)^{-1}]^{-1}.$$

Легко видеть, что $\hat{A}_\lambda \neq \hat{A} + \lambda I$. Здесь I — единичный оператор.

Полученные теоремы позволяют распространить понятие G-сходимости коэрцитивных операторов на полуограниченные снизу операторы.

Определение 4. Будем говорить, что *последовательность полуограниченных снизу операторов* $\{A_k\}$, $A_k \in \tilde{E}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ *G-сходится при $k \to \infty$ к оператору* $\hat{A}$, если при некотором $\lambda > \lambda_2$ коэрцитивные операторы $(A_k + \lambda I)$ G-сходятся к оператору $\hat{A} + \lambda I$.

Заметим, что из теоремы 6 следует, что

$$A_k + \lambda I \xrightarrow{G} \hat{A} + \lambda I$$

при любом $\lambda > \lambda_2$. Легко видеть, что оператор $\hat{A}$ полуограничен снизу, так как согласно теореме 2 оператор $\hat{A} + \lambda I$ — коэрцитивный. Таким образом, определения 2 и 4 согласованы.

§ 2. G-сходимость эллиптических операторов высокого порядка. Условие N. Вспомогательные предложения

Определим классы линейных дифференциальных операторов, которые будут изучаться в дальнейшем, и установим некоторые свойства таких операторов.

Введем необходимые обозначения. Пусть Q — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, ∂Q — ее граница, $C_0^\infty(Q)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций, равных нулю в окрестности ∂Q. Через $\overset{\circ}{H}{}^m(Q)$ обозначим пространство Соболева, полученное пополнением пространства $C_0^\infty(Q)$ по норме

$$\|\varphi\|_m = \Big(\int_Q \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha \varphi|^2\, dx \Big)^{1/2},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, α_j — целые неотрицательные числа,

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j, \qquad D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\, \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Через $H^{-m}(Q)$ обозначаем пространство, сопряженное с $\overset{\circ}{H}{}^m(Q)$, через $H^m(Q)$ — пополнение пространства $C^\infty(\bar{Q})$ по норме $(\|u\|_m^2 + \|u\|_0^2)^{1/2}$, $C^\infty(\bar{Q})$ — класс функций, у которых производные всех порядков непрерывны в замкнутой области $\bar{Q}$, $L^2(Q)$ — пространство функций u, для которых $\|u\|_0 < \infty$, $\|u\|_{-m}$ — норма u в пространстве $H^{-m}(Q)$.

Будем рассматривать в Q линейные дифференциальные операторы вида

$$A = \sum_{|\alpha|,\, |\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(x) D^\beta), \qquad x \in Q, \tag{21}$$

где $a_{\alpha\beta}(x)$ — ограниченные измеримые функции в Q. Определим соответствующий выражению (21) оператор A: $\overset{\circ}{H}{}^m \to H^{-m}$. Пусть $u \in \overset{\circ}{H}{}^m$, $f \in$

$\in H^{-m}$. Будем говорить, что $Au = f$, если при любой функции $\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^m$ справедливо интегральное тождество

$$(22) \qquad \sum_{|\alpha|,\ |\beta| \leqslant m} (a_{\alpha\beta} D^\beta u,\ D^\alpha \varphi) = \langle f,\ \varphi \rangle,$$

где

$$(u,\ v) = \int_Q uv\, dx,$$

$\langle f,\ \varphi\rangle$ — значение функционала $f \in H^{-m}$ на элементе $\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^m$.

Определение 5. Будем говорить, что *дифференциальный оператор* $A\colon \overset{\circ}{H}{}^m \to H^{-m}$ *вида* (21) *принадлежит классу* $E(\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2)$, если его коэффициенты удовлетворяют следующим условиям:

$$(23) \qquad \operatorname{vrai}\sup_Q |a_{\alpha\beta}(x)| \leqslant \lambda_1, \quad |\alpha|, \quad |\beta| \leqslant m, \quad \lambda_1 = \mathrm{const} > 0,$$

$$(24) \qquad (A^0 u,\ u) \equiv \sum_{|\alpha| = |\beta| = m} \int_Q a_{\alpha\beta} D^\beta u D^\alpha u\, dx \geqslant \lambda_0 \|u\|_m^2 - \lambda_2 \|u\|_0^2,$$

где $\lambda_0,\ \lambda_2 = \mathrm{const} > 0,\ u \in \overset{\circ}{H}{}^m$.

Из неравенства (24) легко получить, что оператор A класса $E(\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2)$ является эллиптическим, т. е. для любого вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $x \in Q$

$$(25) \qquad \sum_{|\alpha| = |\beta| = m} a_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta \geqslant c_0 |\xi|^{2m},$$

где

$$c_0 = \mathrm{const} > 0, \qquad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \ldots \xi_n^{\alpha_n}, \qquad |\xi|^2 = \sum_{j=1}^n \xi_j^2.$$

Неравенство вида (24) называют обычно *неравенством Гординга*. Оно справедливо для операторов A вида (21), если выполнено условие эллиптичности (25) и коэффициенты $a_{\alpha\beta}(x)$ при $|\alpha| = |\beta| = m$ непрерывны в $\overline{Q}$ (см. [98], [105]).

Оператор A из класса $E(\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2)$ можно рассматривать как абстрактный полуограниченный снизу оператор, если положить в определении 3 $V = \overset{\circ}{H}{}^m$, $V' = H^{-m}$, $H = L^2(Q) = L^2$, $\overset{\circ}{H}{}^m \subset L^2 \subset H^{-m}$. При этом оператор $j\colon \overset{\circ}{H}{}^m \to L^2$ определяем как естественное вложение: $u \to u$, а оператор $\tilde{j}\colon L^2 \to H^{-m}$ определяем вложением: $u \to (u,\ \varphi)$, $\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^m$. Согласно известным теоремам вложения (см. [89]) операторы j и $\tilde{j}$ компактны.

Покажем, что выполнено неравенство (17). Согласно определению (22) оператора A и условиям (23), (24) имеем

$$(26) \qquad \langle Au,\ u\rangle = \sum_{|\alpha|,\ |\beta| \leqslant m} (a_{\alpha\beta} D^\beta u,\ D^\alpha u) = \langle A^0 u,\ u\rangle +$$

$$+ \sum_{|\alpha| + |\beta| < 2m} (a_{\alpha\beta} D^\beta u,\ D^\alpha u) \geqslant \lambda_0 \|u\|_m^2 - \lambda_2 \|u\|_0^2 - \delta \|u\|_m^2 - c(\delta) \sum_{i=0}^{m-1} \|u\|_i^2,$$

где $c(\delta) = \mathrm{const} > 0$ и $c(\delta)$ зависит только от λ_1, δ; δ — произвольная положительная постоянная. Применяя известное неравенство (см. [105])

$$\|u\|_t \leqslant \varepsilon \|u\|_m + c(\varepsilon,\ m) \|u\|_0,$$

где $u \in \overset{\circ}{H}{}^m$, $0 < t < m$, $\varepsilon = \mathrm{const} > 0$, $c(\varepsilon,\ m) = \mathrm{const} > 0$, и выбирая δ и ε достаточно малыми, получим из соотношений (26), что при любом

$u \in \overset{\circ}{H}{}^m$

$$(27) \qquad \langle Au, u\rangle \geqslant \frac{1}{2}\lambda_0 \|u\|_m^2 - \tilde{\lambda}_2 \|u\|_0^2.$$

При этом постоянная $\tilde{\lambda}_2$ зависит только от λ_0, λ_1, λ_2. Таким образом, для последовательности операторов $\{A_k\}$ из класса $E(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ имеет смысл определение 4 о G-сходимости последовательности $\{A_k\}$ к абстрактному полуограниченному снизу оператору $\hat{A}$.

Введем обозначение

$$\Gamma_\alpha(u, A) = \sum_{|\beta| \leqslant m} a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u, \quad |\alpha| \leqslant m, \quad u \in H^m.$$

Совокупность функций $\{\Gamma_\alpha(u, A), |\alpha| \leqslant m\}$ будем называть *A-градиентом* функции u.

Введем понятие сильной G-сходимости для дифференциальных операторов класса $E(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$.

Определение 6. Будем говорить, что последовательность операторов $\{A_k\}$ из класса $E(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ *сильно G-сходится* при $k \to \infty$ к оператору $\hat{A}$ из класса $E(\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2)$ (короче, $A_k \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}$), если $A_k \overset{G}{\to} \hat{A}$ и $\Gamma_\alpha(u_k, A_k) \to \Gamma_\alpha(u, \hat{A})$ при $k \to \infty$ слабо в $L^2(Q)$, где

$$(A_k + \lambda I)u_k = (\hat{A} + \lambda I)u, \quad u_k, u \in \overset{\circ}{H}{}^m, \quad \lambda \geqslant \tilde{\lambda}_2.$$

Согласно определению 2 (см. § 1) G-сходящаяся последовательность операторов $\{A_k\}$ имеет единственный G-предел.

Будем говорить, что оператору A из класса $E(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ соответствует матрица коэффициентов $\{a_{\alpha\beta}\}$, если оператор A определяется равенством (22). Один и тот же оператор можно задавать различными матрицами коэффициентов $\{a_{\alpha\beta}\}$. Следующая теорема устанавливает, однако, что матрица коэффициентов предела сильно G-сходящейся последовательности операторов $\{A_k\}$ из $E(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ определяется однозначно по матрицам коэффициентов операторов A_k.

Теорема 7 (о единственности сильного G-предела). *Пусть последовательность операторов $\{A_k\}$ из класса $E(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ такова, что $A_k \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}$ и $A_k \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}'$, где оператору $\hat{A}$ соответствует матрица $\{\hat{a}_{\alpha\beta}\}$, а оператору $\hat{A}'$ соответствует матрица $\{\hat{a}'_{\alpha\beta}\}$. Тогда $\hat{a}_{\alpha\beta} = \hat{a}'_{\alpha\beta}$ при любых $|\alpha|$, $|\beta| \leqslant m$.*

Доказательство. Пусть $(A_k + \lambda I)u_k = f$ в Q, $f = \hat{A}u + \lambda I u$, $u \in C_0^\infty(Q)$, $u_k \in \overset{\circ}{H}{}^m$. Тогда согласно условиям теоремы $\Gamma_\alpha(u_k, A_k) \to \Gamma_\alpha(u, \hat{A})$ и $\Gamma_\alpha(u_k, A_k) \to \Gamma_\alpha(u, \hat{A}')$ слабо в $L^2(Q)$. Следовательно, для почти всех $x \in Q$

$$\sum_{|\beta| \leqslant m} \hat{a}_{\alpha\beta}(x) D^\beta u = \sum_{|\beta| \leqslant m} \hat{a}'_{\alpha\beta}(x) D^\beta u$$

для любой функции $u \in C_0^\infty(Q)$. Отсюда следует, что $\hat{a}_{\alpha\beta} = \hat{a}'_{\alpha\beta}$. Теорема доказана.

Ниже дадим некоторые достаточные условия G-сходимости последовательности $\{A_k\}$ эллиптических операторов из класса $E(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$. Эти условия играют важную роль в изучении свойств этого класса операторов.

Определение 7 (условие N). Будем говорить, что *последовательность операторов $\{A_k\}$ из класса $E(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$, которым соответствуют матрицы коэффициентов $\{\overset{k}{a}_{\alpha\beta}\}$, удовлетворяет условию N в области Q*, если для каждого мультииндекса γ, $|\gamma| \leqslant m$, существует последовательность функций $\{N_\gamma^k\}$, для которой при $k\to\infty$ выполнены следующие условия:

$$(28)\qquad N_\gamma^k\in H^m(Q),\ N_\gamma^k\to 0 \text{ слабо в } H^m(Q),$$

$$(29)\qquad \hat a_{\alpha\beta}^k\equiv\sum_{|\gamma|=m} a_{\alpha\gamma}^k D^\gamma N_\beta^k+a_{\alpha\beta}^k\to\hat a_{\alpha\beta} \text{ слабо в } L^2(Q),$$

$$(30)\qquad \sum_{|\alpha|=m} D^\alpha(\hat a_{\alpha\beta}^k-\hat a_{\alpha\beta})\to 0 \text{ по норме } H^{-m}(Q),\ |\beta|\leqslant m.$$

Если для последовательности операторов $\{A_k\}$ с матрицами коэффициентов $\{a_{\alpha\beta}^k\}$ выполнено условие N с предельными коэффициентами $\{\hat a_{\alpha\beta}\}$, определяемыми условиями (28), то будем кратко записывать $\{a_{\alpha\beta}^k\}\xrightarrow{N}\{\hat a_{\alpha\beta}\}$. Из условия (29) непосредственно вытекает, что $\hat a_{\alpha\beta}\in L^2(Q)$. (Ограниченность коэффициентов $\hat a_{\alpha\beta}$ будет доказана позже.)

Определим по коэффициентам $\hat a_{\alpha\beta}$, полученным из условия N, оператор $\hat A$: $C_0^\infty(Q)\to H^{-m}$, полагая

$$(31)\qquad \langle\hat A v,\ \varphi\rangle\equiv\sum_{|\alpha|,\ |\beta|\leqslant m}(\hat a_{\alpha\beta}D^\beta v,\ D^\alpha\varphi)$$

для любых $\varphi\in\mathring{H}^m$, $v\in C_0^\infty(Q)$.

Лемма 1. *Пусть* $\{a_{\alpha\beta}^k\}\xrightarrow{N}\{\hat a_{\alpha\beta}\}$, $A_k\in E(\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2)$. *Тогда оператор* $\hat A$, *заданный соотношением* (31) *на* $C_0^\infty(Q)$, *можно продолжить по непрерывности на все пространство* $\mathring{H}^m(Q)$, *причем полученный оператор* $\hat A$ *полуограничен снизу. Более того, если* $(A_k+\lambda I)\,u_k=f$, $f=(\hat A+\lambda I)\,v$, $v\in C_0^\infty(Q)$, $\lambda\geqslant\tilde\lambda_2$, $u_k\in\mathring{H}^m(Q)$, *где* $\tilde\lambda_2$ — *постоянная из* (27), *то* $u_k\to v$ *слабо в* $\mathring{H}^m$,

$$(32)\qquad \Gamma_\alpha(u_k,\ A_k)\to\Gamma_\alpha(v,\ \hat A)$$

слабо в $L^2(Q)$ *при* $k\to\infty$.

Доказательство. Так как операторы A_k принадлежат классу $E(\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2)$, то согласно (27) операторы $A_k+\lambda I$ при $\lambda\geqslant\tilde\lambda_2$ принадлежат некоторому классу $\tilde E(\tilde\lambda_0,\ \tilde\lambda_1)$ абстрактных операторов. Поэтому по теореме 2 можно выбрать подпоследовательность $\{A_{k'}\}$ такую, что $A_{k'}+\lambda I\xrightarrow{G}\,\xrightarrow{G}\tilde{\tilde A}+\lambda I$, где $\tilde A+\lambda I$ — некоторый абстрактный коэрцитивный оператор.

Рассмотрим последовательность u_k решений задач

$$(33)\qquad (A_k+\lambda I)\,u_k=f,\qquad u_k\in\mathring{H}^m(Q),$$

$\lambda\geqslant\tilde\lambda_2$, $f=(\tilde A+\lambda I)\,v$, $v\in C_0^\infty(Q)$. Построим почти-решения u_k^1 этих задач, полагая

$$u_k^1=v+\sum_{|\gamma|\leqslant m}N_\gamma^k D^\gamma v.$$

Очевидно, $u_k^1\in\mathring{H}^m(Q)$, так как $v\in C_0^\infty(Q)$. В дальнейшем будет показано, что $\|u_k-u_k^1\|_m\to 0$. В силу условия (28) функции u_k^1 слабо в $\mathring{H}^m$ сходятся к v.

Вычислим A_k-градиенты функций u_k^1. Имеем

$$(34)\qquad \Gamma_\alpha(u_k^1,\ A_k)=\sum_{|\beta|\leqslant m}a_{\alpha\beta}^k D^\beta u_k^1=\sum_{|\beta|\leqslant m}a_{\alpha\beta}^k D^\beta v+$$

$$+\sum_{|\gamma|=m,\ |\beta|\leqslant m}a_{\alpha\gamma}^k D^\gamma N_\beta^k D^\beta v+w_\alpha^k=\sum_{|\beta|\leqslant m}\hat a_{\alpha\beta}^k D^\beta v+w_\alpha^k.$$

Здесь через w_α^k обозначены члены, в которые входят производные от N_γ^k порядка не выше, чем $m-1$. Согласно условию (28) $w_\alpha^k\to 0$ при $k\to\infty$

в норме $L^2(Q)$. Покажем теперь, что

$$J_k = \sum_{|\alpha|,\ |\beta|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \{(\hat{a}^k_{\alpha\beta} - \hat{a}_{\alpha\beta}) D^\beta v\},$$

стремится к нулю по норме пространства $H^{-m}(Q)$ при $k\to\infty$. Имеем

$$J_k = \sum_{|\alpha|=m,\ |\beta|\leqslant m} (-1)^m \{D^\alpha (\hat{a}^k_{\alpha\beta} - \hat{a}_{\alpha\beta})\} D^\beta v + z_k,$$

где z_k содержат производные от $(\hat{a}^k_{\alpha\beta} - \hat{a}_{\alpha\beta})$ порядка не выше, чем $m-1$. Из условия (29) вытекает, что $\hat{a}^k_{\alpha\beta} - \hat{a}_{\alpha\beta}\to 0$ слабо в $L^2(Q)$. Легко показать, что в силу этого норма z_k в пространстве $H^{-m}(Q)$ стремится к нулю. Поэтому из условия (30) следует, что $\| J_k \|_{-m}\to 0$ при $k\to\infty$.

Используя равенства (34), получим

$$(A_k+\lambda I)(u_k - u^1_k) = f - A_k u^1_k - \lambda u^1_k =$$
$$= f - (\hat{A}+\lambda I) v - J_k + \sum_{|\alpha|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha w^k_\alpha - \lambda (u^1_k - v).$$

Отсюда вытекает, что

$$(A_k+\lambda I)(u_k - u^1_k) = f - (\hat{A}+\lambda I)v + \chi_k, \qquad u_k - u^1_k \in \mathring{H}^m,$$

где $\|\chi_k\|_{-m}\to 0$ при $k\to\infty$. Следовательно,

$$u_k - u^1_k = (A_k+\lambda I)^{-1} g + (A_k+\lambda I)^{-1}\chi_k, \tag{35}$$

где $g = f - (\hat{A}+\lambda I)v$. Покажем, что $g=0$. Переходя к пределу при $k'\to\infty$ в равенстве (35) и пользуясь тем, что $u_{k'}\to v$ слабо в $\mathring{H}^m(Q)$, $u^1_{k'}\to v$ слабо в $\mathring{H}^m(Q)$, получим

$$0 = (\tilde{A}+\lambda I)^{-1} g. \tag{36}$$

Так как оператор $\tilde{A}+\lambda I$ коэрцитивный, то из равенства (36) следует, что $g=0$. Это означает, что $(\hat{A}+\lambda I)v = (\tilde{A}+\lambda I)v$ для всех $v\in C_0^\infty(Q)$. Отсюда в свою очередь вытекает, что оператор $\hat{A}$, определенный равенством (21), допускает непрерывное продолжение на $\mathring{H}^m$ и получающийся таким образом оператор $\hat{A}$: $\mathring{H}^m\to H^{-m}$ является G-пределом для любой подпоследовательности $\{A_{k'}\}$. Отсюда следует, что $A_k \xrightarrow{G} \hat{A} = \tilde{A}$. Кроме того, из (35) вытекает, что $\| u_k - u^1_k\|_m\to 0$.

Докажем теперь сходимость A_k-градиентов функций u_k. Из (34), учитывая, что $\|u_k - u^1_k\|_m\to 0$, получаем

$$\Gamma_\alpha(u_k, A_k) = \Gamma_\alpha(u^1_k, A_k) + \eta^k_\alpha = \sum_{|\beta|\leqslant m} \hat{a}^k_{\alpha\beta} D^\beta v + w^k_\alpha + \eta^k_\alpha = \tag{37}$$
$$= \sum_{|\beta|\leqslant m} \hat{a}_{\alpha\beta} D^\beta v + \sum_{|\beta|\leqslant m} (\hat{a}^k_{\alpha\beta} - \hat{a}_{\alpha\beta}) D^\beta v + w^k_\alpha + \eta^k_\alpha = \Gamma_\alpha(v, \hat{A}) + \xi^k_\alpha,$$

где $\|\eta^k_\alpha\|_0\to 0$, $\|w^k_\alpha\|_0\to 0$ и $\hat{a}^k_{\alpha\beta} - \hat{a}_{\alpha\beta}\to 0$ слабо в $L^2(Q)$ при $k\to\infty$ согласно условию (29). Следовательно, $\xi^k_\alpha\to 0$ слабо в $L^2(Q)$, откуда вытекает соотношение (32). Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $\{a^k_{\alpha\beta}\} \xrightarrow{N} \{\hat{a}_{\alpha\beta}\}$, $A_k\in E(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$, $\hat{a}_{\alpha\beta}$ — *ограниченные функции в* Q. *Тогда* $A_k \xRightarrow{G} \hat{A}$, *причем* $\hat{A}\in E(\lambda_0, \tilde{\lambda}_1, \lambda_2)$, *если* $\operatorname{vrai\,sup}_Q |\hat{a}_{\alpha\beta}| \leqslant \tilde{\lambda}_1$.

Доказательство. Если коэффициенты $\hat{a}_{\alpha\beta}$ ограничены в Q, то продолжение по непрерывности оператора $\hat{A}$, заданного формулой (22) на функциях из класса $C_0^\infty(Q)$, также задается формулой (22). Поэтому согласно лемме 1 $A_k \xrightarrow{G} \hat{A}$.

Пусть $(A_k + \lambda I)u_k = f$, $f \in H^{-m}$, $u_k \in \mathring{H}^m$, $\lambda \geqslant \tilde{\lambda}_2$. Из сходимости $A_k \xrightarrow{G} \hat{A}$ следует, что $u_k \to v$ слабо в $\mathring{H}^m$ и $(\hat{A} + \lambda I)v = f$. Покажем, что $\Gamma_\alpha(u_k, A_k) \to \Gamma_\alpha(v, \hat{A})$ слабо в $L^2(Q)$.

Пусть $\|v - v^s\|_m \to 0$ при $s \to \infty$, $v^s \in C_0^\infty(Q)$ и $(A_k + \lambda I)v_k^s = (\hat{A} + \lambda I)v^s$. Тогда

$$(38)\quad \Gamma_\alpha(u_k, A_k) - \Gamma_\alpha(v, \hat{A}) = [\Gamma_\alpha(u_k, A_k) - \Gamma_\alpha(v_k^s, A_k)] + \\ + [\Gamma_\alpha(v_k^s, A_k) - \Gamma_\alpha(v^s, \hat{A})] + [\Gamma_\alpha(v^s, \hat{A}) - \Gamma_\alpha(v, \hat{A})].$$

Так как $A_k \in E(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$, то

$$(39)\qquad \|u_k - v_k^s\|_m \leqslant c_1 \|(\hat{A} + \lambda I)(v - v^s)\|_{-m} \leqslant c_2 \|v - v^s\|_m,$$

где c_1, c_2 — постоянные, не зависящие от k и s. Учитывая соотношения (39) и (32), получаем, что правая часть равенства (38) слабо в $L^2(Q)$ сходится к нулю при $k \to \infty$.

Покажем, что $\hat{A}$ принадлежит классу $E(\lambda_0, \tilde{\lambda}_1, \lambda_2)$. По предположению, $\operatorname{vrai\,sup}_Q |\hat{a}_{\alpha\beta}| \leqslant \tilde{\lambda}_1$. Докажем теперь, что для $\hat{A}$ выполнено условие (24).

Легко видеть, что для последовательности операторов $\{A_k^0\}$, где

$$A_k^0 \equiv \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} (-1)^m D^\alpha (a_{\alpha\beta}^k D^\beta),$$

также выполнено условие N с теми же коэффициентами $\{\hat{a}_{\alpha\beta}\}$, $|\alpha|$, $|\beta| \leqslant m$. По лемме 1 $A_k^0 + \lambda_2 I \xrightarrow{G} \hat{A}^0 + \lambda_2 I$, где

$$\hat{A}^0 = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} (-1)^m D^\alpha \hat{a}_{\alpha\beta} D^\beta.$$

По теореме 2 оператор $\hat{A}^0 + \lambda_2 I$ коэрцитивный и

$$\langle(\hat{A}^0 + \lambda_2 I)u, u\rangle \geqslant \lambda_0 \|u\|_m^2$$

для любой функции $u \in \mathring{H}^m$. Поэтому

$$\langle \hat{A}^0 u, u\rangle \geqslant \lambda_0 \|u\|_m^2 - \lambda_2 \|u\|_0^2.$$

Это означает выполнение условия (24). Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 1. Оператор $\hat{A}$, определенный в лемме 1, можно задать для всех $v \in \mathring{H}^m$ формулой (31). Для этого достаточно показать, что если для A_k выполнено условие N, то для любого $v \in \mathring{H}^m$ $\hat{A}$-градиенты

$$\Gamma_\alpha(v, \hat{A}) \equiv \sum_{|\beta| \leqslant m} \hat{a}_{\alpha\beta} D^\beta v, \qquad |\alpha| \leqslant m,$$

принадлежат $L^2(Q)$ и оператор $\hat{A}$ определен формулой (31) для всех $v \in \mathring{H}^m$. Пусть $(A_k + \lambda I)u_k = f$, $u_k \in \mathring{H}^m$, $\lambda \geqslant \tilde{\lambda}_2$. Тогда в силу леммы 1 $u_k \to v$ слабо в $L^2(Q)$, если $f = (\tilde{A} + \lambda I)v$. Покажем, что $\Gamma_\alpha(u_k, A_k) \to \Gamma_\alpha(v, \hat{A})$ слабо в $L^2(Q)$. Очевидно, $\Gamma_\alpha(v, \hat{A}) \in L^1(Q)$. Рассмотрим равенство вида (38). Левая часть этого равенства стремится к нулю слабо в $L^2(Q)$ ввиду оценки (39), утверждения леммы 1 для $v^s \in C_0^\infty(Q)$ и того, что $\Gamma_\alpha(v^s, \hat{A}) \to \Gamma_\alpha(v, \hat{A})$ при $s \to \infty$ в пространстве обобщенных функций $D'(Q)$ и $\Gamma_\alpha(v^s, \hat{A})$ равномерно по s ограничены в норме $L^2(Q)$ как слабые пределы в $L^2(Q)$ последовательностей $\Gamma_\alpha(v_k^s, A_k)$, равномерно по k и s ограниченных по норме $L^2(Q)$. Следовательно, $\Gamma_\alpha(v, \hat{A}) \in L^2(Q)$ при любом $v \in \overset{\circ}{H}{}^m$. Переходя в равенстве

$$\sum_{|\alpha|\leq m} (\Gamma_\alpha(u_k, A_k), D^\alpha\varphi)+\lambda(u_k, \varphi)=\langle f, \varphi\rangle$$

к пределу при $k\to\infty$, получим, что

$$\sum_{|\alpha|\leq m} (\Gamma_\alpha(v, \hat{A}), D^\alpha\varphi)+\lambda(v, \varphi)=\langle f, \varphi\rangle$$

и, следовательно,

$$\langle\hat{A}v, \varphi\rangle=\sum_{|\alpha|\leq m} (\Gamma_\alpha(v, \hat{A}), D^\alpha\varphi).$$

Заметим также, что если для последовательности $\{A_k\}$ в Q выполнено условие N, то оно выполнено также в любой подобласти $Q'\subset Q$ и, следовательно, суже́ние операторов A_k на $\overset{\circ}{H}{}^m(Q')$ G-сходится к сужению оператора $\hat{A}$ на $\overset{\circ}{H}{}^m(Q')$, причем $\Gamma_\alpha(u_k, A_k)\to\Gamma_\alpha(v, \hat{A})$ слабо в $L^2(Q')$, где $(A_k+\lambda I)u_k=f$ в Q', $(\hat{A}+\lambda I)v=f$, $u_k, v\in\overset{\circ}{H}{}^m(Q')$.]

Лемма 3. *Пусть матрицы* $\{a^k_{\alpha\beta}\}$ *и* $\{a^{*k}_{\alpha\beta}\}$, *где* $a^{*k}_{\alpha\beta}=a^k_{\beta\alpha}$ *при* $|\alpha|$, $|\beta|\leqslant m$, *соответствуют дифференциальным операторам*

$$A_k=\sum_{|\alpha|,\ |\beta|\leq m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha a^k_{\alpha\beta}D^\beta,\qquad A^*_k=\sum_{|\alpha|,\ |\beta|\leq m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha a^{*k}_{\alpha\beta}D^\beta,$$

и пусть $\{a^k_{\alpha\beta}\}\xrightarrow{N}\{\hat{a}_{\alpha\beta}\}$, $\{a^{*k}_{\alpha\beta}\}\xrightarrow{N}\{\hat{a}^*_{\alpha\beta}\}$. *Тогда при всех* $|\alpha|$, $|\beta|\leqslant m$

$$\hat{a}^*_{\alpha\beta}=\hat{a}_{\beta\alpha}. \tag{40}$$

Доказательство. Положим

$$A^0_k=\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}(-1)^m D^\alpha a^k_{\alpha\beta}D^\beta.$$

Из предположения (30) условия N для $a^k_{\alpha\beta}$ и $a^{*k}_{\alpha\beta}$ следует, что

$$A^0_k(N^k_\sigma)=(-1)^m\sum_{|\alpha|=m}D^\alpha(\hat{a}_{\alpha\sigma}-a^k_{\alpha\sigma})+\varepsilon_k,$$

$$A^{*0}_k(N^{*k}_\rho)=(-1)^m\sum_{|\alpha|=m}D^\alpha(\hat{a}^*_{\alpha\rho}-a^k_{\rho\alpha})+\varepsilon^*_k,$$

где σ, ρ — мультииндексы, $|\sigma|\leqslant m$, $|\rho|\leqslant m$, $\|\varepsilon_k\|_{-m}\to 0$, $\|\varepsilon^*_k\|_{-m}\to 0$, N^k_σ, N^{*k}_ρ — функции, определенные условиями (28) — (30) для операторов A_k, A^*_k соответственно. Это означает, что

$$\langle A^0_k(N^k_\sigma), \varphi\rangle=\sum_{|\alpha|=m}(\hat{a}_{\alpha\sigma}-a^k_{\alpha\sigma}, D^\alpha\varphi)+\langle\varepsilon_k, \varphi\rangle, \tag{41}$$

$$\langle A^{*0}_k(N^{*k}_\rho), \varphi\rangle=\sum_{|\alpha|=m}(\hat{a}^*_{\alpha\rho}-a^k_{\rho\alpha}, D^\alpha\varphi)+\langle\varepsilon^*_k, \varphi\rangle \tag{42}$$

для любой функции $\varphi\in\overset{\circ}{H}{}^m$.

Пусть $\psi\in C^\infty_0(Q)$. Положим в (41) $\varphi=N^{*k}_\rho\psi$, а в (42) положим $\varphi=N^k_\sigma\psi$. Вычитая из равенства (41) равенство (42) и учитывая (28), получим

$$\Big(\sum_{|\alpha|=m}a^k_{\alpha\sigma}D^\alpha N^{*k}_\rho, \psi\Big)-\Big(\sum_{|\alpha|=m}a^k_{\rho\alpha}D^\alpha N^k_\sigma, \psi\Big)=\eta_k, \tag{43}$$

где η_k стремится к нулю при $k\to\infty$. Воспользуемся теперь свойством (29) функций N^k_σ и N^{*k}_σ. Из равенства (43) получаем

$$(\hat{a}^{*k}_{\sigma\rho}-a^{*k}_{\sigma\rho}, \psi)-(\hat{a}^k_{\rho\sigma}-a^k_{\rho\sigma}, \psi)=\eta_k. \tag{44}$$

Так как $a_{\sigma\rho}^{*k} = a_{\rho\sigma}^k$, то, переходя к пределу при $k \to \infty$ в соотношении (44) и учитывая свойство (29), получим

$$(\hat{a}_{\sigma\rho}^*, \psi) = (\hat{a}_{\rho\sigma}, \psi)$$

при любой функции $\psi \in C_0^\infty(Q)$. Следовательно, $\hat{a}_{\sigma\rho}^* = \hat{a}_{\rho\sigma}$. Лемма доказана.

Следующая лемма устанавливает важное свойство класса $E(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$.

Лемма 4. *Любая последовательность операторов $\{A_k\}$ из класса $E(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ содержит подпоследовательность $\{A_{k'}\}$, удовлетворяющую условию N в Q.*

Доказательство. Так как операторы A_k принадлежат классу $E(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$, то операторы $A_k^0 + \lambda_2 I$ являются коэрцитивными. Поэтому на основании теоремы 2 из последовательности $\{A_k^0 + \lambda_2 I\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{A_{k'}^0 + \lambda_2 I\}$, такую, что

$$A_{k'}^0 + \lambda_2 I \xrightarrow{G} \widetilde{A}^0 + \lambda_2 I$$

при $k' \to \infty$, где $\widetilde{A}^0 + \lambda_2 I$ — некоторый абстрактный коэрцитивный оператор. Положим

$$b_\gamma^k = (A_k^0 + \lambda_2 I)^{-1} \Big(\sum_{|\alpha|=m} (-1)^m D^\alpha a_{\alpha\gamma}^k \Big).$$

Так как $a_{\alpha\gamma}^k$ — ограниченные функции в Q, то b_γ^k при всех $|\gamma| \leqslant m$ равномерно по k ограничены в норме пространства $\overset{\circ}{H}{}^m$. Пусть k' — такая подпоследовательность, что $b_\gamma^{k'} \to b_\gamma$ слабо в $\overset{\circ}{H}{}^m$ при $k' \to \infty$. Функции N_γ^k, удовлетворяющие условиям (28) — (30), определим из уравнений

$$(45)\qquad (A_k^0 + \lambda_2 I) N_\gamma^k = (\widetilde{A}^0 + \lambda_2 I) b_\gamma - \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m D^\alpha a_{\alpha\gamma}^k, \quad N_\gamma^k \in \overset{\circ}{H}{}^m.$$

Очевидно, что

$$(46)\qquad N_\gamma^k = (A_k^0 + \lambda_2 I)^{-1} (\widetilde{A}^0 + \lambda_2 I) b_\gamma - (A_k^0 + \lambda_2 I)^{-1} \Big(\sum_{|\alpha|=m} (-1)^m D^\alpha a_{\alpha\gamma}^k \Big).$$

Из определения функций b_γ и построения оператора $\widetilde{A}^0 + \lambda_2 I$ вытекает, что правая часть равенства (46) стремится к нулю слабо в $\overset{\circ}{H}{}^m$ по подпоследовательности $k' \to \infty$. Следовательно, для $N_\gamma^{k'}$ выполнено условие (28).

Вследствие коэрцитивности операторов $A_k^0 + \lambda_2 I$ и равномерной по k ограниченности коэффициентов $a_{\alpha\gamma}^k$ функции

$$\hat{a}_{\alpha\beta}^k \equiv a_{\alpha\beta}^k + \sum_{|\gamma|=m} a_{\alpha\gamma}^k D^\gamma N_\beta^k$$

равномерно по k ограничены в норме $L^2(Q)$. Поэтому из последовательности $\{\hat{a}_{\alpha\beta}^k\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{\hat{a}_{\alpha\beta}^{k''}\}$ такую, что $\hat{a}_{\alpha\beta}^{k''} \to \hat{a}_{\alpha\beta}$ слабо в $L^2(Q)$. Это означает, что для $N_\gamma^{k''}$ выполнено условие (29). Из уравнений (45) находим, что

$$(47)\qquad (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} D^\alpha (\hat{a}_{\alpha\gamma}^k - \hat{a}_{\alpha\gamma}^p) = -\lambda_2 (N_\gamma^k - N_\gamma^p).$$

Переходя к пределу при $p \to \infty$ по подпоследовательности k'' в уравнениях (47), получим

$$(48)\qquad \sum_{|\alpha|=m} D^\alpha (\hat{a}_{\alpha\gamma}^k - \hat{a}_{\alpha\gamma}) = -\lambda_2 N_\gamma^k.$$

Так как $N_\gamma^{k''} \to 0$ слабо в $\overset{\circ}{H}{}^m$ при $k'' \to \infty$, то из равенства (48) следует выполнение условия (30). Лемма доказана.

Заметим, что если последовательность операторов $\{A_k\}$ из класса $E(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ такова, что $A_k \xrightarrow{G} \hat{A}$, то согласно лемме 4 из нее можно выделить подпоследовательность $\{A_{k'}\}$, удовлетворяющую условию N. Однако условие N может быть не выполнено для всей G-сходящейся последовательности $\{A_k\}$, так как условие N обеспечивает слабую сходимость в $L^2(Q)$ A_k-градиентов u_k к $\hat{A}$-градиенту u, что не всегда имеет место для G-сходящейся последовательности $\{A_k\}$ ввиду неединственности представления оператора A_k в виде (21).

Следующая лемма устанавливает важное свойство последовательности операторов $\{A_k\}$, удовлетворяющей условию N.

Оператор A из класса $E(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$, которому соответствует матрица коэффициентов $\{a_{\alpha\beta}\}$, можно определить и на функциях из класса $H^m(Q')$, $Q' \subset Q$, полагая

$$\langle Au, \varphi\rangle \equiv \sum_{|\alpha|,\ |\beta|\leqslant m} (a_{\alpha\beta}D^\beta u,\ D^\alpha\varphi), \tag{49}$$

для любой функции $\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^m(Q')$. Таким образом, получаем A: $H^m(Q') \to H^{-m}(Q')$.

Правая часть (49) имеет смысл также и тогда, когда $a_{\alpha\beta} \in L^2(Q')$, а $u \in C^\infty(\overline{Q}')$. В этом случае она определяет оператор A: $C^\infty(\overline{Q}') \to H^{-m}(Q')$.

Лемма 5. *Пусть последовательность операторов $\{A_k\}$ из класса $E(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ удовлетворяет условию N с соответствующей матрицей $\{\hat{a}_{\alpha\beta}\}$. Тогда решения u_k задач*

$$(A_k+\lambda I)\,u_k=f,\quad u_k-v\in \overset{\circ}{H}{}^m(Q),$$
$$f=\hat{A}v+\lambda v,\quad v\in C^\infty(\overline{Q}),\quad \lambda\geqslant\tilde{\lambda}_2, \tag{50}$$

сходятся слабо в $H^m(Q)$ при $k\to\infty$ к функции v и $\Gamma_\alpha(u_k, A_k)\to\Gamma_\alpha(v, \hat{A})$ слабо в $L^2(Q)$, где $\hat{A}$ — оператор, соответствующий матрице коэффициентов $\{\hat{a}_{\alpha\beta}\}$.

Доказательство. Из последовательности операторов $\{A_k^*\}$ выберем подпоследовательность $\{A_{k'}^*\}$, для которой выполнено условие N. Пусть функции ω_k удовлетворяют уравнениям

$$(A_k^*+\lambda I)\,\omega_k=g,\quad \omega_k\in\overset{\circ}{H}{}^m(Q),$$
$$g=(\hat{A}^*+\lambda I)\,\omega,\quad \omega\in C_0^\infty(Q). \tag{51}$$

Согласно лемме 1 $\omega_{k'}\to\omega$ слабо в $\overset{\circ}{H}{}^m$, $\Gamma_\alpha(\omega_{k'}, A_{k'}^*)\to\Gamma_\alpha(\omega, \hat{A}^*)$ слабо в $L^2(Q)$ при $k'\to\infty$. Так как $(A_k+\lambda I)u_k=f$ в Q, то

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m}(\Gamma_\alpha(u_k, A_k),\ D^\alpha\varphi)+\lambda\,(u_k, \varphi)=\langle f, \varphi\rangle \tag{52}$$

для любой функции $\varphi\in\overset{\circ}{H}{}^m$. Функции u_k равномерно ограничены в H^m. Действительно, имеем

$$(A_k+\lambda I)\ (u_k-v)=f-(A_k+\lambda I)v.$$

Отсюда вытекает, что

$$\|u_k-v\|_m\leqslant c_1(\|f\|_{-m}+\|(A_k+\lambda I)\,v\|_{-m})\leqslant c_2(\|f\|_{-m}+\|v\|_m+\|v\|_0),$$

где c_1, $c_2=\mathrm{const}>0$. Так как $\Gamma_\alpha(u_k, A_k)$ равномерно по k ограничены в норме $L^2(Q)$, то из последовательности $u_{k'}$ можно выбрать подпоследовательность $u_{k''}$, такую, что $u_{k''}\to u$ слабо в H^m, $\Gamma_\alpha(u_{k''}, A_{k''})\to z_\alpha$ слабо в $L^2(Q)$ при $k''\to\infty$, где $u\in H^m$, z_α — некоторые функции из $L^2(Q)$. Положим в равенстве (52) $\varphi = \omega_k\psi$, где $\psi \in C_0^\infty(Q)$. Тогда, используя формулу Лейбница, получим

$$(53)\quad \sum_{|\alpha|,\,|\beta|\le m}(a^k_{\alpha\beta}D^\alpha\omega_k,\ D^\beta(u_k\psi)) - $$
$$-\sum_{|\alpha|,\,|\beta|\le m}(a^k_{\alpha\beta}D^\alpha\omega_k,\ \sum_{0<|\beta'|\le|\beta|}c^{\beta'}_\beta D^{\beta'}\psi D^{\beta-\beta'}u_k)+$$
$$+\sum_{|\alpha|,\,|\beta|\le m}(a^k_{\alpha\beta}D^\beta u_k,\ \sum_{0<|\alpha'|\le|\alpha|}c^{\alpha'}_\alpha D^{\alpha'}\psi D^{\alpha-\alpha'}\omega_k)+\lambda(u_k,\ \omega_k\psi)=\langle f,\ \omega_k\psi\rangle,$$

где $c^{\beta'}_\beta$, $c^{\alpha'}_\alpha = \mathrm{const}$. Согласно равенству (51) имеем

$$(54)\quad \sum_{|\alpha|,\,|\beta|\le m}(a^k_{\alpha\beta}D^\alpha\omega_k,\ D^\beta(u_k\psi)) = -\lambda(\omega_k,\ u_k\psi)+\langle g,\ u_k\psi\rangle.$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $k''\to\infty$ и воспользуемся тем, что для последовательности $A^*_{k'}$ выполнено условие N и $u_{k''}\to u$ слабо в H^m при $k''\to\infty$. Получим

$$\lim_{k''\to\infty}\sum_{|\alpha|,\,|\beta|\le m}(a^{k''}_{\alpha\beta}D^\alpha\omega_{k''},\ D^\beta(u_{k''}\psi)) = -\lambda(\omega,\ u\psi)+\langle g,\ u\psi\rangle =$$
$$=\sum_{|\alpha|,\,|\beta|\le m}(\hat a^*_{\beta\alpha}D^\alpha\omega,\ D^\beta(u\psi)),$$

где $\hat a^*_{\alpha\beta}$ — коэффициенты, определяемые для последовательности $\{A^*_{k'}\}$ условием N. Согласно лемме 3 $\hat a_{\alpha\beta} = \hat a^*_{\beta\alpha}$. Переходя к пределу при $k''\to\infty$ в равенстве (53), получим

$$(55)\quad \sum_{|\alpha|,\,|\beta|\le m}(\hat a_{\alpha\beta}D^\alpha\omega,\ D^\beta(u\psi)) - \sum_{|\alpha|,\,|\beta|\le m}(\hat a_{\alpha\beta}D^\alpha\omega,\ D^\beta(u\psi)-\psi D^\beta u)+$$
$$+\sum_{|\alpha|\le m}(z_\alpha,\ D^\alpha(\omega\psi)-\psi D^\alpha\omega)+\lambda(u,\ \psi\omega)=\langle f,\ \omega\psi\rangle.$$

Из равенства (52) при $k''\to\infty$ и $\varphi = \omega\psi$ вытекает, что

$$(56)\quad \sum_{|\alpha|\le m}(z_\alpha,\ D^\alpha(\omega\psi))+\lambda(u,\ \omega\psi)=\langle f,\ \omega\psi\rangle.$$

Вычитая из равенства (55) равенство (56), находим, что

$$\sum_{|\alpha|,\,|\beta|\le m}(\hat a_{\alpha\beta}D^\alpha\omega,\ \psi D^\beta u)=\sum_{|\alpha|\le m}(z_\alpha,\ \psi D^\alpha\omega).$$

Так как ψ, ω — любые функции из класса $C_0^\infty(Q)$, то отсюда вытекает равенство

$$z_\alpha=\sum_{|\beta|\le m}\hat a_{\alpha\beta}D^\beta u$$

в Q. Поэтому, переходя к пределу при $k''\to\infty$ в равенстве (52), получим

$$\sum_{|\alpha|\le m}(\Gamma_\alpha(u,\ \hat A),\ D^\alpha\varphi)=\langle f,\ \varphi\rangle-\lambda(u,\ \varphi).$$

Так как $u - v \in \mathring{H}^m$, $f = (\hat A + \lambda I)v$, то

$$(57)\quad \sum_{|\alpha|\le m}(\Gamma_\alpha((u-v),\ \hat A),\ D^\alpha\varphi)+\lambda(u-v,\ \varphi)=0,$$

где $\hat A$ — оператор, построенный в лемме 1. Согласно замечанию 1 это означает, что $(\hat A + \lambda I)(u - v) = 0$, где $\hat A + \lambda I$ — коэрцитивный оператор, построенный в лемме 1. Следовательно, $u - v = 0$.

Таким образом, мы доказали, что $u_{k''} \to v$ слабо в $H^m(Q)$, $\Gamma_\alpha(u_{k''}, A_{k''}) \to \Gamma_\alpha(v, \hat{A})$ слабо в $L^2(Q)$ при $k'' \to \infty$. Так как из любой подпоследовательности $\{k\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{k''\}$, обладающую этим свойством, то это справедливо и для всей последовательности k. Лемма доказана.

Точно также можно доказать следующие утверждения.

Лемма 6. *Пусть последовательность* $\{A_k\}$ *операторов из класса* $E(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ *удовлетворяет условию* N *и пусть* $(A_k + \lambda I)u_k = f$, $f \in H^{-m}$, $u_k \to v$ *слабо в* H^m *при* $k \to \infty$, $v \in C^\infty(\overline{Q})$. *Тогда* $(\hat{A} + \lambda I)v = f$ *в* Q *и* $\Gamma_\alpha(u_k, A_k) \to \Gamma_\alpha(v, \hat{A})$ *слабо в* $L^2(Q)$ *при* $k \to \infty$, *где* $\hat{A}$ — *оператор, соответствующий матрице коэффициентов* $\{\hat{a}_{\alpha\beta}\}$ *и определенный формулой* (49) *на функциях из* $C^\infty(\overline{Q})$.

Замечание 2. В случае, когда коэффициенты $\hat{a}_{\alpha\beta}$ оператора $\hat{A}$ ограничены в Q, оператор $\hat{A}$ определен формулой (49)

$$\langle \hat{A}u, \varphi\rangle \equiv \sum_{|\alpha|,\ |\beta| \leqslant m} (\hat{a}_{\alpha\beta} D^\beta u,\ D^\alpha \varphi), \qquad \varphi \in \overset{\circ}{H}{}^m,$$

для любой функции $u \in H^m(Q)$. Леммы 5 и 6 в этом случае справедливы для любой $v \in H^m(Q)$.

Лемма 7. *Пусть последовательность операторов* $\{A_k\}$ *из класса* $E(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ *такова, что* $A_k \xrightarrow{G} \hat{A}$ *в* Q, $A_k u_k + \lambda u_k = f$ *в* Q', $f \in H^{-m}(Q')$, $u_k \to v$ *слабо в* $H^m(Q')$ *при* $k \to \infty$, $Q' \subset Q$, $v \in C^\infty(\overline{Q}')$. *Тогда оператор* $\hat{A}$ *можно записать в виде*

$$\hat{A} = \sum_{|\alpha|,\ |\beta| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (\hat{a}_{\alpha\beta} D^\beta), \qquad \hat{a}_{\alpha\beta} \in L^2(Q),$$

определяя его на функциях из $C^\infty(\overline{Q}')$ *формулой* (49), *причем для некоторой подпоследовательности* $u_{k'}$

$$\Gamma_\alpha(u_{k'},\ A_{k'}) \to \Gamma_\alpha(v,\ \hat{A})$$

слабо в $L^2(Q')$ *при* $k' \to \infty$ *и* $\hat{A}v + \lambda v = f$ *в* Q'.

Лемма 8. *Пусть последовательность операторов* $\{A_k\}$ *из класса* $E(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ *удовлетворяет условию* N *в* Q *с соответствующей матрицей* $\{\hat{a}_{\alpha\beta}\}$. *Тогда утверждения лемм* 5 *и* 6 *справедливы для любой подобласти* Q', *содержащейся в* Q.

Доказательство леммы 8 следует из лемм 5 и 6 и того, что если последовательность $\{A_k\}$ удовлетворяет условию N в Q, то она удовлетворяет условию N также и в Q'.

Лемма 9. *Пусть* $\hat{a}_{\alpha\beta}$, $|\alpha|$, $|\beta| \leqslant m$, — *коэффициенты, определяемые условием* N *для последовательности операторов* $\{A_k\}$, $A_k \in E(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$. *Тогда*

$$\operatorname{vrai\,sup}_{Q} |\hat{a}_{\alpha\beta}| \leqslant \hat{\lambda}_1, \qquad |\alpha|,\ |\beta| \leqslant m, \tag{58}$$

где постоянная $\hat{\lambda}_1$ *зависит только от* $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$.

Доказательство. Пусть область $Q' \subset Q$, $v \in C^\infty(\overline{Q})$. Положим

$$f = \sum_{|\alpha|,\ |\beta| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (\hat{a}_{\alpha\beta} D^\beta v) + \lambda v.$$

Так как $\hat{a}_{\alpha\beta}$ заведомо принадлежат $L^2(Q)$, то $f \in H^{-m}(Q')$. Рассмотрим последовательность u_k решений задач

$$(A_k + \lambda I)u_k = f \quad \text{в } Q', \quad u_k - v \in \overset{\circ}{H}{}^m(Q'), \quad \lambda \geqslant \tilde{\lambda}_2. \tag{59}$$

На основании лемм 5 и 8 $u_k \to v$ слабо в $\overset{\circ}{H}{}^m(Q')$ и

$$(60)\qquad \|\Gamma_\alpha(v, \hat{A})\|_0 = \Big\|\sum_{|\beta|\leqslant m} \hat{a}_{\alpha\beta} D^\beta v\Big\|_0 \leqslant$$
$$\leqslant \varliminf_{k\to\infty} \Big\|\sum_{|\beta|\leqslant m} \overset{k}{a}_{\alpha\beta} D^\beta u_k\Big\|_0 \leqslant c_1 \varliminf_{k\to\infty} (\|u_k\|_m + \|u_k\|_0)\,^{1)}.$$

Через c_j будем обозначать постоянные, не зависящие от k и Q'. При доказательстве леммы 5 было установлено, что

$$(61)\qquad \|u_k\|_m + \|u_k\|_0 \leqslant c_2 (\|f\|_{-m} + \|v\|_m + \|v\|_0).$$

Покажем, что $\|f\|_{-m} \leqslant c_3 (\|v\|_m + \|v\|_0)$.

Положим

$$f_k = \sum_{|\alpha|,\ |\beta|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (\overset{k}{a}_{\alpha\beta} D^\beta v) + \lambda v.$$

Из уравнения (59) имеем

$$A_k(u_k - v) + \lambda(u_k - v) = f - f_k \text{ в } Q'$$

или

$$u_k - v = (A_k + \lambda I)^{-1} f - (A_k + \lambda I)^{-1} f_k.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $k \to \infty$, получим

$$(\hat{A} + \lambda I)^{-1} f = \omega, \qquad (\hat{A} + \lambda I)\omega = f$$

в Q', где $\omega = \lim\limits_{k\to\infty} (A_k + \lambda I)^{-1} f_k$ в смысле слабой сходимости в $\overset{\circ}{H}{}^m(Q')$. Так как согласно теореме 2 оператор $\hat{A} + \lambda I$ ограничен в $\overset{\circ}{H}{}^m(Q)$, а операторы $(A_k + \lambda I)^{-1}$ равномерно по k ограничены в $H^{-m}(Q')$, то

$$(62)\qquad \|f\|_{-m} \leqslant c_4 \|\omega\|_m \leqslant c_4 \varliminf_{k\to\infty} \|(A_k + \lambda I)^{-1} f_k\|_m \leqslant c_5 \varliminf_{k\to\infty} \|f_k\|_{-m}.$$

Легко видеть, что $\|f_k\|_{-m} \leqslant c_6(\|v\|_m + \|v\|_0)$. Из (62) имеем

$$(63)\qquad \|f\|_{-m} \leqslant c_7 (\|v\|_m + \|v\|_0).$$

Из оценок (60), (61), (63) вытекает неравенство

$$\|\Gamma_\alpha(v, \hat{A})\|_0 \leqslant c_8 (\|v\|_m + \|v\|_0).$$

Поэтому

$$(64)\qquad \int_{Q'} \Big|\sum_{|\alpha|,\ |\beta|\leqslant m} \hat{a}_{\alpha\beta} D^\beta v D^\alpha u\Big|\, dx \leqslant c_9 (\|v\|_m^2 + \|v\|_0^2 + \|u\|_m^2 + \|u\|_0^2)$$

для любых функций $v \in C^\infty(\overline{Q})$, $u \in C^\infty(\overline{Q})$. Пусть x^0 — точка Лебега функций $\hat{a}_{\alpha\beta}$ и $|\hat{a}_{\alpha\beta}|$. Подставим в (64) $u = (x - x^0)^\alpha$, $v = (x - x^0)^\beta$. Пусть Q' — шар радиуса ρ с центром в точке x^0. Разделив неравенство (64) на объем Q' и переходя в нем к пределу при $\rho \to 0$, получим, что

$$|\hat{a}_{\alpha\beta}(x^0)| \leqslant \hat{\lambda}_1,$$

где постоянная $\hat{\lambda}_1$ зависит только от λ_0, λ_1, λ_2. Лемма доказана.

§ 3. Основные свойства G-сходимости эллиптических операторов

Используя результаты предыдущего параграфа, установим необходимые и достаточные условия сильной G-сходимости эллиптических операторов, а также основные свойства G-сходимости таких операторов (свойство локальности, свойство компактности и ряд других).

---

1) Рассматриваемые в этом доказательстве нормы относятся к области Q'.

Свойство локальности и свойство компактности для эллиптических операторов второго порядка были установлены ранее в работах [27], [28], [38], [50].

Теорема 8 (необходимое и достаточное условие сильной G-сходимости). *Пусть последовательность операторов $\{A_k\}$ принадлежит классу $E(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$. Тогда $A_k \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}$ тогда и только тогда, когда $\{a^k_{\alpha\beta}\} \overset{N}{\rightarrow} \{\hat{a}_{\alpha\beta}\}$, где $\{a^k_{\alpha\beta}\}$ — матрица коэффициентов, соответствующая оператору A_k, $\{\hat{a}_{\alpha\beta}\}$ — оператору $\hat{A}$.*

Доказательство. Если для $\{A_k\}$ выполнено условие N, то по лемме 9 коэффициенты $\hat{a}_{\alpha\beta}$ ограничены в Q. По лемме 2 $A_k \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}$ при $k \to \infty$.

Пусть $A_k \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}$ при $k \to \infty$. Тогда по лемме 4 из последовательности $\{A_k\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{A_{k'}\}$, для которой выполнено условие N, причем $N^{k'}_\gamma \in \mathring{H}^m$. В силу единственности сильного G-предела (см. теорему 7) этой подпоследовательности по условию N соответствуют коэффициенты $\{\hat{a}_{\alpha\beta}\}$ оператора $\hat{A}$. Определим теперь N^k_γ для всей последовательности $\{A_k\}$ как решения уравнений

$$(65)\qquad (A^0_k + \lambda I) N^k_\gamma = (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} D^\alpha (\hat{a}_{\alpha\gamma} - a^k_{\alpha\gamma}), \qquad N^k_\gamma \in \mathring{H}^m, \qquad \lambda \geqslant \lambda_2.$$

Обозначим их через $\tilde{N}^k_\gamma$. Покажем, что функции $\tilde{N}^k_\gamma$ удовлетворяют условиям (28)—(30) с коэффициентами $\{\hat{a}_{\alpha\beta}\}$. Для этого достаточно проверить, что $\| N^{k'}_\gamma - \tilde{N}^{k'}_\gamma \|_m \to 0$ при $k' \to \infty$. Согласно условиям (29), (30)

$$(66)\qquad \sum_{|\alpha|=m} \{D^\alpha [(\sum_{|\beta|=m} a^{k'}_{\alpha\beta} D^\beta N^{k'}_\gamma) + (a^{k'}_{\alpha\gamma} - \hat{a}_{\alpha\gamma})]\} = f_{k'},$$

где $\|f_{k'}\|_{-m} \to 0$ при $k' \to \infty$. Из (65), (66) получаем

$$(A^0_{k'} + \lambda I)(N^{k'}_\gamma - \tilde{N}^{k'}_\gamma) = \lambda N^{k'}_\gamma + (-1)^m f_{k'}, \qquad N^{k'}_\gamma - \tilde{N}^{k'}_\gamma \in \mathring{H}^m.$$

В силу коэрцитивности оператора $A^0_k + \lambda I$ и условия $\| \lambda N^{k'}_\gamma + (-1)^m f_{k'} \|_{-m} \to 0$ получаем, что $\| N^{k'}_\gamma - \tilde{N}^{k'}_\gamma \|_m \to 0$ при $k' \to \infty$.

Таким образом, последовательность функций $\tilde{N}^k_\gamma$, определенных условиями (65), обладает тем свойством, что из любой ее подпоследовательности можно выбрать последовательность, удовлетворяющую условиям (28) — (30) с коэффициентами $\hat{a}_{\alpha\beta}$. Отсюда следует, что вся последовательность $\tilde{N}^k_\gamma$ удовлетворяет условиям (28)—(30). Теорема доказана.

Теорема 9 (свойство компактности). *Любая последовательность операторов $\{A_k\}$ из класса $E(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ содержит подпоследовательность $\{A_{k'}\}$ такую, что $A_{k'} \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}$ при $k' \to \infty$, причем оператор $\hat{A}$ принадлежит классу $E(\lambda_0, \hat{\lambda}_1, \lambda_2)$ и $\hat{\lambda}_1$ зависит только от $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$.*

Доказательство. Согласно лемме 4 из последовательности $\{A_k\}$ можно выбрать подпоследовательность, для которой выполнено условие N. По лемме 9 коэффициенты $\{\hat{a}_{\alpha\beta}\}$ ограничены по модулю постоянной $\hat{\lambda}_1$, зависящей только от $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$. По лемме 2 $A_{k'} \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}$ и $\hat{A}$ принадлежит классу $E(\lambda_0, \hat{\lambda}_1, \lambda_2)$. Теорема доказана.

Теорема 10 (свойство локальности сильной G-сходимости). *Пусть $A_k \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}$ в области Q и $A_k \in E(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$. Тогда для любой области Q' такой, что $Q' \subset Q$, $A_k \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}$.*

Доказательство. Если $A_k \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}$, то согласно теореме 8 для $\{A_k\}$ выполнено условие N с коэффициентами $\{\hat{a}_{\alpha\beta}\}$, соответствующими оператору $\hat{A}$. Но если условие N выполнено в области Q, то оно, очевидно, выполнено и в любой подобласти Q'. Поэтому согласно теореме 8 $A_k \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}$ в Q'. Теорема доказана.

Теорема 11 (свойство локальности G-сходимости). *Пусть $A_k \overset{G}{\to} \hat{A}$ в области Q и $A_k \in E(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$. Тогда для любой области $Q' \subset Q$ сужение операторов A_k на Q' G-сходится к сужению оператора $\hat{A}$ на Q'.*

Доказательство. Пусть $v \in \overset{\circ}{H}{}^m(Q')$. Очевидно, $v \in \overset{\circ}{H}{}^m(Q)$. Определим последовательность $u_k \in \overset{\circ}{H}{}^m(Q)$ из уравнений

$$(A_k + \lambda I)\, u_k = (\hat{A} + \lambda I) v,$$

где $\lambda \geqslant \tilde{\lambda}_2$. Так как $A_k \overset{G}{\to} \hat{A}$, то $u_k \to v$ при $k \to \infty$ слабо в $\overset{\circ}{H}{}^m$. Из последовательности сужений операторов A_k на Q' выберем подпоследовательность $\{A_{k'}\}$ такую, что $A_{k'} \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}'$ в Q'. Это возможно в силу теоремы 9. Так как $u_k \to v$ слабо в $H^m(Q')$ при $k \to \infty$, то по лемме 6 $(\hat{A}' + \lambda I)v = (\hat{A} + \lambda I)\, v$ для $v \in C_0^\infty(Q')$. Так как операторы $\hat{A}$ и $\hat{A}'$ непрерывны, то это справедливо для любого $v \in \overset{\circ}{H}{}^m(Q')$. Это означает, что для любого $v \in \overset{\circ}{H}{}^m(Q')$ имеем $\hat{A}v = \hat{A}'v$. Таким образом, для любой G-сходящейся в Q' подпоследовательности $\{A_{k'}\}$ последовательности операторов $\{A_k\}$ имеем, что $A_{k'} \overset{G}{\to} \hat{A}$. Отсюда следует, что вся последовательность операторов $\{A_k\}$ на Q' G-сходится к $\hat{A}$ на Q'. Теорема доказана.

Теорема 12 (сходимость энергии). *Пусть $A_k \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}$ в Q. Тогда*

$$\sum_{|\alpha|,\, |\beta| \leq m} \int_Q a^k_{\alpha\beta} D^\beta u_k D^\alpha u_k \varphi\, dx \to \sum_{|\alpha|,\, |\beta| \leq m} \int_Q \hat{a}_{\alpha\beta} D^\beta u D^\alpha u \varphi\, dx, \tag{67}$$

при $k \to \infty$, где $(A_k + \lambda I)\, u_k = f$ в Q, $f \in H^{-m}$, $u_k \in \overset{\circ}{H}{}^m$, $\lambda \geqslant \tilde{\lambda}_2$, $u_k \to u$ слабо в $\overset{\circ}{H}{}^m$, $\varphi \in C_0^\infty(Q)$.

Доказательство. Легко видеть, что

$$I_k = \int_Q \sum_{|\alpha|,\, |\beta| \leq m} a^k_{\alpha\beta} D^\beta u_k D^\alpha u_k \varphi\, dx = \int_Q \sum_{|\alpha|,\, |\beta| \leq m} a^k_{\alpha\beta} D^\beta u_k D^\alpha (u_k \varphi)\, dx -$$

$$- \int_Q \sum_{|\alpha|,\, |\beta| \leq m} a^k_{\alpha\beta} D^\beta u_k \Bigl(\sum_{0<|\alpha'| \leqslant |\alpha|} C^{\alpha'}_\alpha D^{\alpha'} \varphi D^{\alpha-\alpha'} u_k \Bigr) dx =$$

$$= \int_Q f u_k \varphi\, dx - \lambda \int_Q u_k u_k \varphi\, dx - \int_Q \sum_{|\alpha| \leq m} \Gamma_\alpha (u_k, A_k) \Bigl(\sum_{0<|\alpha'| \leqslant |\alpha|} C^{\alpha'}_\alpha D^{\alpha'} \varphi D^{\alpha-\alpha'} u_k \Bigr) dx,$$

где $C^{\alpha'}_\alpha = \mathrm{const}$. Согласно определению сильной G-сходимости $\Gamma_\alpha (u_k, A_k) \to \Gamma_\alpha (u, \hat{A})$ (слабо в $L^2(Q)$) и $(\hat{A} + \lambda I)\, u = f$. Поэтому

$$\lim_{k\to\infty} I_k = \int_Q f u \varphi\, dx - \int_Q \sum_{|\alpha|,\, |\beta| \leq m} \hat{a}_{\alpha\beta} D^\beta u \Bigl(\sum_{0<|\alpha'| \leqslant |\alpha|} c^{\alpha'}_\alpha D^{\alpha'} \varphi D^{\alpha-\alpha'} u \Bigr) dx -$$

$$- \int_Q \lambda u^2 \varphi\, dx = \sum_{|\alpha|,\, |\beta| \leq m} \int_Q \hat{a}_{\alpha\beta} D^\beta u D^\alpha u \varphi\, dx.$$

Теорема доказана.

Теорема 13. *Пусть* $A_k \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}$ *и* $A_k \in E(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$. *Тогда* $A_k^0 \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}^0$, $A_k^{\varkappa} \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}^{\varkappa}$, *где*

$$A_k^0 = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} (-1)^m D^\alpha(a_{\alpha\beta}^k D^\beta), \qquad \hat{A}^0 = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} (-1)^m D^\alpha(\hat{a}_{\alpha\beta} D^\beta),$$

$$A_k^{\varkappa} = A_k^0 + \sum_{(\alpha,\beta)\in\varkappa} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(a_{\alpha\beta}^k D^\beta), \qquad \hat{A}_k^{\varkappa} = \hat{A}^0 + \sum_{(\alpha,\beta)\in\varkappa} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(\hat{a}_{\alpha\beta} D^\beta),$$

где $\varkappa$ — *множество мультииндексов* (α, β), $|\alpha| + |\beta| < 2m$, *такое, что если* $(\alpha', \beta') \in \varkappa$, *то* (α', β), (α, β') *принадлежат* $\varkappa$ *при любых* $|\alpha| = m$, $|\beta| = m$.

Доказательство. Покажем, что для операторов $\{A_k^{\varkappa}\}$ выполнено условие N при любом $\varkappa$. За N_γ^k для операторов $A_k^{\varkappa}$ возьмем функции N_γ^k, определенные условием N для операторов A_k, положив при этом $N_\gamma^k \equiv 0$ для тех γ, которым соответствуют (α, γ), не входящие в $\varkappa$ и такие, что $|\alpha| + |\gamma| < 2m$. Легко видеть, что условия (28)—(30) выполнены.

Теорема 14 (о сопряженном операторе). *Пусть* $A_k \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}$, $A_k \in E(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$. *Тогда* $A_k^* \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}^*$.

Доказательство. Согласно леммам 4 и 3 из последовательности $\{A_k^*\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{A_{k'}^*\}$, удовлетворяющую условию N с коэффициентами $\hat{a}_{\alpha\beta}^* = \hat{a}_{\beta\alpha}$ и функциями $N_\gamma^{*k'} \in \mathring{H}^m(Q)$. Покажем, что для всей последовательности выполнено условие N. Для этого определим функции $\widetilde{N}_\gamma^{*k}$ из уравнений

$$(A_k^{0*} + \lambda I) N_\gamma^{*k} = (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} D^\alpha (\hat{a}_{\alpha\gamma}^* - a_{\alpha\gamma}^{*k}),$$

$$N_\gamma^{*k} \in \mathring{H}^m(Q), \qquad \lambda \geqslant \lambda_2, \qquad |\gamma| \leqslant m,$$

где

$$A^{0*} = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} (-1)^m D^\alpha (\hat{a}_{\beta\alpha} D^\beta).$$

Так же как и при доказательстве теоремы 8, показываем, что $\| \widetilde{N}_\gamma^{*k'} - \widetilde{N}_\gamma^{*k'} \|_m \to 0$ при $k' \to \infty$. Отсюда следует, что $\widetilde{N}_\gamma^{*k'}$ удовлетворяют условиям (28) — (30) с коэффициентами $\hat{a}_{\alpha\beta}^*$. Таким образом, последовательность функций $\widetilde{N}_\gamma^{*k}$ обладает тем свойством, что из любой ее подпоследовательности можно выбрать последовательность, удовлетворяющую требованиям (28) — (30) с коэффициентами $\hat{a}_{\alpha\beta}^*$. Следовательно, вся последовательность $\widetilde{N}_\gamma^{*k}$ удовлетворяет для операторов $\{A_k^*\}$ требованиям (28)—(30) условия N и поэтому $A_k^* \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}^*$. Теорема доказана.

Теорема 15. *Пусть* $A_k \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}$ *и* $A_k \in E(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ *в области* Q. *Тогда решения* u_k *задач* $(A_k + \lambda I)u_k = f$ *в* Q', $f \in H^{-m}(Q')$, $u_k - v \in \mathring{H}^m(Q')$, $v \in H^m(Q')$, $Q' \subset Q$, $\lambda \geqslant \lambda_2$, *сходятся слабо в* $H^m(Q')$ *при* $k \to \infty$ *к функции* u, *причем* $\Gamma_\alpha(u_k, A_k) \to \Gamma_\alpha(u, \hat{A})$ *слабо в* $L^2(Q')$ *и* $(\hat{A} + \lambda I)u = f$ *в* Q', $u - v \in \mathring{H}^m(Q')$.

Доказательство. Функции u_k равномерно по k ограничены в норме $H^m(Q')$, так как

$$(A_k + \lambda I)(u_k - v) = f - (A_k + \lambda I) v$$

и $(A_k + \lambda I) v$ — равномерно ограничены в норме $H^{-m}(Q')$. Следовательно, найдется подпоследовательность $u_{k'}$ такая, что $u_{k'} \to \tilde{u}$ слабо в $H^m(Q')$ при $k' \to \infty$. Тогда согласно леммам 6, 9 и замечанию 2

$$(\hat{A}+\lambda I)\tilde{u}=f \text{ в } Q', \qquad (\tilde{u}-v)\in \overset{\circ}{H}{}^m(Q'). \tag{68}$$

Так как оператор $\hat{A}+\lambda I$ — коэрцитивный, то задача (68) имеет единственное решение $\tilde{u}=u$. Кроме того, по лемме 6

$$\Gamma_\alpha(u_{k'}, A_{k'}) \to \Gamma_\alpha(u, \hat{A})$$

слабо в $L^2(Q')$ при $k' \to \infty$. Ввиду того, что это выполнено для любой слабо в $H^m(Q')$ сходящейся подпоследовательности $u_{k'}$, это справедливо и для всей последовательности u_k и, следовательно, имеет место утверждение теоремы.

Теорема 16. *Пусть $A_k \Rightarrow \hat{A}$ и $A_k \in E(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ в области Q. Тогда если $u_k \to v$ слабо в $H^m(Q')$ при $k\to\infty$, $(A_k+\lambda I)u_k = f$ в Q', $Q'\subset Q$ $f\in H^{-m}(Q')$, $\lambda \geqslant \tilde{\lambda}_2$, то $(\hat{A}+\lambda I)v=f$ в Q' и $\Gamma_\alpha(u_k, A_k)\to\Gamma_\alpha(v, \hat{A})$ слабо в $L^2(Q')$, $|\alpha|\leqslant m$.*

Эта теорема является следствием леммы 6, леммы 9 и замечания 2.

§ 4. Некоторые примеры

Рассмотрим некоторые простейшие семейства операторов A_k из класса $E(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$, для которых можно непосредственно проверить выполнение условия N и тем самым доказать сильную G-сходимость.

1. Обыкновенные дифференциальные операторы. Рассмотрим последовательность операторов вида

$$A_k = \sum_{p,\, q\leqslant m} (-1)^p \frac{d^p}{dx^p}\left(a^k_{pq}\frac{d^q}{dx^q}\right), \tag{69}$$

где $x\in\mathbb{R}^1$, $a^k_{pq}(x)$ — ограниченные измеримые функции на отрезке $[0, l]$, $a_{mm}(x)\geqslant\alpha_0=\text{const}>0$.

Теорема 17. *Последовательность операторов $\{A_k\}$ вида (69) сильно G-сходится к оператору $\hat{A}$ с коэффициентами $\hat{a}_{pq}$ тогда и только тогда, когда при $k\to\infty$*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a^k_{mm}} \to \dfrac{1}{\hat{a}_{mm}}, \quad \dfrac{a^k_{mq}}{a^k_{mm}} \to \dfrac{\hat{a}_{mq}}{\hat{a}_{mm}}, \quad \dfrac{a^k_{pm}}{a^k_{mm}} \to \dfrac{\hat{a}_{pm}}{\hat{a}_{mm}}, \\ a^k_{pq}-\dfrac{a^k_{pm}a^k_{mq}}{a^k_{mm}} \to \hat{a}_{pq}-\dfrac{\hat{a}_{pm}\hat{a}_{mq}}{\hat{a}_{mm}}, \qquad p\neq m,\ q\neq m, \end{cases} \tag{70}$$

слабо в $L^2(0, l)$.

Доказательство. Докажем, что если выполнены условия (70), то для $\{A_k\}$ выполнено условие N. С этой целью определим N^k_p $(p=0, 1, \ldots, m)$ как решения уравнений

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(a^k_{mm}\frac{d^m}{dx^m}N^k_p\right)=\frac{d^m}{dx^m}(\hat{a}_{mp}-a^k_{mp}), \tag{71}$$

такие, что

$$\frac{d^m N^k_p}{dx^m}=\frac{\hat{a}_{mp}}{a^k_{mm}}-\frac{a^k_{mp}}{a^k_{mm}}, \tag{72}$$

$$\frac{d^j}{dx^j}N^k_p(0)=0 \qquad (j=0, 1, \ldots, m-1). \tag{73}$$

Так как согласно (70) правая часть уравнения (72) слабо в $L^2(0, l)$ сходится к нулю, коэффициенты a^k_{pq} ограничены на $[0, l]$ и выполнены условия (73), то $\frac{d^m N^k{}_p}{dx^m}$ слабо в $L^2(0,\ l)$, а $\frac{d^j N^k{}_p}{dx^j}$ сильно в $L^2(0,\ l)$ сходятся к нулю при $k\to\infty$, $0\leqslant j\leqslant m-1$. Из (72) следует, что для $\hat{a}^k_{mq}$ $(q=0,\ 1,\ \ldots,\ m)$ выполнены условия (29). При $p\neq m$ имеем

$$\hat{a}^k_{pq}=\overset{k}{a}_{pm}\,\frac{d^m}{dx^m}\,N^k_q+\overset{k}{a}_{pq}=\overset{k}{a}_{pm}\left(\frac{\hat{a}_{mq}}{\overset{k}{a}_{mm}}-\frac{\overset{k}{a}_{mq}}{\overset{k}{a}_{mm}}\right)+\overset{k}{a}_{pq}\to\hat{a}_{pq}$$

слабо в $L^2(0,\ l)$ в силу условий (70). Поэтому условие (29) выполнено для всех $p,\ q\leqslant m$. Условие (30) непосредственно следует из уравнений (71). Следовательно, условия (70) обеспечивают выполнение условия N, что по теореме 8 эквивалентно тому, что $A_k\overset{G}{\Rightarrow}\hat{A}$.

Докажем теперь, что если $A_k\overset{G}{\Rightarrow}\hat{A}$, то выполнены условия (70). Так как коэффициенты $\overset{k}{a}_{pq}$ ограничены на $[0,\ l]$, то условия (70) выполнены для некоторой подпоследовательности k' с некоторыми функциями $\tilde{a}_{pq}$. Тогда по доказанному выше $A_{k'}\overset{G}{\Rightarrow}\tilde{A}$, где $\tilde{A}$ — оператор вида (69), соответствующий коэффициентам $\tilde{a}_{pq}$. В силу теоремы о единственности сильного G-предела $\hat{a}_{pq}=\tilde{a}_{pq}$. Отсюда следует, что последовательности, указанные в (70), слабо сходятся в $L^2(0,\ l)$ при $k\to\infty$, что и требовалось доказать.

2. Пусть для последовательности операторов A_k класса $E(\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2)$ выполнены условия: $\overset{k}{a}_{\alpha\beta}\to\hat{a}_{\alpha\beta}$ слабо в $L^2(Q)$ при $k\to\infty$ и для любого β, $|\beta|\leqslant m$

$$\Big\|\sum_{|\alpha|=m}D^\alpha(\overset{k}{a}_{\alpha\beta}-\hat{a}_{\alpha\beta})\Big\|_{-m}\to 0,\qquad k\to\infty.$$

Тогда для такой последовательности A_k выполнено условие N и, следовательно, $A_k\overset{G}{\Rightarrow}\hat{A}$. Действительно, в этом случае можно взять $N^k_\gamma\equiv 0$, $|\gamma|\leqslant m$.

В частности, указанные два условия выполнены, если $\overset{k}{a}_{\alpha\beta}\to\hat{a}_{\alpha\beta}$ по норме $L^2(Q)$. Этот результат можно применить к следующей задаче усреднения: найти G-предел для последовательности эллиптических операторов в Q класса $E(\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2)$ вида

$$(74)\qquad A_k\equiv A^\varepsilon=\sum_{|\alpha|,\ |\beta|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(a_{\alpha\beta}(\varepsilon^{-1}x)D^\beta),\qquad \varepsilon=k^{-1},$$

где функции $a_{\alpha\beta}(x)$ $(|\alpha|,\ |\beta|\leqslant m)$ стабилизируются на бесконечности, т. е.

$$|B_R|^{-1}\int_{B_R}(a_{\alpha\beta}(x)-\hat{a}_{\alpha\beta}(x))^2\,dx\to 0\quad\text{при}\quad R\to\infty,$$

где $\hat{a}_{\alpha\beta}(x)$ — однородная функция порядка нуль, $B_R=\{x,\ |x|\leqslant R\}$, $|B_R|$ — объем B_R. В этом случае очевидно

$$\int_Q(a_{\alpha\beta}(\varepsilon^{-1}x)-\hat{a}_{\alpha\beta}(x))^2\,dx\to 0\quad\text{при}\quad\varepsilon\to 0,$$

что обеспечивает выполнение условия N для последовательности A^ε и, значит, $A^\varepsilon\overset{G}{\Rightarrow}\hat{A}$, где

$$\hat{A}=\sum_{|\alpha|,\ |\beta|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(\hat{a}_{\alpha\beta}D^\beta).$$

3. Дифференциальные операторы с периодическими коэффициентами. Рассмотрим задачу усреднения для операторов вида (74) при условии, что

$a_{\alpha\beta}(y)$ — ограниченные измеримые функции, периодические по каждой из переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$ с периодом 1.

Предположим, что выполнено неравенство

$$(75) \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x)\, D^\beta u D^\alpha u\, dx \geqslant \lambda_0 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2\, dx$$

для любой функции $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Пусть $|a_{\alpha\beta}(y)| \leqslant \lambda_1$. Легко видеть, что в любой ограниченной области Q операторы A^ε принадлежат классу $E(\lambda_0, \lambda_1, 0)$ при каждом $\varepsilon > 0$.

Покажем, что для семейства операторов A^ε выполнено условие N в любой области Q и найдем коэффициенты предельного оператора $\hat{A}$.

Пусть $T = \{y\colon y \in \mathbb{R}^n,\ 0 \leqslant y_i \leqslant 1\}$. На множестве гладких периодических функций $u(y)$ с периодом 1 и с нулевым средним (т. е. $\int\limits_T u(y)dy = 0$) выражение

$$\left(\int\limits_T \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2\, dy\right)^{1/2}$$

задает норму. Пополнение этого множества по указанной норме обозначим через W. Функции $N_\gamma^\varepsilon(x)$ будем искать в виде $N_\gamma^\varepsilon(x) = \varepsilon^m N_\gamma(\varepsilon^{-1}x)$, где $N_\gamma(y) \in W$ и удовлетворяет уравнению

$$(76) \qquad \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} D^\alpha(a_{\alpha\beta}(y)\, D^\beta N_\gamma(y)) = -\sum_{|\alpha|=m} D^\alpha a_{\alpha\gamma}(y).$$

В главе II, § 2, показано, что из оценки (75) вытекает неравенство

$$(77) \qquad \int\limits_T \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(y)\, D^\alpha u D^\beta u\, dy \geqslant \lambda_0 \int\limits_T \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2\, dy,$$

для любой $u \in W$. Неравенство (77) означает, как легко видеть, коэрцитивность оператора

$$A^0 = (-1)^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} D^\alpha(a_{\alpha\beta}(y)\, D^\beta)$$

как оператора $W \to W'$. Так как правая часть в уравнении (76) естественным образом определяет линейный функционал на W, то согласно теореме 1 уравнения (76) однозначно разрешимы в пространстве W.

Проверим теперь выполнение требований (28)—(30) условия N. Для этого воспользуемся следующим известным утверждением: если $f(y)$ — периодическая функция и $f(y) \in L^2(T)$, то $f(\varepsilon^{-1}x) \to M\{f\}$ слабо в $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ при $\varepsilon \to 0$, где $M\{f\} = \int\limits_T f(y)dy$.

Легко видеть, что $N_\gamma(y) \in H^m_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и $N_\gamma^\varepsilon(x) = \varepsilon^m N_\gamma(\varepsilon^{-1}x) \to 0$ слабо в $H^m_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Положим

$$\hat{a}^\varepsilon_{\alpha\beta}(x) = \left.\left(a_{\alpha\beta}(y) + \sum_{|\gamma|=m} a_{\alpha\gamma}(y) D_y^\gamma N_\beta(y)\right)\right|_{y=\varepsilon^{-1}x},$$

где $D_y^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial y_1^{\alpha_1}\partial y_2^{\alpha_2}\ldots\partial y_n^{\alpha_n}}$. Тогда согласно сформулированному выше утверждению $\hat{a}^\varepsilon_{\alpha\beta}$ сходятся слабо в $L^2(Q)$ при $\varepsilon \to 0$ к постоянным

$$(78) \qquad \hat{a}_{\alpha\beta} = M\{a_{\alpha\beta}\} + M\left\{\sum_{|\gamma|=m} a_{\alpha\gamma} D^\gamma N_\beta\right\}.$$

Таким образом, требование (29) также выполнено. В силу уравнений (76) имеем

$$\sum_{|\alpha|=m} D^\alpha \hat{a}^\varepsilon_{\alpha\beta}=0, \qquad |\beta|\leqslant m.$$

Так как $\hat{a}_{\alpha\beta}\equiv\mathrm{const}$, то это соотношение влечет выполнение условия (30).

Итак, согласно теореме 8 $A^\varepsilon \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}$ при $\varepsilon\to 0$ для любой области $Q\subset\mathbb{R}^n$, причем коэффициенты оператора $\hat{A}$ постоянны и определяются по формулам (78). Это утверждение как частный случай общей теоремы будет получено также в главе II.

§ 5. Другие результаты о G-сходимости эллиптических операторов

В настоящем параграфе дано необходимое и достаточное условие сильной G-сходимости для эллиптических операторов класса $E(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$, аналогичное тому, которое в случае самосопряженного эллиптического оператора второго порядка получено в работе [31]. Кроме того, здесь проводится обобщение условия N, обобщение теории G-сходимости эллиптических операторов для неограниченной области Q, а также подробнее изучается некоторый более узкий класс операторов, чем $E(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$, в частности, содержащий эллиптические операторы второго порядка.

1. Пусть $A\in E(\lambda_0, \lambda_1, \beta_2)$ и $\{a_{\alpha\beta}\}$ — матрица его коэффициентов. Заметим, что если $\rho\leqslant\rho_0(d, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$, где $d=d(x^0)$ — расстояние от точки x^0 до границы ∂Q, то в шаре

$$B^{x^0}_\rho=\{x\colon |x-x^0|\leqslant\rho\}$$

оператор A коэрцитивный:

$$\langle Au, u\rangle\geqslant \frac{1}{2}\lambda_0\|u\|^2_m.$$

Это следует из того, что для любой $u\in \mathring{H}^m(B^{x^0}_\rho)$ имеем $\|u\|^2_0\leqslant c_0\rho^{2m}\|u\|^2_m$, где постоянная c_0 не зависит от ρ.

Пусть $\rho\leqslant\rho_0$. Рассмотрим в шаре $B^{x^0}_\rho$ задачу Дирихле:

$$\text{(79)}\qquad Au^\rho_\xi=0, \quad u^\rho_\xi-\varphi_\xi\in \mathring{H}^m(B^{x^0}_\rho),$$

где $\varphi_\xi=\sum\limits_{|\gamma|\leqslant m}(\gamma!)^{-1}(x-x^0)^\gamma\xi_\gamma$, γ — мультииндекс, $|\gamma|\leqslant m$, $\xi\in\mathbb{R}^p$, где p — число мультииндексов γ с $|\gamma|\leqslant m$. Эта задача эквивалентна следующей задаче:

$$Aw_\xi=A\varphi_\xi, \quad w_\xi\in \mathring{H}^m(B^{x^0}_\rho),$$

где $w_\xi=u^\rho_\xi-\varphi_\xi$, и поэтому согласно теореме 1 она имеет при $\rho\leqslant\rho_0$ единственное решение $u^\rho_\xi\in H^m(B^{x_0}_\rho)$.

Рассмотрим функционал

$$\text{(80)}\qquad \Pi^{x^0}_\rho(A, \xi, \eta)=|B^{x^0}_\rho|^{-1}\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int\limits_{B^{x^0}_\rho}\Gamma_\alpha(u^\rho_\xi, A)\,\eta_\alpha\,dx.$$

где $|B^{x^0}_\rho|$ — объем шара $B^{x^0}_\rho$, ξ, $\eta\in\mathbb{R}^p$, $\Gamma_\alpha(u^\rho_\xi, A)$ — A-градиент функции u^ρ_ξ.

Введем билинейную форму

(81) $$a(x,\ \xi,\ \eta)=\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta}\xi_\beta\eta_\alpha,\quad \xi,\ \eta\in\mathbb{R}^p.$$

Лемма 10. *Для оператора $A\in E(\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2)$ справедливо соотношение*

(82) $$\lim_{\rho\to 0}\Pi_\rho^{x^0}(A,\ \xi,\ \eta)=a(x^0,\ \xi,\ \eta)$$

для почти всех (по мере Лебега) точек $x^0\in Q$.

Доказательство. Пусть x^0 — точка Лебега всех функций $\{a_{\alpha\beta}\}$ и $\{a_{\alpha\beta}^2\}$. Это означает, что

$$\lim_{\rho\to 0}|B_\rho^{x^0}|^{-1}\int_{B_\rho^{x^0}} f(x)\,dx=f(x^0)$$

для $f(x)=a_{\alpha\beta}$, $f(x)=a_{\alpha\beta}^2$, $|\alpha|,\ |\beta|\leqslant m$. Будем считать для простоты, что $x^0=0$, и B_ρ^0 обозначим через B_ρ. Пусть u_ξ^ρ является решением задачи (79) в B_ρ. Положим $v_\xi^\rho=u_\xi^\rho(\rho y)$, $y\in B_1$. Перейдем к переменным $y=\rho^{-1}x$ под знаком интеграла в (80). Получим

(83) $$\Pi_\rho^0(A,\ \xi,\ \eta)=|B_1|^{-1}\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m}\eta_\alpha\int_{B_1} a_{\alpha\beta}(\rho y)\,\rho^{-|\beta|}D_y^\beta v_\xi^\rho\,dy.$$

Положим $z_\xi^\rho=\rho^{-m}(v_\xi^\rho-\sum_{|\gamma|\leqslant m}(\gamma!)^{-1}y^\gamma\xi_\gamma\rho^{|\gamma|})$. Тогда $z_\xi^\rho\in\mathring{H}^m(B_1)$ и удовлетворяет интегральному тождеству

(84) $$\langle A_\rho z_\xi^\rho,\ \varphi\rangle\equiv\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m}(\rho^{2m-|\alpha|-|\beta|}a_{\alpha\beta}(\rho y)\,D_y^\beta z_\xi^\rho,\ D^\alpha\varphi)=$$
$$=-\sum_{|\alpha|=m,|\beta|\leqslant m}(a_{\alpha\beta}\xi_\beta,\ D^\alpha\varphi)-\rho\sum_{|\alpha|<m,|\beta|\leqslant m}(f_{\alpha\beta},\ D^\alpha\varphi)\equiv\langle f_\rho,\ \varphi\rangle$$

для любой функции $\varphi\in\mathring{H}^m(B_1)$. Оценим правую часть (84). Очевидно, что нормы в $H^{-m}(B_1)$ функционалов $(f_{\alpha\beta},D^\alpha\varphi)$, $\varphi\in\mathring{H}^m(B_1)$, равномерно ограничены по ρ. Далее, имеем при $|\alpha|=m$

$$|(a_{\alpha\beta},\ D^\alpha\varphi)|\leqslant\|a_{\alpha\beta}(\rho y)-a_{\alpha\beta}(0)\|_0\,\|\varphi\|_m,$$

(85) $$\int_{B_1}(a_{\alpha\beta}(\rho y)-a_{\alpha\beta}(0))^2\,dx=$$
$$=\int_{B_1}a_{\alpha\beta}^2(\rho y)\,dy+\int_{B_1}a_{\alpha\beta}^2(0)\,dy-2\int_{B_1}a_{\alpha\beta}(\rho y)\,a_{\alpha\beta}(0)\,dy.$$

Так как $y=0$ является, по предположению, точкой Лебега функций $a_{\alpha\beta}$ и $a_{\alpha\beta}^2$, то правая часть (85) стремится к нулю при $\rho\to 0$. Итак, $\|f_\rho\|_{-m}\to 0$ при $\rho\to 0$. Легко видеть, что оператор A_ρ — коэрцитивный при достаточно малых ρ и

$$\langle A_\rho u,\ u\rangle\geqslant\widetilde{\lambda}_0\|u\|_m^2,$$

где $\widetilde{\lambda}_0$ не зависит от ρ. Поэтому согласно теореме 1 $\|z_\xi^\rho\|_m\leqslant\widetilde{\lambda}_0^{-1}\|f_\rho\|_{-m}$ и, следовательно, $\|z_\xi^\rho\|_m\to 0$ при $\rho\to 0$. Это означает, что при $\rho\to 0$

(86) $$\rho^{-m}\left\|v_\xi^\rho-\sum_{|\gamma|\leqslant m}(\gamma!)^{-1}y^\gamma\xi_\gamma\rho^{|\gamma|}\right\|_m\to 0.$$

Используя соотношение (86) и равенство (83), получим, что

$$(87)\quad \Pi_\rho^0(A,\ \xi,\ \eta) = |B_1|^{-1} \int\limits_{B_1} \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq m} a_{\alpha\beta}(\rho y)\,\xi_\beta\eta_\alpha\,dy + o(1), \qquad \rho\to 0.$$

Переходя к пределу при $\rho\to 0$ в (87), получим равенство (82). Лемма доказана.

Аналогичное утверждение для операторов второго порядка было доказано в работе [31].

Теорема 18 (энергетический критерий сильной G-сходимости). *Пусть* $\{A_k\}\in E(\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2)$. *Если* $A_k \overset{G}{\Rightarrow} \hat A$, *то для всех* $x^0\in Q$, *достаточно малых* ρ *и любых* $\xi,\ \eta\in\mathbb{R}^p$

$$(88)\qquad \Pi_\rho^{x^0}(A_k,\ \xi,\ \eta)\to \Pi_\rho^{x^0}(\hat A,\ \xi,\ \eta) \quad \text{при}\quad k\to\infty.$$

Если же для всех $x^0\in Q$, *достаточно малых* ρ *и любых* $\xi,\ \eta\in\mathbb{R}^p$ *числовая последовательность* $\Pi_\rho^{x^0}(A_k,\ \xi,\ \eta)$ *фундаментальна при* $k\to\infty$, *то существует оператор* $\hat A\in E(\lambda_0,\ \hat\lambda_1,\ \lambda_2)$ *такой, что* $A_k \overset{G}{\Rightarrow} \hat A$ *и при* $k\to\infty$

$$\Pi_\rho^{x^0}(A_k,\ \xi,\ \eta)\to \Pi_\rho^{x^0}(\hat A,\ \xi,\ \eta).$$

Доказательство. Соотношение (88) непосредственно следует из теоремы 15. Для доказательства второй части теоремы выберем подпоследовательность $\{A_{k'}\}$ такую, что $A_{k'} \overset{G}{\Rightarrow} \hat A$ при $k'\to\infty$. Тогда по доказанному

$$\Pi_\rho^{x^0}(A_{k'},\ \xi,\ \eta)\to \Pi_\rho^{x^0}(\hat A,\ \xi,\ \eta)$$

при $k'\to\infty$. По условию $\Pi_\rho^{x^0}(A_k,\ \xi,\ \eta)$ фундаментальна. Поэтому если для некоторой подпоследовательности k'' имеем $A_{k''} \overset{G}{\Rightarrow} \tilde A$ при $k''\to\infty$, то

$$\Pi_\rho^{x^0}(\hat A,\ \xi,\ \eta) = \Pi_\rho^{x^0}(\tilde A,\ \xi,\ \eta).$$

Отсюда и из леммы 10 вытекает, что

$$(89)\qquad \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq m} \hat a_{\alpha\beta}\xi_\alpha\eta_\beta = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq m} \tilde a_{\alpha\beta}\xi_\alpha\eta_\beta,$$

где $\{\tilde a_{\alpha\beta}\}$ — матрица коэффициентов, соответствующая оператору $\tilde A$. Из (89) следует, что $\hat A = \tilde A$ и, значит, $A_k \overset{G}{\Rightarrow} \hat A$. Теорема доказана.

Отметим, что теорема 18 и лемма 10 дают способ приближенного нахождения коэффициентов предельного оператора $\hat A$, что представляет большой интерес для многих прикладных задач.

2. В главе II при изучении задачи об усреднении эллиптических операторов используется некоторое обобщение условия N, которое рассматривается ниже.

Определение 8. Будем говорить, что последовательность $\{A_k\}$ ($\{a^k_{\alpha\beta}\}$ — матрица коэффициентов A_k), удовлетворяет в Q *условию* N^δ, если при каждом $\delta>0$ и любом γ, $|\gamma|\leqslant m$, существует последовательность функций $N_\gamma^{\delta,k}\in H^m(Q)$, для которой выполнены следующие требования:

$$(90)\qquad N_\gamma^{\delta,k}\to 0 \text{ слабо в } H^m(Q) \text{ при } k\to\infty,$$

$$(91)\qquad \hat a_{\alpha\beta}^{\delta,k} \equiv \sum_{|\gamma|=m} a^k_{\alpha\gamma}D^\gamma N_\beta^{\delta,k} + a^k_{\alpha\beta}\to \hat a^\delta_{\alpha\beta}$$

слабо в $L^2(Q)$ при $k\to\infty$,

(92) $$\varlimsup_{k\to\infty}\Big\|\sum_{|\alpha|=m} D^\alpha(\hat a^{\delta,k}_{\alpha\beta}-\hat a^\delta_{\alpha\beta})\Big\|_{-m}\leqslant \delta C(Q),\ C(Q)=\mathrm{const},$$

(93) $$\hat a^\delta_{\alpha\beta}\to\hat a_{\alpha\beta} \text{ сильно в } L^2(Q) \text{ при } \delta\to 0.$$

Теорема 19. *Если $\{A_k\}\in E(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)$, то $A_k \overset{G}{\Rightarrow}\hat A$ тогда и только тогда, когда для $\{A_k\}$ выполнено условие N^δ.*

Доказательство. Согласно теореме 8, если $A_k\overset{G}{\Rightarrow}\hat A$, то выполнено условие N и, следовательно, N^δ.

Пусть для $\{A_k\}$ выполнено условие N^δ. Покажем, что $A_k\overset{G}{\Rightarrow}\hat A$. По теореме 9 из последовательности $\{A_k\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{A_{k'}\}$ такую, что $A_{k'}\overset{G}{\Rightarrow}\tilde A$, где оператору $\tilde A$ соответствует некоторая матрица коэффициентов $\{\tilde a_{\alpha\beta}\}$. Докажем, что $\Gamma_\alpha(\hat A, v)=\Gamma_\alpha(\tilde A, v)$ для любой функции $v\in C_0^\infty(Q)$. Отсюда вытекает, что $\tilde a_{\alpha\beta}\equiv\hat a_{\alpha\beta}$, $|\alpha|$, $|\beta|\leqslant m$, и поэтому вся последовательность $\{A_k\}$ сильно G-сходится к $\hat A$ при $k\to\infty$. Для доказательства равенства $\Gamma_\alpha(\hat A, v)=\Gamma_\alpha(\tilde A, v)$ используем идеи доказательства леммы 1.

Пусть $v\in C_0^\infty(Q)$. Положим $f=(\tilde A+\lambda I)v$ и рассмотрим последовательность $u_{k'}$ решений задач

(94) $$(A_{k'}+\lambda I)u_{k'}=f,\quad u_{k'}\in\mathring H^m(Q),\qquad \lambda\geqslant\tilde\lambda_2.$$

Почти-решения этих задач представляем в виде

$$u^1_{k'}=v+\sum_{|\gamma|\leqslant m}N_\gamma^{\delta,k'}D^\gamma v.$$

Так же, как при доказательстве леммы 1, получаем соотношение

$$(A_{k'}+\lambda I)(u_{k'}-u^1_{k'})=\lambda_\delta^{k'},$$

где $\varlimsup\limits_{k'\to\infty}\|\lambda_\delta^{k'}\|_{-m}=C(\delta)$ и $C(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$.

Следовательно,

(95) $$\|\Gamma_\alpha(A_{k'},u_{k'})-\Gamma_\alpha(A_{k'},u^1_{k'})\|_0\leqslant c_1C(\delta),$$

где $c_1=\mathrm{const}$ и не зависит от k'. Переходя к пределу при $k'\to\infty$ в неравенстве (95) и учитывая лемму 5 и условие (91), получаем, что

(96) $$\|\Gamma_\alpha(\tilde A, v)-\Gamma_\alpha(\hat A^\delta, v)\|_0\leqslant c_1C(\delta),$$

где $\hat A^\delta$ — оператор, которому соответствует матрица коэффициентов $\{\hat a^\delta_{\alpha\beta}\}$, определенная условием (91). Используя условие (93) и переходя в неравенстве (96) к пределу при $\delta\to 0$, получим требуемое равенство. Теорема доказана.

3. Рассмотрим случай неограниченной области Q и покажем, как обобщаются для таких областей результаты § 3 о G-сходимости и сильной G-сходимости эллиптических операторов.

Под $\mathring H^m(Q)$ в случае неограниченной области Q будем понимать функциональное пространство, полученное пополнением функций из класса $C_0^\infty(Q)$ по норме

$$(\|u\|_m^2+\|u\|_0^2)^{1/2}.$$

Точно так же, как для ограниченной области Q, определяем класс операторов $E(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ и вводим понятие сильной G-сходимости для неограниченной области Q.

Заметим, что для оператора A: $\overset{\circ}{H}{}^m(Q) \to H^{-m}(Q)$ из класса $E(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ и неограниченной области Q не применима теорема 6, так как вложение пространства $\overset{\circ}{H}(Q)$ в $L^2(Q)$ не является компактным. Поэтому требуется дополнительно доказать, что определение сильного G-предела для последовательности $\{A_k\}$ не зависит от λ. Это установим на основе следующей теоремы.

Теорема 20. *Если Q — неограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и $A_k \in E(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$, то $A_k \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}$ в Q тогда и только тогда, когда $A_k \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}$ в любой ограниченной подобласти $Q' \subset Q$.*

Доказательство. Предположим, что $A_k \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}$ в любой ограниченной области $Q' \subset Q$. Построим последовательность u_k решений задач

$$(A_k + \lambda I)u_k = f, \quad u_k \in \overset{\circ}{H}{}^m(Q), \quad f \in H^{-m}(Q), \quad \lambda \geqslant \tilde{\lambda}_2.$$

Так как оператор $A_k + \lambda I$ коэрцитивный, то по теореме 1 величины $\| u_k \|_m^2 + \| u_k \|_0^2$ ограничены постоянной, не зависящей от k. Пусть $u_{k'} \to v$ слабо в $\overset{\circ}{H}{}^m(Q)$ при $k' \to \infty$. Тогда по лемме 6 $\Gamma_\alpha(A_{k'}, u_{k'}) \to \Gamma_\alpha(\hat{A}, v)$ при $k' \to \infty$ слабо в $L^2(Q')$. Поэтому, переходя к пределу при $k' \to \infty$ в равенстве

$$\langle (A_{k'} + \lambda I)u_{k'}, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle, \qquad \varphi \in C_0^\infty(Q),$$

получим, что

$$\langle (\hat{A} + \lambda I)v, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle.$$

Это означает, что $(\hat{A} + \lambda I)v = f$ в Q. Так как $\Gamma_\alpha(A_k, u_k)$ равномерно по k ограничены в норме $L^2(Q)$ и $\Gamma_\alpha(A_{k'}, u_{k'}) \to \Gamma_\alpha(\hat{A}, v)$ при $k' \to \infty$ слабо в $L^2(Q')$, то $\Gamma_\alpha(A_{k'}, u_{k'}) \to \Gamma_\alpha(\hat{A}, v)$ слабо в $L^2(Q)$. Это справедливо для любой подпоследовательности $\{A_{k'}\}$. Поэтому $A_k \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}$ в Q при $k \to \infty$.

Предположим теперь, что $A_k \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}$ в Q. Пусть Q_j — ограниченная область, $Q_j \subset Q_{j+1}, Q_j \subset Q$ и $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} Q_j = Q$. На основании теорем 9 и 7 с помощью диагонального процесса построим подпоследовательность $\{A_{k'}\}$ такую, что $A_{k'} \overset{G}{\Rightarrow} \tilde{A}$ в любой области Q_j.

Из свойства локальности сильной G-сходимости вытекает, что $A_k \overset{G}{\Rightarrow} \tilde{A}$ в любой ограниченной области Q'. Как было доказано выше, отсюда следует, что $A_{k'} \overset{G}{\Rightarrow} \tilde{A}$ в Q. Из единственности сильного G-предела получаем, что $\tilde{A} = \hat{A}$. Так как из любой подпоследовательности последовательности $\{A_k\}$ можно выбрать $\{A_{k'}\}$, обладающую указанными свойствами, то $A_k \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}$ в любой ограниченной области $Q' \subset Q$. Теорема доказана.

Из теоремы 20 вытекает, что для операторов $\{A_k\}$ из класса $E(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ в Q справедлива теорема 6, так как она имеет место в любой ограниченной области $Q' \subset Q$.

Теорема 21. *Любая последовательность операторов $\{A_k\}$ из класса $E(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ в Q содержит подпоследовательность $\{A_{k'}\}$ такую, что $A_{k'} \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}$, $\hat{A} \in E(\lambda_0, \tilde{\lambda}_1, \lambda_2)$, где $\tilde{\lambda}_1$ зависит только от $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$.*

Эта теорема является следствием теорем 20 и 9.

Заметим, что в случае неограниченной области из слабой сходимости в $\overset{\circ}{H}{}^m(Q)$ не следует сходимость последовательности в $L^2(Q)$. Однако для функций u_k, определенных при доказательстве теоремы 20, сходимость в $L^2(Q)$ может быть легко доказана.

4. Рассмотрим в ограниченной области Q более узкий, чем $E(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$, класс эллиптических операторов, который определяется свойствами билинейной формы (81).

Определение 9. Будем говорить, что *дифференциальный оператор A вида* (21) *принадлежит классу $\mathscr{E}(\lambda_0, \lambda_1, M)$ в Q*, если соответствующая ему билинейная форма (81) для почти всех x удовлетворяет следующим условиям при любых $\xi, \eta \in \mathbb{R}^p$:

$$\lambda_0 |\xi|^2 \leqslant a(x, \xi, \xi) \leqslant \lambda_1 |\xi|^2, \quad \lambda_0, \lambda_1 = \mathrm{const} > 0, \tag{97}$$

$$|a(x, \xi, \eta)| \leqslant M a^{1/2}(x, \xi, \xi) a^{1/2}(x, \eta, \eta), \quad M = \mathrm{const} > 0. \tag{98}$$

Легко видеть, что классу $\mathscr{E}(\lambda_0, \lambda_1, M)$ принадлежат, в частности, операторы вида $A + \lambda I$, где A — эллиптический оператор второго порядка, λ — достаточно большая постоянная. Из условия (97) следует, что $\mathscr{E}(\lambda_0, \lambda_1, M) \subset E(\lambda_0, \lambda_1', 0)$. Теория G-сходимости, развитая в предыдущих параграфах может быть построена для операторов класса $\mathscr{E}(\lambda_0, \lambda_1, M)$ более простым путем. Мы приведем здесь уточнение некоторых теорем § 3.

Теорема 22. *Любая последовательность операторов $\{A_k\}$ из класса $\mathscr{E}(\lambda_0, \lambda_1, M)$ содержит подпоследовательность $\{A_{k'}\}$ такую, что $A_{k'} \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}$ при $k' \to \infty$, $\hat{A} \in \mathscr{E}(\lambda_0, \lambda_1 M^2, M\lambda_1^{1/2}\lambda_0^{-1/2})$.*

Доказательство. Из теоремы 9 вытекает существование подпоследовательности $\{A_{k'}\}$ такой, что $A_{k'} \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}$ при $k' \to \infty$. Покажем, что $\hat{A} \in \mathscr{E}(\lambda_0, \lambda_1 M^2, M\lambda_1^{1/2}\lambda_0^{-1/2})$. Пусть $v \in C_0^\infty(Q)$, $f = \hat{A}v$, $A_k u_k = f$, $u_k \in \overset{\circ}{H}{}^m(Q)$. Из оценки (97) и теоремы 12 о сходимости энергии получаем

$$\lambda_0 \int_Q \varphi \sum_{|\alpha| \leqslant m} |D^\alpha v|^2 \, dx \leqslant \lambda_0 \varliminf_{k\to\infty} \int_Q \varphi \sum_{|\alpha| \leqslant m} |D^\alpha u_k|^2 \, dx \leqslant \lim_{k\to\infty} \int_Q \varphi s^k \, dx = \int_Q \varphi \hat{s} \, dx,$$

где

$$s^k = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} a_{\alpha\beta}^k D^\beta u_k D^\alpha u_k, \quad \hat{s} = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} \hat{a}_{\alpha\beta} D^\beta v D^\alpha v,$$

$$\varphi \in C_0^\infty(Q), \quad \varphi \geqslant 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$\lambda_0 \int_{Q'} \sum_{|\alpha| \leqslant m} |D^\alpha v|^2 \, dx \leqslant \int_{Q'} \hat{s} \, dx, \tag{99}$$

для любой области $Q' \subset Q$. Пусть x^0 — точка Лебега всех коэффициентов $\hat{a}_{\alpha\beta}$, $|\alpha| \leqslant m$, $|\beta| \leqslant m$. Выбирая $v(x)$ так, что $D^\alpha v(x^0) = \xi_\alpha$ $(|\alpha| \leqslant m)$, из неравенства (99) получаем, что

$$\hat{a}(x^0, \xi, \xi) = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} \hat{a}_{\alpha\beta}(x^0) \xi_\alpha \xi_\beta \geqslant \lambda_0 |\xi|^2. \tag{100}$$

Из неравенства (98) и (97) имеем при $\varphi, \psi \in C_0^\infty(Q)$, $\varphi \geqslant 0$

$$\left| \int_Q \varphi \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} a_{\alpha\beta}^k D^\beta u_k D^\alpha \psi \, dx \right| \leqslant M \lambda_1^{1/2} \left(\int_Q \varphi s^k \, dx \right)^{1/2} \left(\int_Q \varphi \sum_{|\alpha| \leqslant m} |D^\alpha \psi|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве при $k \to \infty$ и учитывая теорему 12, получим

$$(101)\quad \left| \int_{Q'} \sum_{|\alpha| \leqslant m} \Gamma_\alpha (v, \hat{A}) D^\alpha \psi \, dx \right| \leqslant M \lambda_1^{1/2} \left(\int_{Q'} \hat{s} \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{Q'} \sum_{|\alpha| \leqslant m} |D^\alpha \psi|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Полагая в неравенстве (101) $\psi = v$ находим, что

$$(102)\qquad \hat{a}(x^0, \xi, \xi) \leqslant M^2 \lambda_1 |\xi|^2.$$

Используя оценку (100), из неравенства (101) получаем, что

$$\left| \int_{Q'} \sum_{|\alpha| \leqslant m} \Gamma_\alpha (v, \hat{A}) D^\alpha \psi \, dx \right| \leqslant \lambda_0^{-1/2} M \lambda_1^{1/2} \left(\int_{Q'} \hat{s} \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{Q'} \sum_{|\alpha| \leqslant m} \Gamma_\alpha (\psi, \hat{A}) D^\alpha \psi \, dx \right)^{1/2}.$$

Отсюда, выбирая v и ψ так, что $D^\alpha v(x^0) = \xi_\alpha$, $D^\alpha \psi(x^0) = \eta_\alpha$, получим соотношение

$$(103)\qquad |\hat{a}(x^0, \xi, \eta)| \leqslant M \lambda_0^{-1/2} \lambda_1^{1/2} (\hat{a}(x^0, \xi, \xi))^{1/2} (\hat{a}(x^0, \eta, \eta))^{1/2}.$$

Из оценок (100), (102), (103) следует утверждение теоремы.

Заметим, что если $M = 1$, то оператор $\hat{A}$ удовлетворяет условию (97), как и операторы A_k. В частности, $M = 1$, если $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$, $|\alpha|, |\beta| \leqslant m$.

Обозначим через $S(\lambda_0, \lambda_1)$ класс операторов из $\mathscr{E}(\lambda_0, \lambda_1, M)$, для которых $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$.

Следующая теорема является уточнением теоремы 12 о сходимости энергии.

Теорема 23. *Пусть* $A_k \in \mathscr{E}(\lambda_0, \lambda_1, M)$ *и* $A_k \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}$. *Тогда для любой области* $Q' \subset Q$

$$(104)\qquad \int_{Q'} s^k \, dx \to \int_{Q'} \hat{s} \, dx,$$

где

$$s^k = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} a^k_{\alpha\beta} D^\beta u_k D^\alpha u_k, \quad \hat{s} = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} \hat{a}_{\alpha\beta} D^\beta v D^\alpha v,$$

$$A_k u_k = f, \quad u_k \in \mathring{H}^m(Q), \quad f = \hat{A} v, \quad v \in \mathring{H}^m(Q).$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(Q)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, $\varphi \equiv 1$ на Q', и пусть $\psi \in C_0^\infty(Q')$, $0 \leqslant \psi \leqslant 1$. Так как, по условию (97), $s^k \geqslant 0$, то

$$\int_Q \psi s^k \, dx \leqslant \int_{Q'} s^k \, dx \leqslant \int_Q \varphi s^k \, dx.$$

На основании теоремы 12 получаем

$$\int_Q \psi \hat{s} \, dx \leqslant \varliminf_{k \to \infty} \int_{Q'} s^k \, dx \leqslant \varlimsup_{k \to \infty} \int_{Q'} s^k \, dx \leqslant \int_Q \varphi \hat{s} \, dx.$$

Устремляя в этих неравенствах φ и ψ к характеристической функции множества Q', получим (104). Теорема доказана.

5. Сделаем некоторые замечания относительно G-сходимости эллиптических операторов второго порядка. Этому вопросу было посвящено большое число работ (см., например, [28], [29], [31], [38], [50] и др.).

Теорема 24. *Пусть* $A_k \in S(\lambda_0, \lambda_1)$, $m = 1$, $A_k \xrightarrow{G} \hat{A}$ в Q. *Тогда оператор* $\hat{A}$ *можно единственным образом представить в виде дифферен-*

циального оператора с такой симметрической матрицей коэффициентов $\{\hat{a}_{\alpha\beta}\}$, *что* $A_k \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}$.

Доказательство. Так как $A_k \in S(\lambda_0, \lambda_1)$, то $A_k^* = A_k$. Выберем подпоследовательность $\{A_{k'}\}$ такую, что $A_{k'} \overset{G}{\Rightarrow} \tilde{A}$ и $A_{k'}^* \overset{G}{\Rightarrow} \tilde{A}^*$. Это возможно в силу теорем 9 и 14. Но так как $A_k = A_k^*$, то $\tilde{A} = \tilde{A}^*$ и, следовательно, $\tilde{a}_{\alpha\beta} = \tilde{a}_{\beta\alpha}$, где $\{\tilde{a}_{\alpha\beta}\}$ — матрица коэффициентов, соответствующая оператору $\tilde{A}$. В силу единственности G-предела $\hat{A} = \tilde{A}$. Поэтому, если для другой подпоследовательности $\{A_{k''}\}$ имеем $A_{k''} \overset{G}{\Rightarrow} \tilde{\tilde{A}}$, то $\tilde{\tilde{A}} = \hat{A}$, и оператору $\tilde{\tilde{A}}$ соответствует матрица коэффициентов $\{\tilde{\tilde{a}}_{\alpha\beta}\}$, $\tilde{\tilde{a}}_{\alpha\beta} = \tilde{\tilde{a}}_{\beta\alpha}$. Покажем, что $\tilde{a}_{\alpha\beta} = \tilde{\tilde{a}}_{\alpha\beta}$ при $|\alpha|, |\beta| \leqslant 1$. Этого достаточно для доказательства теоремы. Из равенства операторов $\tilde{A}$, $\tilde{\tilde{A}}$ вытекает, что

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant 1} (\tilde{a}_{\alpha\beta}D^\beta u,\ D^\alpha u) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant 1} (\tilde{\tilde{a}}_{\alpha\beta}D^\beta u,\ D^\alpha u) \tag{105}$$

для любой функции $u \in \mathring{H}^1$. Положим в равенстве (105) $u = e^{(x,\xi)}\varphi(x)$, где $\varphi \in C_0^\infty(Q)$, $(x,\ \xi) = \sum_{i=1}^n x_i\xi_i$. Получим

$$\Big(\sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \tilde{a}_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta\varphi,\ \varphi e^{2(x,\xi)}\Big) = \Big(\sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \tilde{\tilde{a}}_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta\varphi,\ \varphi e^{2(x,\xi)}\Big) + \theta(\xi),$$

где $|\theta(\xi)| \leqslant c|\xi|$, $c = \mathrm{const}$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\ldots\xi_n^{\alpha_n}$. Это равенство возможно лишь в случае, когда почти всюду в Q

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \tilde{a}_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta = \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \tilde{\tilde{a}}_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta.$$

Отсюда вытекает, что $\tilde{\tilde{a}}_{\alpha\beta} = \tilde{a}_{\alpha\beta}$ почти всюду в Q при $|\alpha| = |\beta| = 1$. Учитывая полученное равенство коэффициентов и снова рассматривая (105) при $u = e^{(x,\xi)}\varphi$, находим

$$\Big(\sum_{|\alpha|+|\beta|=1} \tilde{a}_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta,\ \varphi^2 e^{2(x,\xi)}\Big) = \Big(\sum_{|\alpha|+|\beta|=1} \tilde{\tilde{a}}_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta,\ \varphi^2 e^{2(x,\xi)}\Big) + \theta_1(\xi),$$

где $|\theta_1(\xi)| \leqslant c_1$, $c_1 = \mathrm{const} > 0$. Отсюда следует, что

$$\sum_{|\alpha|+|\beta|=1} \tilde{a}_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta = \sum_{|\alpha|+|\beta|=1} \tilde{\tilde{a}}_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta.$$

Так как матрицы $\{\tilde{\tilde{a}}_{\alpha\beta}\}$ и $\{\tilde{a}_{\alpha\beta}\}$ симметричны, то $\tilde{a}_{\alpha\beta} = \tilde{\tilde{a}}_{\alpha\beta}$ при $|\alpha| + |\beta| = 1$. Учитывая полученные равенства, из (105) находим, что $\tilde{a}_{\alpha\beta} = \tilde{\tilde{a}}_{\alpha\beta}$ при $|\alpha| = |\beta| = 0$. Теорема доказана.

Из теоремы 22 и того, что $\hat{A}^* = \hat{A}$, если $A_k^* = A_k$ и $A_k \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}$, вытекает, что класс $S(\lambda_0, \lambda_1)$ замкнут в смысле сильной G-сходимости.

6. В связи с тем, что явное построение коэффициентов G-предельного оператора возможно лишь в ряде специальных случаев, важное значение приобретают методы приближенного вычисления и априорные оценки этих коэффициентов. Ниже излагается метод двусторонних вариационных оценок коэффициентов G-предельного оператора для последовательности операторов $\{A_k\}$ из класса $S(\lambda_0, \lambda_1)$.

Для оператора $A \in S(\lambda_0, \lambda_1)$ с матрицей коэффициентов $\{a_{\alpha\beta}\}$ введем функционал

$$(106)\qquad T(A, \xi, x^0, \rho) = \inf_M \left\{ |B_\rho^{x^0}|^{-1} \int\limits_{B_\rho^{x^0}} \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta} D^\beta u D^\alpha u\, dx \right\},$$

где M — множество функций u из $H^m(B_\rho^{x^0})$, удовлетворяющих условию

$$u - \varphi_\xi(x, x^0) \in \mathring{H}^m(B_\rho^{x^0}),\quad \varphi_\xi = \sum_{|\gamma|\leqslant m} (\gamma!)^{-1} (x - x^0)^\gamma \xi_\gamma,$$

$|B_\rho^{x^0}|$ — объем шара $B_\rho^{x^0} = \{x\colon |x - x^0| \leqslant \rho\}$, $\xi \in \mathbb{R}^p$. Очевидно, минимизирующей функцией $u_0(x)$ для этого функционала является решение следующей задачи:

$$(107)\qquad Au_0 = 0,\quad u_0 - \varphi_\xi \in \mathring{H}^m(B_\rho^{x^0}).$$

Согласно условию (97) решение u_0 этой задачи существует и единственно. В силу (107) имеем

$$(108)\qquad T(A, \xi, x^0, \rho) = |B_\rho^{x^0}|^{-1} \int\limits_{B_\rho^{x^0}} \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta} D^\beta u_0 D^\alpha u_0\, dx.$$

Поэтому точно так же, как и при доказательстве леммы 10, получаем, что

$$(109)\qquad \lim_{\rho\to 0} T(A, \xi, x^0, \rho) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta}(x^0) \xi_\alpha \xi_\beta$$

для почти всех $x^0 \in Q$.

Рассмотрим последовательность $\{A_k\}$, где A_k соответствует матрица коэффициентов $\{a_{\alpha\beta}^k\}$, $|\alpha|$, $|\beta| \leqslant m$ и $A_k \in S(\lambda_0, \lambda_1)$. Выберем произвольную подпоследовательность $\{k'\}$ такую, что при $k' \to \infty$

$$(110)\qquad a_{\alpha\beta}^{k'} \to \bar{a}_{\alpha\beta},\quad b_{\alpha\beta}^{k'} \to \bar{b}_{\alpha\beta},\qquad |\alpha|,\qquad |\beta| \leqslant m,$$

слабо в $L^2(Q)$, где через $\{b_{\alpha\beta}^k\}$ обозначена матрица, обратная к $\{a_{\alpha\beta}^k\}$.

Теорема 25. *Если $A_k \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}$, то для почти всех $x^0 \in Q$ справедливы оценки*

$$(111)\quad |\xi|^4 \Big(\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m} \bar{b}_{\alpha\beta}(x^0) \xi_\alpha \xi_\beta \Big)^{-1} \leqslant \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m} \hat{a}_{\alpha\beta}(x^0) \xi_\alpha \xi_\beta \leqslant \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m} \bar{a}_{\alpha\beta}(x^0) \xi_\alpha \xi_\beta,$$

где $\{\hat{a}_{\alpha\beta}\}$ — матрица коэффициентов оператора $\hat{A}$.

Доказательство. Установим сначала оценку сверху в (111). Из теоремы 15 и равенства (108) вытекает, что

$$\lim_{k\to\infty} T(A_k, \xi, x^0, \rho) = T(\hat{A}, \xi, x^0, \rho).$$

Подставляя в (106) $u = \varphi_\xi$, получим

$$T(A_k, \xi, x^0, \rho) \leqslant |B_\rho^{x^0}|^{-1} \int\limits_{B_\rho^{x^0}} \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta}^k(x) \xi_\alpha \xi_\beta\, dx + \theta(\rho),$$

где $\theta(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$, находим, что

$$(112)\qquad T(\hat{A}, \xi, x^0, \rho) \leqslant |B_\rho^{x^0}|^{-1} \int\limits_{B_\rho^{x^0}} \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m} \bar{a}_{\alpha\beta}(x) \xi_\alpha \xi_\beta\, dx + \theta(\rho).$$

При $\rho \to 0$ из оценки (112) и соотношения (109) получаем оценку сверху (111).

Для получения оценки снизу для $a(x, \xi, \xi)$ рассмотрим сопряженную вариационную задачу (см. [100]). Положим

$$(113)\qquad \mathcal{F}_k = \sup_{\mathfrak{M}} \int_{B_\rho^{x^0}} |B_\rho^{x^0}|^{-1} \Big(2 \sum_{|\alpha|\leqslant m} p_\alpha D^\alpha \varphi_\xi - \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m} b_{\alpha\beta}^k p_\alpha p_\beta\Big)\, dx,$$

где $\mathfrak{M}$ — множество вектор-функций $p = \{p_\alpha\}$, $|\alpha| \leqslant m$, таких, что $p_\alpha \in L^2(Q)$ при любом $|\alpha| \leqslant m$ и

$$(114)\qquad \int_{B_\rho^{x^0}} \sum_{|\alpha|\leqslant m} p_\alpha D^\alpha \varphi\, dx = 0,$$

для любой функции $\varphi \in \mathring{H}^m(B_\rho^{x^0})$. Обозначим интеграл в правой части (113) через $\mathcal{F}_k(p)$. Пусть u_0^k — решение вариационной задачи (106) при $A = A_k$. Покажем, что $p^0 = \{p_\alpha^0\}$, где

$$(115)\qquad p_\alpha^0 = \sum_{|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta}^k D^\beta u_0^k,$$

является единственным решением вариационной задачи (113), причем $T(A_k, \xi, x^0, \rho) = \mathcal{F}_k$.

Действительно, $\{p_\alpha^0\}$ в силу (107) удовлетворяет условию (114) и $p_\alpha^0 \in L^2(B_\rho^{x^0})$ при любом $|\alpha| \leqslant m$. Далее, для любого $p = \{p_\alpha\}$ такого, что $p_\alpha \in L^2(B_\rho^{x^0})$ и выполнено (114), имеем

$$(116)\qquad \mathcal{F}_k(p) = \mathcal{F}_k(p^0 + (p - p^0)) = \mathcal{F}_k(p^0) + \mathcal{F}_k(p - p^0) - $$
$$- 2\int_{B_\rho^{x^0}} |B_\rho^{x^0}|^{-1} \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m} b_{\alpha\beta}^k p_\beta^0 (p_\alpha - p_\alpha^0)\, dx \leqslant \mathcal{F}_k(p^0),$$

так как $-\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m} \int_{B_\rho^{x_0}} 2 b_{\alpha\beta}^k p_\beta^0 (p_\alpha - p_\alpha^0)\, dx + \sum_{|\alpha|\leqslant m} 2 \int_{B_\rho^{x^0}} (p_\alpha - p_\alpha^0) D^\alpha \varphi_\xi\, dx = 0$

в силу условия (114) и соотношения (115). Из неравенства (116) также вытекает, что равенство $\mathcal{F}_k(p) = \mathcal{F}(p^0)$ возможно лишь при $p \equiv p^0$. Подставляя в (113) $p = p^0$ и пользуясь (115), получим, что $\mathcal{F}_k = T(A_k, \xi, x^0, \rho)$. Положим в правой части (113) $p_\alpha = c\xi_\alpha$, $\xi_\alpha = 0$ при $|\alpha| = 0$, $c = \mathrm{const}$. Имеем

$$(117)\qquad T(A_k, \xi, x^0, \rho) \geqslant |B_\rho^{x^0}|^{-1} \int_{B_\rho^{x^0}} \Big(2c \sum_{|\alpha|\leqslant m} \xi_\alpha^2 - c^2 \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m} b_{\alpha\beta}^k \xi_\alpha \xi_\beta\Big)\, dx + \theta_\rho,$$

где $\theta_\rho \to 0$ при $\rho \to 0$. Выберем

$$c = |\xi|^2 |B_\rho^{x^0}| \Big(\int_{B_\rho^{x^0}} \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m} \xi_\alpha \xi_\beta b_{\alpha\beta}^k\, dx\Big)^{-1}.$$

Тогда из (117) получаем

$$(118)\qquad T(A_k, \xi, x^0, \rho) \geqslant |\xi|^4 |B_\rho^{x^0}| \Big(\int_{B_\rho^{x^0}} \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m} \xi_\alpha \xi_\beta b_{\alpha\beta}^k\, dx\Big)^{-1} + \theta_\rho.$$

Переходя к пределу в неравенстве (118) сначала при $k \to \infty$, а затем $\rho \to 0$, получим требуемую оценку, если $\xi_\alpha = 0$ при $|\alpha| = 0$. В случае $\xi_\alpha \neq 0$ при $|\alpha| = 0$ доказательство аналогично.

ГЛАВА II
УСРЕДНЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

§ 1. Вспомогательные сведения. Формулировка основных теорем об усреднении

Как было сказано во введении, задача усреднения дифференциального оператора состоит в доказательстве существования и указании способа построения G-предельного оператора при $\varepsilon \to 0$ для семейства операторов вида

$$(1)\qquad A^{\varepsilon} \equiv \sum_{|\alpha|,\,|\beta| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} (a_{\alpha\beta}(\varepsilon^{-1}x)\, D^{\beta}).$$

Случай, когда коэффициенты $a_{\alpha\beta}(x)$ — периодические функции и A^{ε} — эллиптический оператор, изучен в § 4 главы I. В главе II коэффициенты эллиптического оператора (1) рассматриваются как реализации функций, заданных на вероятностном пространстве с многомерной динамической системой. Этот подход позволяет единым методом доказать теоремы об усреднении для операторов с почти-периодическими коэффициентами, случайными коэффициентами и других.

Целью последующих рассмотрений является доказательство того, что для семейства операторов A^{ε} при определенных ограничениях выполнено условие N^{δ}, которое, как показано в § 5 главы I, представляет собою необходимое и достаточное условие сильной G-сходимости.

1. Введем некоторые определения и сформулируем ряд известных вспомогательных предложений, которые существенно используются в дальнейшем.

Введем прежде всего понятие среднего значения функции многих переменных, заданной на $\mathbb{R}^n$.

Пусть $g(x)$-измеримая функция на $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим семейство функций $g(\varepsilon^{-1}x) = g(\varepsilon^{-1}x_1, \varepsilon^{-1}x_2, \ldots, \varepsilon^{-1}x_n)$, где ε — положительная постоянная, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Предположим, что это семейство функций равномерно ограничено в $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, т. е. равномерно по ε ограничено по норме $L^2(Q)$ для любой ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 1. Будем говорить, что *функция* $g(x)$ *имеет среднее значение*, и обозначать это число через $M\{g\}$, если $g(\varepsilon^{-1}x) \to M\{g\}$ слабо в $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ при $\varepsilon \to 0$.

Если функция g зависит еще и от других переменных или параметров, то в таких случаях во избежание недоразумений ее среднее значение как функции x будем обозначать иногда $M_x\{g\}$.

Таким образом, если число $M\{g\}$ есть среднее значение функции $g(x)$, то согласно определению

$$(2)\qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} g(\varepsilon^{-1}x)\, \varphi(x)\, dx = M\{g\} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx$$

для любой функции $\varphi(x) \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Очевидно, условие (2) эквивалентно условию

$$(3)\qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{Q} g(\varepsilon^{-1}x)\, dx = M\{g\}\, |Q|,$$

где $|Q|$ — мера Лебега области Q, $|Q| > 0$. Если в интеграле, стоящем в левой части (3), сделать замену переменных $x = \varepsilon y$, то, снова обозначив переменные y через x, получим

$$(4)\qquad M\{g\}=\lim_{\varepsilon\to 0}|Q_\varepsilon|^{-1}\int_{Q_\varepsilon} g(x)\,dx,$$

где $Q_\varepsilon = \{x\colon \varepsilon x \in Q\}$. Очевидно, из определения 1 вытекает, что каждое из условий (2) — (4) эквивалентно тому, что $g(x)$ имеет среднее значение $M\{g\}$.

Иногда используется более жесткое определение среднего значения.

Определение 2. Число $M\{g\}$ назовем *средним значением функции* $g(x)$ *на* $\mathbb{R}^n$, если

$$(5)\qquad g(\varepsilon_1^{-1}x_1,\ \varepsilon_2^{-1}x_2,\ \ldots,\ \varepsilon_n^{-1}x_n)\to M\{g\}$$

слабо в $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$, когда $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ независимо стремятся к нулю.

Определение 3. Будем говорить, что *функция* $g(x)$ *на* $\mathbb{R}^n$ *имеет равномерное среднее* $M\{g\}$, если для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$(6)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} g(\varepsilon^{-1}x+h)\,\varphi(x)\,dx = M\{g\}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\,dx,$$

причем сходимость функций от h, заданных интегралами, стоящими в левой части (6), равномерна относительно $h \in \mathbb{R}^n$.

Примером функции, имеющей равномерное среднее, является почти-периодическая функция (см. [92]).

Пусть Ω — вероятностное пространство, т. е. множество с выделенной σ-алгеброй его подмножеств и вероятностной мерой μ, заданной на этой σ-алгебре. Последнее означает, что мера μ — положительна, счетно-аддитивна и нормирована $\mu(\Omega) = 1$.

Определение 4. Будем называть *n-мерной динамической системой* семейство отображений $T(x)\colon \Omega \to \Omega$, $x \in \mathbb{R}^n$, для которого выполнены следующие условия:

1) мера μ инвариантна при отображениях $T(x)$ при любом $x \in \mathbb{R}^n$,

2) $T(0) = I$, $T(x + y) = T(x)T(y)$, где $x, y \in \mathbb{R}^n$, I — тождественное преобразование,

3) отображение $T\colon \mathbb{R}^n \times \Omega \to \Omega$, переводящее точку (x, ω) в точку $T(x)\omega$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\omega \in \Omega$,— измеримо, если на $\mathbb{R}^n$ задана борелевская σ-алгебра.

Пусть $f(\omega) \in L^2(\Omega) \equiv L^2(\Omega, d\mu)$ [1]. Так как функция $f(T(x)\omega)$ измерима на $\mathbb{R}^n \times \Omega$, то по теореме Фубини для почти всех $\omega \in \Omega$ функция $f(T(x)\omega)$ как функция x измерима относительно меры Лебега на $\mathbb{R}^n$.

Функция $f(T(x)\omega)$ как функция x на $\mathbb{R}^n$ называется *реализацией* функции $f(\omega)$ на траектории $T(x)\omega$.

Через $\langle f\rangle$ будем обозначать среднее по мере μ функции $f(\omega)$, т. е.

$$(7)\qquad \langle f\rangle = \int_\Omega f(\omega)\,d\mu.$$

Функция $f(\omega)$ называется *инвариантной* относительно динамической системы $T(x)$, если она μ-измерима и $f(\omega) = f(T(x)\omega)$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$ (почти всюду на Ω).

Динамическая система $T(x)$ называется *эргодической*, если инвариантными функциями являются только $f(\omega) \equiv \mathrm{const}$.

В дальнейшем будет использоваться следующий вариант эргодической теоремы Биркгофа (см. [94] стр. 737, [96]).

[1]) Всюду в дальнейшем пространство $L^2(\Omega)$ для простоты считается сепарабельным.

Эргодическая теорема. *Пусть* $f(\omega) \in L^2(\Omega) \equiv L^2(\Omega, d\mu)$. *Тогда для почти всех* $\omega \in \Omega$ *реализация* $f(T(x)\omega)$ *функции* $f(\omega)$ *имеет среднее значение* $M_x\{f(T(x)\omega)\}$, *которое является инвариантной функцией* ω *на* Ω. *Имеет место равенство* $\langle f\rangle = \langle M_x\{f(T(x)\omega)\}\rangle$. *Если динамическая система* $T(x)$ *эргодическая, то* $\langle f\rangle = M_x\{f(T(x)\omega)\}$.

2. Сформулируем статистическую и индивидуальную теоремы об усреднении эллиптических операторов.

Пусть на Ω задана n-мерная динамическая система $T(x)$.

Определение 5. Матрицу $\{a_{\alpha\beta}(\omega)\}$, $|\alpha|$, $|\beta| \leqslant m$, будем называть *эллиптической на* Ω, если функции $a_{\alpha\beta}(\omega)$ μ-измеримы на Ω и для почти всех ω их реализации $a_{\alpha\beta}(T(x)\omega)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\mathbb{R}^n} |a_{\alpha\beta}(T(x)\omega)| \leqslant \lambda_1, \qquad |\alpha|,\ |\beta| \leqslant m, \tag{8}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(T(x)\omega)\, D^\alpha u D^\beta u\, dx \geqslant \lambda_0 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2\, dx \tag{9}$$

для любой функции $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Постоянные λ_0, λ_1 — положительны и не зависят от ω.

Из определения 5 следует, что для почти всех $\omega \in \Omega$ семейство дифференциальных операторов

$$A^\varepsilon \equiv A^\varepsilon(\omega) = \sum_{|\alpha|,\,|\beta| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(T(\varepsilon^{-1}x)\omega)\, D^\beta), \tag{10}$$

соответствующее эллиптической на Ω матрице $\{a_{\alpha\beta}(\omega)\}$, в любой области $Q \subset \mathbb{R}^n$ принадлежит классу $E(\lambda_0, \lambda_1, 0)$. Поэтому к таким операторам применима теория G-сходимости эллиптических операторов, развитая в главе I.

В § 3 будет доказана следующая статистическая теорема об усреднении.

Теорема 1. *Для почти всех* $\omega \in \Omega$ *и любой области* $Q \subset \mathbb{R}^n$ *для семейства эллиптических операторов* (10) *имеем*

$$A_\varepsilon(\omega) \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}(\omega) \tag{11}$$

при $\varepsilon \to 0$. *Коэффициенты G-предельного оператора* $\hat{A}(\omega)$ *не зависят от* x *и являются инвариантными функциями* ω. *Если динамическая система* $T(x)$ *эргодическая, то коэффициенты* $\hat{A}(\omega)$ *не зависят также и от* $\omega \in \Omega$.

Эта теорема будет получена как следствие теоремы 19 главы I, так как в § 3 настоящей главы будет доказано, что семейство (10) с эллиптической на Ω матрицей $\{a_{\alpha\beta}(\omega)\}$ для почти всех ω удовлетворяет условию N^δ.

При дополнительных условиях на динамическую систему $T(x)$ можно доказать индивидуальные теоремы об усреднении, когда соотношение (11) имеет место для всех $\omega \in \Omega$.

Определение 6. Пусть Ω — метрический компакт. Будем называть *строго эргодической динамической системой* семейство отображений $T(x)$: $\Omega \to \Omega$, $x \in \mathbb{R}^n$, для которого выполнены следующие условия:

1) $T(0) = I$, $T(x + y) = T(x)T(y)$ для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$, I — тождественное преобразование;

2) отображение T: $\mathbb{R}^n \times \Omega \to \Omega$, переводящее точку (x, ω) в точку $T(x)\omega$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\omega \in \Omega$, непрерывно;

3) для всякой непрерывной функции $f(\omega)$ на Ω ее реализация $f(T(x)\omega)$ при всех $\omega \in \Omega$ имеет среднее, причем $M_x\{f(T(x)\omega)\}$ не зависит от $\omega \in \Omega$.

Отметим, что по теореме Крылова — Боголюбова (см. [93], [98]) на компакте Ω с динамической системой $T(x)$, удовлетворяющей условиям 1) и 2) определения 6, существует инвариантная нормированная мера. Поэтому статистическая теорема 1 об усреднении справедлива и в случае строго эргодической динамической системы. Однако в этом случае имеет место более сильная, индивидуальная теорема об усреднении:

Теорема 2. *Пусть $T(x)$ — строго эргодическая динамическая система, матрица $\{a_{\alpha\beta}(\omega)\}$, $|\alpha|$, $|\beta| \leqslant m$, является эллиптической на Ω, причем функции $a_{\alpha\beta}(\omega)$, $|\alpha|$, $|\beta| \leqslant m$, непрерывны на Ω и условия* (8) *и* (9) *выполнены для всех $\omega \in \Omega$. Тогда для любого $\omega \in \Omega$ и любой области $Q \subset \mathbb{R}^n$ для семейства эллиптических операторов* (10) *имеем $A^\varepsilon(\omega) \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}$ при $\varepsilon \to 0$. Коэффициенты оператора $\hat{A}$ постоянны.*

3. Рассмотрим некоторые важные конкретные примеры, в которых выполнены условия теоремы 1 или теоремы 2.

Пусть $f(x) = \{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_s(x)\}$ — ограниченная, равномерно непрерывная на $\mathbb{R}^n$ вектор-функция. Рассмотрим семейство сдвигов $\{f(x+h)\}$, где h пробегает $\mathbb{R}^n$. Замкнем это семейство в топологии равномерной сходимости на компактах в $\mathbb{R}^n$. Обозначим полученное компактное метрическое пространство через Ω. Элементами Ω очевидно являются вектор-функции вида $\overline{f}(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x+h_k)$, причем сходимость равномерная на каждом компакте в $\mathbb{R}^n$. Определим динамическую систему $T(y)$ на Ω, полагая

$$T(y)\overline{f}(x) = \overline{f}(x+y).$$

Легко видеть, что условия 1) и 2) определения 6 выполнены. Обозначим через $\mathring{f}(\omega)$ вектор-функцию на Ω, которая на элементе $\omega = \overline{f}(x) \in \Omega$ равна $\overline{f}(0)$. Легко видеть, что $\mathring{f}(\omega)$ непрерывна на Ω и $\overline{f}(y) = \mathring{f}(T(y)\omega)$, т. е. элементы $\omega = \overline{f}(x)$ из Ω как функции $x \in \mathbb{R}^n$ являются реализациями функции $\mathring{f}(\omega)$.

Пусть $\{a_{\alpha\beta}(x)\}$ — матрица коэффициентов дифференциального оператора из класса $E(\lambda_0, \lambda_1, 0)$ и пусть $a_{\alpha\beta}(x)$ — ограниченные, равномерно непрерывные функции на $\mathbb{R}^n$. Положим $f(x) = \{a_{\alpha\beta}(x)\}$, $|\alpha|$, $|\beta| \leqslant m$. Обозначим вектор-функцию $\mathring{f}(\omega)$ через $\{\mathring{a}_{\alpha\beta}(\omega)\}$. Очевидно, матрица $\{\mathring{a}_{\alpha\beta}(\omega)\}$ является эллиптической на Ω и ее реализации, определяющие коэффициенты оператора A^ε при $\varepsilon = 1$, заданного равенством (10), представляют собою функции вида

$$\lim_{k\to\infty} a_{\alpha\beta}(x+h_k), \qquad h_k \in \mathbb{R}^n \tag{12}$$

причем сходимость равномерная на каждом компакте в $\mathbb{R}^n$. Следовательно, по теореме 1 имеет место усреднение операторов A^ε вида (1) с матрицей коэффициентов вида (12) для почти всех таких матриц (в смысле любой вероятностной инвариантной меры на Ω).

Для того чтобы гарантировать усреднение для всех операторов A^ε с матрицей коэффициентов (12) и, в частности, для первоначально заданного оператора с матрицей коэффициентов $\{a_{\alpha\beta}(x)\}$, нужно наложить дополнительные условия на вектор-функцию $f(x)$, которые обеспечивают выполнение условия 3) определения 6 строго эргодической динамической системы.

Определение 7. Вектор-функция $f(x) = \{f_1(x), \ldots, f_s(x)\}$ называется *строго эргодической*, если любые произведения вида

$$f_{i_1}(x+h_1)\, f_{i_2}(x+h_2) \ldots f_{i_k}(x+h_k), \tag{13}$$

где $k > 0$ — любое целое число, $h_j \in \mathbb{R}^n$ ($j = 1, 2, \ldots, k$), индексы $i_1, i_2, \ldots$ $\ldots, i_k$ независимо принимают значения $1, 2, \ldots, s$, имеют равномерные средние в смысле определения 3.

Рассмотрим семейство функций

$$(14) \qquad f_1^h(\omega), \ldots, f_s^h(\omega), \qquad h \in \mathbb{R}^n,$$

где $f_j^h(\omega) = \mathring{f}_j(T(h)\omega)$ и $f(\omega) = \{\mathring{f}_1(\omega), \ldots, \mathring{f}_s(\omega)\}$.

Семейство функций (14) разделяет точки на Ω и поэтому, присоединяя, если нужно, к (14) функцию, равную тождественно единице на Ω, получим по теореме Стоуна — Вейерштрасса (см. [98]), что линейная оболочка функций на Ω вида

$$(15) \qquad f_{i_1}^{h_1}(\omega) f_{i_2}^{h_2}(\omega) \ldots f_{i_k}^{h_k}(\omega),$$

где $k > 0$ — любое целое число, $h_j \in \mathbb{R}^n$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$, индексы $i_1, i_2, \ldots$ $\ldots, i_k$ независимо принимают значения $1, 2, \ldots, s$, плотна в $C(\Omega)$.

Покажем теперь, что если вектор-функция $f = \{f_1, \ldots, f_s\}$ строго эргодична, то построенная выше динамическая система $T(x)$ на Ω удовлетворяет условию 3) определения 6.

Для этого нужно показать, что реализация всякой непрерывной функции $f(\omega)$ на Ω имеет равномерное среднее в смысле определения 3, не зависящее от ω.

Очевидно, это свойство достаточно проверить для функций вида (15). Реализациями функции вида (15) являются функции вида

$$(16) \qquad \bar{f}_{i_1}(x+h_1) \bar{f}_{i_2}(x+h_2) \ldots \bar{f}_{i_k}(x+h_k).$$

Так как $\bar{f}(x) = \lim\limits_{l\to\infty} f(x + y_l)$, причем сходимость равномерна на каждом компакте в $\mathbb{R}^n$, то легко видеть, что из строгой эргодичности вектор-функции $f(x)$ следует существование равномерного среднего для функций вида (16).

Следствием теоремы 2 и проведенных выше построений является следующая основная теорема, которая содержит многие известные результаты об усреднении конкретных эллиптических операторов.

Теорема 3. *Пусть $\{a_{\alpha\beta}(x)\}$ $(|\alpha|, |\beta| \leqslant m)$ — матрица коэффициентов дифференциального оператора из класса $E(\lambda_0, \lambda_1, 0)$ в $\mathbb{R}^n$, и пусть $a_{\alpha\beta}(x)$ — ограниченные, равномерно непрерывные функции на $\mathbb{R}^n$. Предположим, что для любого произведения вида*

$$a_{\alpha^1\beta^1}(x+h_1) \ldots a_{\alpha^k\beta^k}(x+h_k),$$

где $|\alpha^j|$, $|\beta^j| \leqslant m$, $h_j \in \mathbb{R}^n, j = 1, \ldots, k$; $k>0$ — любое целое число, существует равномерное среднее в смысле определения 3. Тогда для дифференциальных операторов вида (1) и любой области $Q \subset R^n$ имеем

$$A^\varepsilon \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}$$

при $\varepsilon \to 0$, причем эллиптический оператор $\hat{A}$ имеет постоянные коэффициенты.

Заметим, что условиям теоремы 3 удовлетворяют дифференциальные операторы с периодическими, квазипериодическими, почти-периодическими коэффициентами (см. [92]), а также с коэффициентами вида $a_{\alpha\beta}(x) + a^1_{\alpha\beta}(x)$, где $a_{\alpha\beta}(x)$ — почти-периодическая функция, а $a^1_{\alpha\beta}(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$.

4. Рассмотрим эллиптические операторы со случайными коэффициентами. Пусть $\tilde{\Omega}$ — вероятностное пространство с σ-алгеброй его подмножеств и вероятностной мерой P, заданной на этой σ-алгебре. Пусть

$$f(\tilde{\omega}, x) = \{f_1(\tilde{\omega}, x), \ldots, f_s(\tilde{\omega}, x)\}, \quad \tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

случайная вектор-функция, т. е. измеримое отображение $f: \tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$.

Определение 8. Вектор-функцию $f(\tilde{\omega}, x)$ будем называть *однородным случайным полем*, если все ее конечномерные распределения инвариантны относительно сдвига, т. е. величина

$$P\{\tilde{\omega}\in\tilde{\Omega}:\ f(\tilde{\omega},\ x^1+h)\in B_1,\ \ldots,\ f(\tilde{\omega},\ x^k+h)\in B_k\}$$

не зависит от $h\in\mathbb{R}^n$. Здесь $B_1, \ldots, B_k$ — борелевские множества в $\mathbb{R}^s$.

Приведем здесь хорошо известные построения, позволяющие рассматривать вектор-функцию $f(\tilde{\omega}, x)$ как реализацию функций, заданных на некотором вероятностном пространстве Ω с динамической системой $T(x)$, удовлетворяющей условиям, указанным в определении 4.

В качестве Ω возьмем множество всех измеримых вектор-функций $\omega:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^s$. Положим $T(y)\omega(x)=\omega(x+y)$, $y\in\mathbb{R}^n$. Выделим на Ω σ-алгебру F его подмножеств, порожденную цилиндрическими множествами. Зададим меру μ на F, полагая для любого $B\in F$

$$\mu(B)=P(\tilde{\omega}\in\tilde{\Omega}:\ f(\tilde{\omega},\ x)\in B).$$

Можно доказать (см. [95], стр. 456—458), что мера μ инвариантна при отображении $T(x)$ и выполнены другие условия определения 4.

Рассмотрим на Ω μ-измеримую функцию $\mathring{f}(\omega)$: $\omega\to\omega(0)$.

Тогда $f(\tilde{\omega}, x)=\mathring{f}(T(x)\omega)$, где $\omega=f(\tilde{\omega}, x)$.

Пусть $f(\tilde{\omega}, x)$ — матрица коэффициентов $\{a_{\alpha\beta}(\tilde{\omega}, x)\}$, соответствующих для почти всех $\tilde{\omega}$ по мере P оператору класса $E(\lambda_0, \lambda_1, 0)$ и образующих однородное случайное поле. Тогда как следствие теоремы 1 и приведенных выше построений получаем следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть коэффициенты* $\{a_{\alpha\beta}(\tilde{\omega}, x)\}$ $(|\alpha|, |\beta|\leqslant m)$ *образуют однородное случайное поле и оператор*

$$A=\sum_{|\alpha|,\ |\beta|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}(a_{\alpha\beta}(\tilde{\omega},\ x)\,D^{\beta})$$

при почти всех $\tilde{\omega}$ по мере P принадлежит классу $E(\lambda_0, \lambda_1, 0)$. Тогда семейство операторов

$$A^{\varepsilon}(\tilde{\omega})=\sum_{|\alpha|,\ |\beta|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}(a_{\alpha\beta}(\tilde{\omega},\ \varepsilon^{-1}x)\,D^{\beta}) \tag{16}$$

для почти всех $\tilde{\omega}$ сильно G-сходится при $\varepsilon\to 0$ к эллиптическому оператору $\hat{A}(\tilde{\omega})$, коэффициенты которого не зависят от x.

§ 2. Исследование уравнений для функций N_{γ}

Как уже отмечалось, теоремы 1 и 2 будут получены как следствие теоремы 19 главы I. Для этого будет доказано, что при соответствующих предположениях для операторов A^{ε} выполнено условие N^{δ}. Для построения функций N^{δ}_{γ} будут исследованы уравнения вида

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}(-1)^m D^{\alpha}_y(a_{\alpha\beta}(T(y)\,\omega)\,D^{\beta}_y N_{\gamma}(T(y)\,\omega))= -\sum_{|\alpha|=m}(-1)^m D^{\alpha}_y(a_{\alpha\gamma}(T(y)\,\omega)), \tag{17}$$

аналогичные тем, которые рассматривались в § 4 главы I при изучении дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами.

В дальнейшем будем предполагать, что динамическая система $T(x)$ на вероятностном пространстве Ω с мерой μ является эргодической. (Общий случай нетрудно свести к рассматриваемому.)

1. Проведем некоторые вспомогательные построения. Рассмотрим в $L^2(\Omega)$ n-параметрическую группу унитарных операторов $U(x)$: $L^2(\Omega)\to$

$\to L^2(\Omega)$, $x \in \mathbb{R}^n$, где $U(x)\varphi(\omega) = \varphi(T(x)\omega)$. Известно (см. [94], стр. 736), что эта группа сильно непрерывна. При $x^i = (x_1, \ldots, x_n)$, где $x_j = 0$ при $j \neq i$, получим однопараметрическую подгруппу операторов. Производящий оператор этой подгруппы обозначим через ∂_i. Положим $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}$, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс. Операторы ∂^α коммутируют и существует плотное в $L^2(\Omega)$ множество S, содержащееся в области определения любого оператора ∂^α. Так как операторы ∂_i кососимметричны, то для любых u, $v \in S$

$$\langle v\,\partial^\alpha u\rangle = (-1)^{|\alpha|}\,\langle u\partial^\alpha v\rangle.$$

Проведем построение множества S. Пусть $K(\xi)$ — четная функция в $\mathbb{R}^n$ такая, что $\hat{K}(\xi) = 1$ при $|\xi| \leqslant 1$ и $\hat{K}(\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Положим

$$K(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\,\xi)} \hat{K}(\xi)\, d\xi.$$

Очевидно, $K(x)$ — четная функция из $L^1(\mathbb{R}^n)$ и

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(x)\, dx = \hat{K}(0) = 1.$$

Введем для любого $\varepsilon > 0$ оператор J^ε: $L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, полагая

$$f^\varepsilon(\omega) \equiv J^\varepsilon f = \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(T(y)\,\omega) K(\varepsilon^{-1}y)\, dy. \tag{18}$$

Легко видеть, что норма оператора J^ε: $L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ не превосходит $\int_{\mathbb{R}^n} |K(x)|\, dx$.

Определим S как линейную оболочку множества всех функций $J^\varepsilon f$, где $f \in L^\infty(\Omega)$ и $\varepsilon > 0$. Из равенства

$$f^\varepsilon(T(x)\,\omega) = \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(T(y)\,\omega)\, K(\varepsilon^{-1}(x-y))\, dy$$

вытекает, что почти все реализации функции из S имеют ограниченные производные любого порядка, и, кроме того, если $u \in S$, то u принадлежит области определения оператора ∂^α при любом α и почти всюду в Ω

$$\partial^\alpha u = D_x^\alpha u\,(T(x)\,\omega)|_{x=0}.$$

Лемма 1. *Для любой функции* $f \in L^2(\Omega)$:

1) $J^\varepsilon f \to f$ *в норме* $L^2(\Omega)$ *при* $\varepsilon \to 0$,

2) $J^\varepsilon f \to \langle f\rangle$ *в норме* $L^2(\Omega)$ *при* $\varepsilon \to \infty$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon \to 0$. Имеем

$$f^\varepsilon(\omega) - f(\omega) = \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} K(\varepsilon^{-1}y)\,(f(T(y)\,\omega) - f(\omega))\, dy,$$

$$\|f^\varepsilon - f\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} K(\varepsilon^{-1}y)\,|\,\|U(y)\,f - f\|_{L^2(\Omega)}\, dy.$$

Выберем r_0 столь большим, что

$$\int_{|x|\geqslant r_0} |K(x)|\, dx \leqslant \delta, \quad \delta = \mathrm{const}.$$

Тогда при заданном δ и достаточно малом ε

$$\| f^{\varepsilon}-f\|_{L^2(\Omega)}\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} |K(x)|\,dx \sup_{|y|\leqslant \varepsilon r_0} \|U(y)f-f\|_{L^2(\Omega)}+2\delta\|f\|_{L^2(\Omega)}\leqslant 3\delta\|f\|_{L^2(\Omega)},$$

что и требовалось показать.

Пусть $\varepsilon\to\infty$. Легко видеть, что

$$f^{\varepsilon}(\omega)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(T(\varepsilon x)\,\omega)\,K(x)\,dx.$$

Согласно эргодической теореме Биркгофа $f^{\varepsilon}(\omega)\to\langle f\rangle$ для почти всех ω. Если $f\in L^{\infty}(\Omega)$, то отсюда по теореме Лебега получаем, что $f^{\varepsilon}\to\langle f\rangle$ в норме $L^2(\Omega)$. Так как $L^{\infty}(\Omega)$ плотно в $L^2(\Omega)$ и оператор J^{ε} ограничен в $L^2(\Omega)$, то $f^{\varepsilon}\to\langle f\rangle$ в норме $L^2(\Omega)$ для $f\in L^2(\Omega)$. Лемма доказана.

Из леммы 1 вытекает, что построенное множество S плотно в $L^2(\Omega)$.

2. Пусть q — число мультииндексов $\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ таких, что $|\alpha|=m$. Обозначим через H — пространство вектор-функций $v=\{v_1,\ldots,v_q\}$, где $v_j\in L^2(\Omega)$ $(j=1,\ldots,q)$, и $\|v\|_H^2=\sum\limits_{j=1}^{q}\|v_j\|^2_{L^2(\Omega)}$.

Пусть $u\in S$. Тогда вектор-функция $\{\partial^{\alpha}u,\ |\alpha|=m\}$ принадлежит H. Обозначим ее $\partial^m u$. Через H_g обозначим замыкание по норме H множества $\partial^m u$ при $u\in S$.

Рассмотрим уравнение вида

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}(-1)^m\partial^{\alpha}(a_{\alpha\beta}(\omega)\,\partial^{\beta}u)=\sum_{|\alpha|=m}(-1)^m\,\partial^{\alpha}f_{\alpha}, \tag{19}$$

где $\{a_{\alpha\beta}(\omega)\}$ — эллиптическая матрица, $f_{\alpha}\in L^2(\Omega)$. Элемент $\{v_{\alpha}\}\in H_g$ будем называть решением уравнения (19), если для любого $\varphi\in S$

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}\langle a_{\alpha\beta}v_{\beta}\partial^{\alpha}\varphi\rangle=\sum_{|\alpha|=m}\langle f_{\alpha}\partial^{\alpha}\varphi\rangle. \tag{20}$$

Левая часть в (20) определяет билинейную форму, непрерывную по v_{α}, $\partial^{\alpha}\varphi\in H_g$. Это следует из ограниченности эллиптической матрицы $\{a_{\alpha\beta}(\omega)\}$. Поэтому для разрешимости уравнения (20) достаточно доказать, что для $u\in S$

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}\langle a_{\alpha\beta}\partial^{\beta}u\,\partial^{\alpha}u\rangle\geqslant\lambda_0\sum_{|\alpha|=m}\langle|\partial^{\alpha}u|^2\rangle,\qquad \lambda_0=\mathrm{const}>0, \tag{21}$$

так как в этом случае существование решения уравнения (20) легко следует из теоремы Лакса — Мильграма (см. [98], стр. 134).

Докажем неравенство (21). Согласно определению 5 эллиптической матрицы $\{a_{\alpha\beta}(\omega)\}$ для почти всех $\omega\in\Omega$, $u\in S$, $\varphi\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}a_{\alpha\beta}(T(x)\,\omega)\,D^{\beta}(u(T(x)\,\omega)\,\varphi(\varepsilon x))\,D^{\alpha}(u(T(x)\,\omega)\,\varphi(\varepsilon x))\,dx\geqslant \tag{22}$$

$$\geqslant\lambda_0\int\limits_{\mathbb{R}^n}\sum_{|\alpha|=m}|D^{\alpha}(u(T(x)\,\omega)\,\varphi(\varepsilon x))|^2\,dx.$$

Сделав замену переменных $\varepsilon x=y$, получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}a_{\alpha\beta}(T(\varepsilon^{-1}y)\,\omega)\,D^{\beta}u(T(\varepsilon^{-1}y)\,\omega)\,D^{\alpha}u(T(\varepsilon^{-1}y)\,\omega)\,\varphi^2(y)\,dy\geqslant$$

$$\geqslant\lambda_0\int\limits_{\mathbb{R}^n}\sum_{|\alpha|=m}|D^{\alpha}u(T(\varepsilon^{-1}y)\,\omega)|^2\,\varphi^2(y)\,dy+\theta_{\varepsilon},$$

где $\theta_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$ и пользуясь эргодической теоремой Биркгофа, находим, что

$$(23)\quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} M_y\{a_{\alpha\beta}D^\beta u D^\alpha u\}\,\varphi^2(y)\,dy \geqslant \lambda_0 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=m} M_y\{|D^\alpha u|^2\}\,\varphi^2(y)\,dy.$$

Из неравенства (23) следует, что для почти всех ω

$$(24)\qquad M\{\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}D^\beta u D^\alpha u\} \geqslant \lambda_0 M\{\sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2\}.$$

Так как динамическая система $T(x)$, по предположению, эргодическая, то в силу теоремы Биркгофа из (24) вытекает неравенство (21).

Определение 9. Функцию $u^\delta \in S$, $\delta = \mathrm{const} > 0$, будем называть *почти-решением уравнения* (19), если

$$(25)\quad \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} (-1)^m \partial^\alpha (a_{\alpha\beta}\partial^\beta u^\delta) - \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m \partial^\alpha f_\alpha = \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m \partial^\alpha g_\alpha^\delta,$$

где $g_\alpha^\delta \in L^2(\Omega)$ и $\sum\limits_{|\alpha|=m} \langle |g_\alpha^\delta|^2\rangle \leqslant \delta$.

Легко видеть, что почти-решение уравнения (19) существует. Действительно, пусть $\{v_\alpha\} \in H_g$ — решение уравнения (19). Приблизим $\{v_\alpha\}$ элементом вида $\partial^m u^\delta$, где $u^\delta \in S$ так, что

$$\sum_{|\alpha|=m} \langle |v_\alpha - \partial^\alpha u^\delta|^2\rangle \leqslant \lambda_1^{-2} q^{-2}\delta.$$

Тогда равенство (25) имеет место при $g_\alpha^\delta = -\sum\limits_{|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(v_\beta - \partial^\beta u^\delta)$. Вектор-функцию $g^\delta = \{g_\alpha^\delta\}$ будем называть *невязкой для почти-решения* u^δ уравнения (19)

Для доказательства выполнения условия N^δ для эллиптических операторов с эллиптической матрицей $\{a_{\alpha\beta}(\omega)\}$ рассмотрим вспомогательное уравнение

$$(26)\quad \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} (-1)^m \partial^\alpha (a_{\alpha\beta}\partial^\beta N_\gamma) + \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m \partial^\alpha (a_{\alpha\gamma}) = 0,$$

где γ — произвольный мультииндекс с $|\gamma| \leqslant m$. Уравнение (26) имеет вид (19). По доказанному, это уравнение однозначно разрешимо. Почти-решение уравнения (26) обозначим N_γ^δ, а невязку через $g_\gamma^\delta = \{g_{\gamma\alpha}^\delta\}$.

Определим подпространство H_d пространства H как множество элементов $f = \{f_\alpha\} \in H$, для которых

$$(27)\qquad \sum_{|\alpha|=m} \langle f_\alpha \partial^\alpha \varphi\rangle = 0$$

для любой функции $\varphi \in S$.

Согласно определению H_d ортогонально H_g.

Лемма 2. *Если* $f = \{f_\alpha\} \in H_d$, *то* $f^\varepsilon = \{f_\alpha^\varepsilon\} \in H_d$. *Для любых* $f \in H_d$ *и* $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *справедливо равенство*

$$(28)\qquad \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=m} f_\alpha(T(x)\omega) D_x^\alpha \psi(x)\,dx = 0$$

для почти всех $\omega \in \Omega$.

Доказательство. Согласно эргодической теореме Биркгофа

$$\sum_{|\alpha|=m} M_x\{f_\alpha(T(x+y)\,\omega)\,D^\alpha\varphi(T(x)\,\omega)\}=\sum_{|\alpha|=m}\langle f_\alpha(T(y)\,\omega)\,\partial^\alpha\varphi\rangle=0.$$

Умножим это равенство на $\varepsilon^{-n}K(\varepsilon^{-1}y)$ и проинтегрируем по $\mathbb{R}^n$. Получим

$$\sum_{|\alpha|=m} M_x\{f_\alpha^\varepsilon(T(x)\,\omega)\,D^\alpha\varphi(T(x)\,\omega)\}=0,$$

где $f_\alpha^\varepsilon=J^\varepsilon f_\alpha$. По эргодической теореме отсюда следует, что $\sum\limits_{|\alpha|=m}\langle f_\alpha^\varepsilon\partial^\alpha\varphi\rangle=0$. Это означает, что $\{f_\alpha^\varepsilon\}\in H_d$.

Покажем теперь, что из (27) следует (28). Пусть $f=\{f_\alpha\}\in H_d$. Имеем

$$\sum_{|\alpha|=m}\langle f_\alpha^\varepsilon\partial^\alpha\varphi\rangle=(-1)^m\sum_{|\alpha|=m}\langle\partial^\alpha f_\alpha^\varepsilon\varphi\rangle=0. \tag{29}$$

Так как φ — любая функция из S, то из (29) вытекает, что $\sum\limits_{|\alpha|=m}\partial^\alpha f_\alpha^\varepsilon=0$ и $\sum\limits_{|\alpha|=m} D^\alpha f_\alpha^\varepsilon(T(x)\,\omega)=0$. Следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{|\alpha|=m} f_\alpha^\varepsilon(T(x)\,\omega)\,D_x^\alpha\psi\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{|\alpha|=m} f_\alpha(T(x)\,\omega)\,D_x^\alpha\psi^\varepsilon\,dx=0.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим (28). Лемма доказана.

Следствием леммы 2 является следующее важное для дальнейшего предложение.

Лемма 3. *Пусть $N_\gamma^\delta(\omega)$ — почти-решение уравнения* (26). *Тогда для почти всех $\omega\in\Omega$ и $|\gamma|\leqslant m$ выполнено интегральное тождество*

$$\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{|\alpha|=m}\Big(\sum_{|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(T(x)\,\omega)\,D^\beta N_\gamma^\delta(T(x)\,\omega)+a_{\alpha\gamma}(T(x)\,\omega)\Big)D^\alpha\psi(x)\,dx=$$
$$=\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{|\alpha|=m} g_{\gamma\alpha}^\delta(T(x)\,\omega)\,D^\alpha\psi(x)\,dx, \tag{30}$$

где $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\sum\limits_{|\alpha|=m}\langle|g_{\gamma\alpha}^\delta|^2\rangle\leqslant\delta$.

§ 3. Доказательства основных теорем об усреднении для эллиптических операторов

В настоящем параграфе будут доказаны теоремы 1 и 2, сформулированные в § 1. Мы рассматриваем эллиптическую матрицу $\{a_{\alpha\beta}(\omega)\}$ и соответствующее ей семейство дифференциальных операторов, зависящее от параметра ε,

$$A^\varepsilon\equiv A^\varepsilon(\omega)\equiv\sum_{|\alpha|,\,|\beta|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha\,(a_{\alpha\beta}(T(\varepsilon^{-1}x)\,\omega)\,D^\beta). \tag{31}$$

1. Для доказательства теоремы 1 проверим, что в предположениях теоремы 1 для семейства операторов A^ε выполнено условие N^δ (см. § 5, гл. I) для почти всех $\omega\in\Omega$ и для любой области $Q\subset\mathbb{R}^n$. Пусть $N_\gamma^\delta(\omega)$ — почти-решение уравнения (26). Проверим, что функции

$$N_\gamma^{\delta,\varepsilon}(x)=\varepsilon^m N_\gamma^\delta(T(\varepsilon^{-1}x)\,\omega) \tag{32}$$

удовлетворяют требованиям (90) — (93) (см. § 5, гл. I) условия N^δ для семейства операторов A^ε вида (31). Положим

$$\hat{a}_{\alpha\beta} = \sum_{|\varkappa|=m} \langle a_{\alpha\varkappa}\partial^\varkappa N_\beta\rangle + \langle a_{\alpha\beta}\rangle, \tag{33}$$

где $\{\partial^\varkappa N_\beta\}$ элемент пространства H_g, удовлетворяющий уравнению (26). Согласно эргодической теореме

$$D_x^\alpha N_\gamma^{\delta,\varepsilon}(x) = \varepsilon^{m-|\alpha|}\partial^\alpha N_\gamma^\delta(T(\varepsilon^{-1}x)\,\omega) \to 0$$

слабо в $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ при $\varepsilon \to 0$ и $|\alpha| \leqslant m$. Следовательно, $N_\gamma^{\delta,\varepsilon} \to 0$ слабо в $H^m_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ при $\varepsilon \to 0$ и поэтому для $N_\gamma^{\delta,\varepsilon}$ выполнено условие (90) (см. гл. I). Положим

$$\hat{a}_{\alpha\beta}^{\delta,\varepsilon} \equiv \sum_{|\gamma|=m} a_{\alpha\gamma}(T(\varepsilon^{-1}x)\,\omega)\, D_x^\gamma N_\beta^{\delta,\varepsilon} + a_{\alpha\beta}(T(\varepsilon^{-1}x)\,\omega) =$$
$$= \sum_{|\gamma|=m} (a_{\alpha\gamma}(T(y)\,\omega)\,\partial^\gamma N_\beta^\delta(T(y)\,\omega))\big|_{y=\varepsilon^{-1}x} + a_{\alpha\beta}(T(y)\,\omega)\big|_{y=\varepsilon^{-1}x}.$$

Применяя эргодическую теорему, получим, что при $\varepsilon \to 0$

$$\hat{a}_{\alpha\beta}^{\delta,\varepsilon} \to \sum_{|\gamma|=m} \langle a_{\alpha\gamma}\partial^\gamma N_\beta^\delta\rangle + \langle a_{\alpha\beta}\rangle \equiv \hat{a}_{\alpha\beta}^\delta \tag{34}$$

слабо в $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Это означает, что для почти всех ω выполнено условие (91).

Так как $\hat{a}_{\alpha\beta}^\delta = \mathrm{const}$, то для доказательства (92) (см. гл. I) рассмотрим

$$\sum_{|\alpha|=m} D_x^\alpha \hat{a}_{\alpha\beta}^{\delta,\varepsilon} = \tag{35}$$
$$= \sum_{|\alpha|=m} D_x^\alpha \Big(\sum_{|\gamma|=m} a_{\alpha\gamma}(T(y)\,\omega)\,\partial^\gamma N_\beta^\delta(T(y)\,\omega) + a_{\alpha\beta}(T(y)\,\omega)\Big)\Big|_{y=\varepsilon^{-1}x}.$$

Учитывая определение почти-решения N_γ^δ и лемму 3, находим, что правая часть (35) равна

$$\sum_{|\alpha|=m} D_x^\alpha g_{\beta\alpha}^\delta(T(\varepsilon^{-1}x)\,\omega), \quad \text{причем} \quad \sum_{|\alpha|=m} \langle |g_{\beta\alpha}^\delta|^2\rangle \leqslant \delta.$$

Очевидно, что

$$\Big\| \sum_{|\alpha|=m} D^\alpha \hat{a}_{\alpha\beta}^{\delta,\varepsilon} \Big\|^2_{H^{-m}(Q)} \leqslant \sum_{|\alpha|=m} \int_Q |g_{\beta\alpha}^\delta(T(\varepsilon^{-1}x)\,\omega)|^2\,dx. \tag{36}$$

Согласно эргодической теореме правая часть неравенства (36) при $\varepsilon \to 0$ стремится к $|Q| \sum_{|\alpha|=m} \big\langle |g_{\beta\alpha}^\delta|^2 \big\rangle \leqslant |Q|\,\delta$, где $|Q|$ — мера Лебега области Q. Следовательно, условие (92) из гл. I выполнено с постоянной $c(Q) = |Q|$ для почти всех ω. Из формул (33) и (34) в силу определения почти-решения N_γ^δ вытекает, что $\hat{a}_{\alpha\beta}^\delta \to \hat{a}_{\alpha\beta}$ при $\delta \to 0$ и, значит, выполнено требование (93) из главы I. Таким образом, для почти всех ω для семейства операторов A_ω^ε выполнено условие N^δ. Согласно теореме 19 из главы I отсюда вытекает, что $A^\varepsilon(\omega) \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}$ при $\varepsilon \to 0$ для почти всех $\omega \in \Omega$. Коэффициенты $\{\hat{a}_{\alpha\beta}\}$ оператора $\hat{A}$ определяются формулами (33). Итак, теорема 1 доказана.

2. Для доказательства теоремы 2 покажем, что при предположениях теоремы 2 условие N^δ выполняется при всех $\omega \in \Omega$.

Пусть $C(\Omega)$ — множество непрерывных функций на Ω. Рассмотрим в $L^2(\Omega)$ множество функций $f(\omega)$ таких, что $f(\omega) \in C(\Omega)$, $\partial^\alpha f \in C(\Omega)$ для любого мультииндекса α, причем равенство

$$\partial^\alpha f(\omega) = D_x^\alpha f(T(x)\,\omega)\big|_{x=0}$$

выполнено для любого $\omega \in \Omega$. Обозначим это множество через $C^\infty(\Omega)$. Под H_g в этом пункте будем понимать подпространство векторного пространства H (см. § 2 гл. II), полученное замыканием в норме H элементов вида $\{\partial^\alpha f\}$, $|\alpha| = m$, $f \in C^\infty(\Omega)$.

В § 2 было доказано, что уравнение (26) для N_γ разрешимо в пространстве H_g. В силу определения H_g почти-решение N_γ^δ уравнения (26) можно выбрать из $C^\infty(\Omega)$.

Положим

$$N_\gamma^{\delta,\varepsilon}(x) = \varepsilon^m N_\gamma^\delta(T(\varepsilon^{-1}x)\omega).$$

Как и при доказательстве теоремы 1, показываем, что эти функции удовлетворяют требованиям (90), (91), (93) из главы I при всех $\omega \in \Omega$, при этом вместе с эргодической теоремой Биркгофа используем условие 3) строгой эргодичности динамической системы $T(x)$, сформулированное в определении 6. Покажем теперь выполнение требования (92) из главы I условия N^δ. Пусть

$$(37)\qquad \Phi_\alpha = \sum_{|\beta|=m} a_{\alpha\beta}\partial^\beta N_\gamma^\delta + a_{\alpha\gamma}, \qquad |\alpha| = m, \quad |\gamma| \leqslant m, \quad \Phi = \{\Phi_\alpha\},$$

где N_γ^δ — почти-решение уравнения (26), $N_\gamma^\delta \in C^\infty(\Omega)$. Очевидно, что $\Phi_\alpha \in C(\Omega)$. Прибавив, если нужно к Φ_α постоянную, будем считать, что $\langle\Phi_\alpha\rangle = 0$, $|\alpha| = m$. Согласно определению невязки

$$(38)\qquad \sum_{|\alpha|=m} \partial^\alpha \Phi_\alpha = \sum_{|\alpha|=m} \partial^\alpha g_{\gamma\alpha}^\delta,$$

где $g_\gamma^\delta = \{g_{\gamma\alpha}^\delta\}$ — невязка почти-решения N_γ^δ. По построению $\sum_{|\alpha|=m} \langle |g_{\gamma\alpha}^\delta|^2\rangle \leqslant \delta$. Очевидно, что $\Phi - g_\gamma^\delta = \Phi^1 \in H_d$. Можно считать, что $\{g_{\gamma\alpha}^\delta\} \in H_g$, так как равенство (38) и оценка $\sum_{|\alpha|=m} \langle |g_{\gamma\alpha}^\delta|^2\rangle \leqslant \delta$ не изменятся, если $\{g_{\gamma\alpha}^\delta\}$ заменить его проекцией на H_g.

Отметим, что g_γ^δ, вообще говоря, не является непрерывной вектор-функцией на Ω. Мы покажем, что невязку для почти-решения уравнения (26) можно выбрать непрерывной вектор-функцией ω. Для этого докажем следующую лемму.

Лемма 4. *Пусть для вектор-функции $\Phi = \{\Phi_\alpha\}$ выполнено условие*

$$(39)\qquad \Phi = \Phi^0 + \Phi^1, \quad \Phi^0 \in H_g, \quad \Phi^1 \in H_d, \quad \|\Phi^0\|_H^2 \leqslant \delta, \quad \Phi_\alpha \in C(\Omega).$$

Тогда справедливо представление

$$(40)\qquad \Phi = \Psi^0 + \Psi^1,$$

где $\Psi_\alpha^0 \in C(\Omega)$, $\|\Psi^0\|_H^2 \leqslant \delta$, $\Psi_\alpha^1 \in C^\infty(\Omega)$ *и для любых* $x \in \mathbb{R}^n$, $\omega \in \Omega$

$$(41)\qquad \sum_{|\alpha|=m} D_x^\alpha(\Psi_\alpha^1(T(x)\omega)) = 0.$$

Доказательство. Можно считать, что $\Phi_\alpha \in C^\infty(\Omega)$, заменяя Φ_α на $J^\varepsilon\Phi_\alpha$ при малом ε и пользуясь тем, что $J^\varepsilon\Phi_\alpha \to \Phi_\alpha$ при $\varepsilon \to 0$ в норме $L^2(\Omega)$. Далее, можно предполагать, что при каждом $\omega \in \Omega$ носитель преобразований Фурье функций $\Phi_\alpha(T(x)\omega)$ как обобщенных функций из пространства Шварца $S'(\mathbb{R}^n)$ (см. [99]), не содержит множество $\{\xi: |\xi| \leqslant \varepsilon_0^{-1}\}$, $\varepsilon_0 = \mathrm{const} > 0$. Действительно, согласно лемме 1 $\Phi_{\alpha,\varepsilon} \equiv \Phi_\alpha - J^\varepsilon\Phi_\alpha \to \Phi_\alpha - \langle\Phi_\alpha\rangle = \Phi_\alpha$ в норме $L^2(\Omega)$ при $\varepsilon \to \infty$. Выберем параметр $\varepsilon = \varepsilon_0$ настолько большим, что $\sum_{|\alpha|=m} \|\Phi_{\alpha,\varepsilon} - \Phi_\alpha\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \delta$ и заменим в равенстве (38) Φ_α функциями $\Phi^1_{\alpha,\varepsilon_0}$. Очевидно, что для невязки получим условие $\sum\limits_{|\alpha|=m}\langle|g^\delta_{\gamma\alpha}|^2\rangle\leqslant 2\delta$. Обозначим через $F(u)$ преобразование Фурье функции u. Имеем

$$F(\Phi_{\alpha,\varepsilon})=F(\Phi_\alpha)-K(\varepsilon_0\zeta)\,F(\Phi_\alpha)=F(\Phi_\alpha)\,(1-\hat{K}(\varepsilon_0\zeta)).$$

Так как согласно определению функции $\hat{K}(\xi)$ имеем $1-\hat{K}(\varepsilon_0\xi)=0$ при $|\xi|\leqslant\varepsilon_0^{-1}$, то

$$\operatorname{supp}F(\Phi_{\alpha,\varepsilon_0})\subset\{\xi:\ |\xi|\geqslant\varepsilon_0^{-1}\}.$$

Итак, мы можем считать, что заданная вектор-функция $\Phi=\{\Phi_\alpha\}$ удовлетворяет условиям: $\Phi_\alpha\in C^\infty(\Omega)$,

$$\operatorname{supp}F(\Phi_\alpha)\subset\{\xi:\ |\xi|\geqslant\varepsilon_0^{-1}\}.$$

Рассмотрим уравнение

$$(42)\quad \sum_{|\alpha|=m}(-1)^m D^{2\alpha}\Delta^{2s}v\,(T(x)\,\omega)=\sum_{|\alpha|=m}(-1)^m D^\alpha\Phi_\alpha\,(T(x)\,\omega)\equiv f\,(T(x)\,\omega),$$

где $\Delta=\sum\limits_{j=1}^{n}D_j^2$. Пусть $a(\xi)\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $a(\xi)=0$ при $|\xi|\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon_0^{-1}$ и $a(\xi)=1$ при $|\xi|\geqslant\varepsilon_0^{-1}$. Положим

$$(43)\qquad E(x)=(2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{a(\xi)}{|\xi|^{4s}\sum\limits_{|\alpha|=m}\xi^{2\alpha}}\,e^{i(x,\xi)}\,d\xi.$$

Легко видеть, что интеграл (43) абсолютно сходится, если s достаточно велико. Кроме того, функция $|x|^l E(x)$ ограничена в $\mathbb{R}^n$ при любом целом l. Поэтому $E(x)\in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Покажем, что

$$(44)\qquad v\,(T(x)\,\omega)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}E\,(x-y)\,f\,(T(y)\,\omega)\,dy$$

является решением уравнения (42) при любом $\omega\in\Omega$ и, кроме того, $v(\omega)\equiv v(T(0)\omega)\in C^\infty(\Omega)$

Для этого достаточно показать, что для всех $\omega\in\Omega$

$$(45)\qquad \sum_{|\alpha|=m}\int\limits_{\mathbb{R}^n}D^\alpha\Delta^{2s}vD^\alpha\varphi\,dx=\int\limits_{\mathbb{R}^n}f\varphi\,dx=\sum_{|\alpha|=m}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Phi_\alpha D^\alpha\varphi\,dx$$

при любой функции $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Обозначим $\langle w,\varphi\rangle$ значение функционала, соответствующего обобщенной функции w из S' на элементе $\varphi\in S$. Тогда согласно известным теоремам (равенство Парсеваля, см. [99])

$$(46)\quad \sum_{|\alpha|=m}\int\limits_{\mathbb{R}^n}D^\alpha\Delta^{2s}vD^\alpha\varphi\,dx=(2\pi)^{-n}\sum_{|\alpha|=m}\left\langle|\xi|^{4s}\xi^\alpha\frac{a(\xi)\,F(f)}{|\xi|^{4s}\sum\limits_{|\beta|=m}\xi^{2\beta}},\ \bar{\xi}^\alpha F(\varphi)\right\rangle.$$

Учитывая, что $a(\xi)=1$ при $\xi\in\operatorname{supp}F(f)$, находим, что правая часть равенства (46) равна

$$(2\pi)^{-n}\langle F(f),\ \overline{F}(\varphi)\rangle=\langle f,\ \varphi\rangle\equiv\int\limits_{\mathbb{R}^n}f\varphi\,dx.$$

Последнее равенство мы получили, пользуясь снова равенством Парсеваля. Итак, равенство (45) доказано. Очевидно, что $v(\omega) \in C^\infty(\Omega)$.

Положим

$$(47) \qquad \Psi^0(\omega) = \{\partial^\alpha \Delta^{2s} v\}, \qquad \Psi^1(\omega) = \{\Phi_\alpha - \Psi^0_\alpha\}.$$

Очевидно, $\Psi^0 + \Psi^1 = \Phi$. Сделав замену переменных интегрирования $x = \varepsilon^{-1} y$ в интегральном тождестве (45), полагая $\varphi(x) = \varphi_1(\varepsilon x)\,\psi(T(x)\omega)$, где $\varphi_1(y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\psi(\omega) \in C^\infty(\Omega)$, и переходя в этом тождестве к пределу при $\varepsilon \to 0$, согласно условию строгой эргодичности динамической системы $T(x)$ и теореме Биркгофа получим, что

$$(48) \qquad -\sum_{|\alpha|=m} \langle \partial^\alpha \Delta^{2s} v\, \partial^\alpha \psi\rangle = \sum_{|\alpha|=m} \langle \Phi_\alpha\, \partial^\alpha \psi\rangle.$$

Из равенства (45) вытекает, что

$$\sum_{|\alpha|=m} \int_{\mathbb{R}^n} \Psi^1_\alpha(T(x)\omega)\, D^\alpha \varphi(x)\, dx = 0$$

для всех $\omega \in \Omega$. Это означает, что выполнено условие (41). Оценим теперь $\|\Psi^0\|_H$. Положим в равенстве (48) $\psi = \Delta^{2s} v$. Учитывая условие (39), получим

$$\sum_{|\alpha|=m} \langle \partial^\alpha \Delta^{2s} v\, \partial^\alpha \Delta^{2s} v\rangle \equiv \|\Psi^0\|_H^2 = \sum_{|\alpha|=m} \langle \Phi_\alpha \Psi^0_\alpha\rangle =$$
$$= \sum_{|\alpha|=m} \langle \Phi^0_\alpha \Psi^0_\alpha\rangle \leqslant \|\Phi^0\|_H \|\Psi^0\|_H \leqslant \delta^{1/2} \|\Psi^0\|_H,$$

отсюда $\|\Psi^0\|_H^2 \leqslant \delta$. Лемма доказана.

Для доказательства выполнения требования (92) § 5 главы I условий N^δ, учитывая, что $\hat{a}^\delta_{\alpha\beta} = \mathrm{const}$, оценим

$$(49) \qquad \Big\| \sum_{|\alpha|=m} D^\alpha_x \Phi_\alpha (T(\varepsilon^{-1}x)\omega) \Big\|_{H^{-m}(Q)},$$

где Q — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Для оценки величины (49) рассмотрим неравенство

$$\Big| \int_Q \sum_{|\alpha|=m} D^\alpha_x \Phi_\alpha (T(\varepsilon^{-1}x)\omega)\, \varphi(x)\, dx \Big| = \Big| \int_Q \sum_{|\alpha|=m} \Psi^0_\alpha (T(\varepsilon^{-1}x)\omega)\, D^\alpha \varphi\, dx \Big| \leqslant$$
$$\leqslant \|\varphi\|_{H^m(Q)} \sum_{|\alpha|=m} \|\Psi^0_\alpha (T(\varepsilon^{-1}x)\omega)\|_{L^2(Q)}.$$

Согласно условию 3) определения 6 строго эргодической динамической системы $T(x)$ и теореме Биркгофа имеем

$$\sum_{|\alpha|=m} \|\Psi^0_\alpha (T(\varepsilon^{-1}x)\omega)\|^2_{L^2(Q)} \to |Q| \sum_{|\alpha|=m} \langle |\Psi^0_\alpha|^2\rangle \leqslant \delta |Q|$$

при $\varepsilon \to 0$ для всех $\omega \in \Omega$. Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Big\| \sum_{|\alpha|=m} D^\alpha_x \Phi_\alpha (T(\varepsilon^{-1}x)\omega) \Big\|_{H^{-m}(Q)} \leqslant \delta |Q|,$$

и, значит, условие (92) из главы I выполнено для всех ω. Теорема 2 доказана.

ГЛАВА III
НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 1. Асимптотика на бесконечности решений эллиптических уравнений второго порядка

В настоящем параграфе будем рассматривать эллиптические уравнения вида

$$(1)\qquad Au \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} D_i(a_{ij}(x)D_ju) = f,\quad D_j \equiv \frac{\partial}{\partial x_j},\quad x \in \mathbb{R}^n,\quad a_{ij}(x) = a_{ji}(x),$$

где коэффициенты $a_{ij}(x)$ — ограниченные. измеримые функции в R^n и для любых $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$(2)\qquad \lambda_0|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \lambda_1|\xi|^2,$$

λ_0, λ_1 = const > 0. Будем предполагать, что $n \geqslant 3$.

Оказывается, что асимптотика фундаментального решения уравнения (1) на бесконечности определяется поведением фундаментального решения уравнения $\hat{A}u = f$, где $\hat{A}$ является G-пределом при $\varepsilon \to 0$ семейства операторов

$$(3)\qquad A^{\varepsilon} \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} D_i(a_{ij}(\varepsilon^{-1}x)D_j),$$

если соответствующий усредненный оператор $\hat{A}$ для семейства (3) существует. С другой стороны, наличие определенной асимптотики у фундаментального решения уравнения (1) гарантирует G-сходимость семейства операторов (3).

В работах [106], [107] построено фундаментальное решение $K(x, y)$ уравнения (1), обладающее следующими свойствами:

1) функция $K(x, y)$ непрерывна в $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y$ при $x \neq y$, $K(x, y) = K(y, x)$,

$$(4)\qquad |K(x, y)| \leqslant C_1 |x - y|^{2-n},$$

где постоянная C_1 зависит только от λ_0, λ_1, n;

2) $K(x, y)$ как функция x принадлежит классу $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n \setminus y)$ при любом $y \in \mathbb{R}^n_y$;

3) функция

$$(5)\qquad u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y)f(y)\,dy$$

является единственным обобщенным решением из класса $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ уравнения

$$(6)\qquad Au = f$$

с условием $u(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$ при любой функции $f(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Из условия 3) следует, что для любой области $Q \subset \mathbb{R}^n$ и любой $\varphi \in C_0^\infty(Q)$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} a_{ij}(x)\frac{\partial K(x, y)}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}\,dx = 0,$$

если y не принадлежит Q, т. е. $AK = 0$ в Q, если $y \notin Q$. Очевидно, функция $K(x, y)$ условием 3) определяется однозначно.

Теорема 1. *Для фундаментального решения $K(x, y)$ уравнения* (1) *справедлива асимптотика вида*

$$K(x, y) = \sigma_n \mid x - y \mid^{2-n} + \mid x - y \mid^{2-n}\theta(x, y) \tag{7}$$

тогда и только тогда, когда $A^\varepsilon \xrightarrow{G} -\Delta$ в $\mathbb{R}^n$ при $\varepsilon \to 0$. Здесь Δ — оператор Лапласа, $\sigma_n = ((n-2)\omega_n)^{-1}$, ω_n — площадь поверхности сферы $|x| = 1$ в $\mathbb{R}^n$, $\theta(x, y) \to 0$ при $|x - y| \to \infty$ равномерно на множестве $|x| + |y| < a|x - y|$, где a — произвольное фиксированное положительное число.

Доказательство. Пусть $A^\varepsilon \xrightarrow{G} -\Delta$ при $\varepsilon \to 0$. Покажем, что имеет место соотношение (7).

Рассмотрим функции

$$u_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(x, y) f(y)\, dy, \tag{8}$$

где $f(y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $K_\varepsilon(x, y)$ — фундаментальное решение уравнения $A^\varepsilon u_\varepsilon = f$. Легко проверить, пользуясь равенством (6), что

$$K_\varepsilon(x, y) = \varepsilon^{2-n} K(\varepsilon^{-1}x, \varepsilon^{-1}y), \tag{9}$$

где $K(x, y)$ — фундаментальное решение уравнения (1). Согласно условию 3) $A^\varepsilon u_\varepsilon = f$, $u_\varepsilon \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $u_\varepsilon(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Из условия (4) вытекает, что $|u_\varepsilon(x)| \leqslant C_2 |x|^{2-n}$, где постоянная C_2 не зависит от ε.

Для любого обобщенного решения $u(x)$ уравнения вида (1) из класса $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ справедлива оценка [108]

$$\| u \|_{H^1(Q')} \leqslant C(\rho, \lambda_0, \lambda_1, n, f)\, (\| u \|_{L^2(Q)} + 1), \tag{10}$$

где $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $Q' \subset Q \subset \mathbb{R}^n$, ρ — расстояние между ∂Q и $\partial Q'$, $C = \mathrm{const} > 0$. Из неравенства (10) вытекает, что u_ε ограничены в норме $H^1(Q')$ равномерно по ε для любой ограниченной области $Q' \subset \mathbb{R}^n$. Так как $A^\varepsilon \xrightarrow{G} -\Delta$ при $\varepsilon \to 0$, то по теореме 24 главы I $A^\varepsilon \overset{G}{\Rightarrow} -\Delta$. Поэтому по теореме 16 главы I имеем, что если $u_0(x)$ — предел слабо в $H^1(Q')$ сходящейся подпоследовательности $u_{\varepsilon_k}(x)$, то $-\Delta u_0 = f$ в Q'. Из неравенства $|u_\varepsilon(x)| \leqslant C_2 |x|^{2-n}$ вытекает, что $|u_0(x)| \leqslant C_2 |x|^{2-n}$. Условиями $-\Delta u_0 = f$ в $\mathbb{R}^n$ и $|u_0(x)| \leqslant C_2 |x|^{2-n}$ функция $u_0(x)$ определяется однозначно. Поэтому $u_\varepsilon(x) \to u_0(x)$ слабо в $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ при $\varepsilon \to 0$.

Покажем теперь, что

$$K_\varepsilon(x, y) \to \sigma_n |x - y|^{2-n} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0$$

в пространстве обобщенных функций $D'(\mathbb{R}^{2n})$. Так как линейные комбинации функций вида $g(x)f(y)$, где $g(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f(y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, образуют плотное множество в $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, то достаточно показать, что

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} K_\varepsilon(x, y)\, g(x) f(y)\, dx\, dy \to \int_{\mathbb{R}^{2n}} \sigma_n |x-y|^{2-n} g(x) f(y)\, dx\, dy \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Легко видеть, что при $\varepsilon \to 0$

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} K_\varepsilon(x, y)\, g(x) f(y)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} u_\varepsilon(x)\, g(x)\, dx \to \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x)\, g(x)\, dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \sigma_n |x-y|^{2-n} f(y)\, g(x)\, dy\, dx.$$

Применяя теорему Е. Де Джорджи [109], получим, что функции $K_\varepsilon(x, y)$ на любом компактном множестве $\mathbb{R}^{2n}$, не содержащем точек, где $|x-y| < b$, $b = \text{const} > 0$, удовлетворяют условию Гёльдера с постоянной и показателем, не зависящими от ε. Отсюда следует, что

$$(11) \qquad K_\varepsilon(x, y) \to \sigma_n |x-y|^{2-n} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0$$

равномерно на множестве $\{x, y : |x| + |y| < a, \ |x-y| > b\}$, a, $b = \text{const} > 0$. Из соотношения (9) имеем

$$(12) \qquad K(x, y) = K(\varepsilon^{-1}x', \varepsilon^{-1}y') = \varepsilon^{n-2}K_\varepsilon(x', y').$$

Пусть $\varepsilon = |x-y|^{-1}$. Тогда если $|x| + |y| < a|x-y|$, то $|x'|+|y'| < a$, $|x'-y'| = 1$ и поэтому согласно (11), (12)

$$K(x, y) = \varepsilon^{n-2}K_\varepsilon(x', y') = \varepsilon^{n-2}\sigma_n |x'-y'|^{2-n} + \theta(x', y')\varepsilon^{n-2},$$

где $\theta(x', y') \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно на множестве $|x'| + |y'| < a$, $|x'-y'| = 1$. Отсюда, учитывая, что $x' = \varepsilon x$, $y' = \varepsilon y$, $\varepsilon = |x-y|^{-1}$, получим для $K(x, y)$ соотношение (7).

Предположим теперь, что для фундаментального решения уравнения (1) справедлива асимптотика (7). Покажем, что $A^\varepsilon \xrightarrow{G} -\Delta$ при $\varepsilon \to 0$ в любой области $Q \subset \mathbb{R}^n$.

Согласно теореме 9 главы I из любой последовательности $\varepsilon \to 0$ можно выбрать подпоследовательность ε_k такую, что $A^{\varepsilon_k} \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}$ при $\varepsilon_k \to 0$ в любой области Q.

Рассмотрим последовательность $\{u_{\varepsilon_k}\}$, определенную условиями: $A^{\varepsilon_k}u_{\varepsilon_k} = f$ в $\mathbb{R}^n$, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $u_{\varepsilon_k} \in H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $u_{\varepsilon_k}(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Так как согласно неравенству (4) $|u_{\varepsilon_k}| \leqslant C_2 |x|^{2-n}$, то в силу оценки (10) u_{ε_k} равномерно ограничены в норме $H^1(Q)$ в любой конечной области $Q \subset \mathbb{R}^n$. Поэтому найдется подпоследовательность k' такая, что $u_{\varepsilon_{k'}} \to u_0$ слабо в $H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. По теореме 16 главы I имеем $\hat{A}u_0 = f$. Из оценок Е. Де Джорджи [109] следует, что $u_0(x)$ непрерывна в $\mathbb{R}^n$. Так как

$$|u_{\varepsilon_k}(x)| \leqslant C_2 |x|^{2-n},$$

то такая же оценка справедлива для $u_0(x)$.

Согласно (5) имеем

$$u_{\varepsilon_k}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_{\varepsilon_k}(x, y) f(y)\, dy.$$

Учитывая соотношение (9) и асимптотику (7), получим

$$(13) \qquad u_\varepsilon(x) = \int_{|x-y|<b} K_\varepsilon(x, y) f(y)\, dy + \int_{|x-y|>b} \sigma_n |x-y|^{2-n} f(y)\, dy + \int_{|x-y|>b} \theta\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right)|x-y|^{2-n} f(y)\, dy.$$

Так как $f(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то $|x| + |y| < ab$ при фиксированном x и достаточно большом $a > 0$, если $y \in \operatorname{supp} f$. Поэтому $(|x| + |y|)\varepsilon^{-1} < \varepsilon^{-1}a|x-y|$, если $y \in \operatorname{supp} f$, $|x-y| > b$. Тогда, по предположению, $\theta(\varepsilon^{-1}x, \varepsilon^{-1}y) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно на

$$\{y : |x-y| > b\} \cap \operatorname{supp} f(y).$$

Из соотношения (13), учитывая (4), находим, что при $\varepsilon \to 0$

$$u_\varepsilon(x) = \int_{R^n} K_\varepsilon(x, y) f(y)\,dy \to \int_{R^n} \sigma_n |x-y|^{2-n} f(y)\,dy.$$

Отсюда вытекает, что

$$u_0(x) = \int_{R^n} \sigma_n |x-y|^{2-n} f(y)\,dy$$

и, следовательно, $-\Delta u_0 = f$, $\hat{A} = -\Delta$, $A^{\varepsilon_k} \xrightarrow{G} -\Delta$ при $\varepsilon_k \to 0$. Так как это справедливо для любой подпоследовательности ε_k, то легко видеть, что $A^\varepsilon \xrightarrow{G} -\Delta$ при $\varepsilon \to 0$. Теорема доказана.

Заметим, что случай $\hat{A}^\varepsilon \xrightarrow{G} \hat{A}$, где $\hat{A}$ — оператор вида (1) с постоянными коэффициентами, линейной заменой независимых переменных сводится к случаю теоремы 1. Аналогично доказывается следующее утверждение.

Теорема 2. *Для фундаментального решения $K(x, y)$ уравнения* (1) *справедлива асимптотика вида*

$$K(x, y) = K_0(x, y) + |x-y|^{2-n}\theta(x, y), \quad K_0(\rho x, \rho y) = \rho^{2-n} K_0(x, y),$$

тогда и только тогда, когда $A^\varepsilon \xrightarrow{G} \hat{A}$ при $\varepsilon \to 0$ в $\mathbb{R}^n$. Здесь $\hat{A}$ — оператор вида (1), *коэффициенты которого — однородные функции x порядка нуль, $K_0(x, y)$ — фундаментальное решение уравнения $\hat{A}u = f$, $\theta(x, y) \to 0$ при $|x-y| \to \infty$ равномерно на множестве $|x| + |y| < a|x-y|$,* $\rho = \mathrm{const} > 0$.

Теорема 3. *Пусть $A^\varepsilon \xrightarrow{G} -\Delta$ при $\varepsilon \to 0$ в любой ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$, f — ограниченная в $\mathbb{R}^n$ функция с компактным носителем. Тогда для обобщенного решения $u(x)$ задачи*

$$(14) \qquad Au = f \text{ в } \mathbb{R}^n,\quad u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n),\quad u(x) \to 0 \text{ при } |x| \to \infty$$

справедлива асимптотика

$$u(x) = \sigma_n |x|^{2-n} \int_{R^n} f(x)\,dx + |x|^{2-n}\theta(x),$$

где $\theta(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$.

Доказательство. Из условия 3) для решения задачи (14) получаем представление

$$u(x) = \int_{R^n} K(x, y) f(y)\,dy.$$

По теореме 1 имеем

$$u(x) = \int_{R^n} \sigma_n |x-y|^{2-n} f(y)\,dy + \int_{R^n} |x-y|^{2-n}\theta(x, y) f(y)\,dy =$$

$$= \sigma_n |x|^{2-n} \int_{R^n} f(y)\,dy + \theta(x)|x|^{2-n}.$$

Теорема доказана.

Для уравнений вида (1) с почти-периодическими коэффициентами утверждения, аналогичные теореме 1, были получены в [70], [71].

§ 2. Асимптотика фундаментальных решений параболических уравнений второго порядка. Стабилизация

Будем рассматривать параболические уравнения второго порядка вида

$$(15) \qquad Pu = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} D_i (a_{ij}(t, x) D_j u) = 0,$$

где коэффициенты $a_{ij}(t, x)$ — ограниченные, измеримые функции в

$$\mathbb{R}_+^{n+1} = \{t, x: t > 0, x \in \mathbb{R}^n\}, \ a_{ij} = a_{ji},$$

и для любых $(t, x) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$(16) \qquad \lambda_0 |\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j \leqslant \lambda_1 |\xi|^2, \quad \lambda_0, \lambda_1 = \mathrm{const} > 0.$$

Рассмотрим семейство операторов

$$(17) \qquad P^\varepsilon \equiv \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} D_i (a_{ij}(\varepsilon^{-2}t, \varepsilon^{-1}x) D_j), \quad \varepsilon = \mathrm{const} > 0.$$

Установим связь между задачей усреднения для семейства (17) и нахождением асимптотики на бесконечности для фундаментального решения уравнения (15). Покажем, что имеют место теоремы, аналогичные доказанным в § 1 для эллиптических уравнений.

В работах [110], [111] построено фундаментальное решение $p(t, x, y)$ уравнения (15), обладающее следующими свойствами:

1) функция $p(t, x, y)$ непрерывна в

$$\mathbb{R}_+^{2n+1} = \{t, x, y: t > 0, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n\},$$

$$p(t, x, y) = p(t, y, x),$$

$$(18) \qquad c_1 t^{-n/2} e^{-c_2|x-y|^2/t} \leqslant p(t, x, y) \leqslant c_3 t^{-n/2} e^{-c_4|x-y|^2/t},$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 — положительные постоянные, зависящие лишь от n, λ_0, λ_1.

2) для любой ограниченной области Q, такой, что $\overline{Q} \subset \mathbb{R}_+^{n+1}$, $p(t, x, y)$ как функция t, x имеет $\frac{\partial p}{\partial x_j} \in L^2(Q)$ $(j = 1, \ldots, n)$ при любом $y \in \mathbb{R}^n$;

3) для любой функции $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ функция

$$(19) \qquad u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} p(t, x, y) \varphi(y)\, dy$$

является единственным ограниченным в $\mathbb{R}_+^{n+1}$ и непрерывным при $t > 0$ обобщенным решением задачи Коши

$$(20) \qquad Pu = 0 \ \text{ в } \ \mathbb{R}_+^{n+1}, \ u|_{t=0} = \varphi,$$

таким, что $D_j u \in L^2(Q)$ $(j = 1, \ldots, n)$, и при любой функции $\psi(t, x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_{t,x}^{n+1})$

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \left(-u \frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x) D_j u D_i \psi \right) dt\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \psi(0, x)\, dx = 0.$$

Здесь Q — любая ограниченная область такая, что $\overline{Q} \subset \mathbb{R}_+^{n+1}$. В дальнейшем будем рассматривать обобщенные решения задачи Коши (20) в указанном выше смысле.

Определение 1. Будем говорить, что семейство параболических операторов P^ε, определенных (17), *G-сходится при* $\varepsilon \to 0$ *к параболическому оператору* $\hat{P}$, и коротко записывать $P^\varepsilon \xrightarrow{G} \hat{P}$, если для любого $t > 0$ и любой функции $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$u_\varepsilon(t, x) \to u_0(t, x)$$

в норме $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ при $\varepsilon \to 0$, где $u_\varepsilon(t, x)$ — обобщенное решение задачи Коши

$$P^\varepsilon u_\varepsilon = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}_+^{n+1}, \qquad u_\varepsilon|_{t=0} = \varphi,$$

$u_0(t, x)$ — обобщенное решение задачи Коши

$$\hat{P} u_0 = 0 \ \text{ в } \ \mathbb{R}_+^{n+1}, \qquad u_0|_{t=0} = \varphi.$$

Теорема 4. *Для фундаментального решения $p(t, x, y)$ уравнения* (15) *справедлива асимптотика*

$$p(t, x, y) = p_0(t, x, y) + t^{-n/2}\theta(t, x, y) \tag{21}$$

тогда и только тогда, когда $P^\varepsilon \xrightarrow{G} \hat{P}$ при $\varepsilon \to 0$. Здесь $\hat{P}$ — параболический оператор вида (15) *с постоянными коэффициентами $\hat{a}_{ij}$, $p_0(t, x, y)$ — фундаментальное решение уравнения $\hat{P}u = 0$; $\theta(t, x, y) \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно при $|x|^2 + |y|^2 < at$, a — произвольная фиксированная положительная постоянная.*

Доказательство. Сделав линейную замену независимых переменных x, можно предполагать, что $\hat{P} = \dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta$,

$$p_0(t, x, y) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x-y|^2/4t} \tag{22}$$

Пусть $P^\varepsilon \xrightarrow{G} \hat{P}$ при $\varepsilon \to 0$. Рассмотрим функции

$$u_\varepsilon(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} p_\varepsilon(t, x, y)\varphi(y)\, dy,$$

где $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $p_\varepsilon(t, x, y)$ — фундаментальное решение уравнения $P^\varepsilon u = 0$. Из представления (19) легко получить, что

$$p_\varepsilon(t, x, y) = \varepsilon^{-n} p(\varepsilon^{-2}t, \varepsilon^{-1}x, \varepsilon^{-1}y), \tag{23}$$

где $p(t, x, y)$ — фундаментальное решение уравнения (15). Покажем, что

$$p_\varepsilon(t, x, y) \to p_0(t, x, y) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0$$

в пространстве обобщенных функций $D'(\mathbb{R}^{2n})$ при любом $t > 0$. Для любой функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ при $\varepsilon \to 0$ имеем

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} p_\varepsilon(t, x, y) f(x)\varphi(y)\, dy\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} u_\varepsilon(t, x) f(x)\, dx \to \int_{\mathbb{R}^n} u_0(t, x) f(x)\, dx =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^{2n}} p_0(t, x, y)\varphi(y) f(x)\, dy\, dx.$$

Из теоремы Дж. Нэша [110] следует, что семейство $p_\varepsilon(t, x, y)$ компактно в смысле равномерной сходимости в любой ограниченной области Q такой, что $\acute{Q} \subset \mathbb{R}_+^{2n+1}$. Поэтому

$$p_\varepsilon(t, x, y) = p_0(t, x, y) + \theta(\varepsilon, t, x, y), \tag{24}$$

где $\theta \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно в Q. Далее, согласно (23) имеем

$$p(t, x, y) = p(\varepsilon^{-2}, \varepsilon^{-1}x', \varepsilon^{-1}y') = \varepsilon^n p_\varepsilon(1, x', y') \text{ при } t = \varepsilon^{-2}. \tag{25}$$

Очевидно, что если $|x|^2 + |y|^2 < at$, то $|x'|^2 + |y'|^2 < a$. Из (24) и (25) получаем

$$p(t, x, y) = \varepsilon^n p_\varepsilon(1, x', y') = \varepsilon^n p_0(1, x', y') + \varepsilon^n\theta(\varepsilon, 1, x', y'). \tag{26}$$

Переходя в равенствах (26) к переменным t, x, y и учитывая, что $p_0(t, x, y)$ задается равенством (22), получим соотношение (21).

Предположим теперь, что имеет место асимптотика (21). Покажем, что $P^\varepsilon \xrightarrow{G} \hat{P}$ при $\varepsilon \to 0$. Имеем

$$u_\varepsilon(t, x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} p_\varepsilon(t, x, y)\varphi(y)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-n} p(\varepsilon^{-2}t, \varepsilon^{-1}x, \varepsilon^{-1}y)\varphi(y)\,dy = \tag{27}$$

$$= \varepsilon^{-n}\int\limits_{|y|<r} p(\varepsilon^{-2}t, \varepsilon^{-1}x, \varepsilon^{-1}y)\varphi(y)\,dy + \varepsilon^{-n}\int\limits_{|y|\geqslant r} p(\varepsilon^{-2}t, \varepsilon^{-1}x, \varepsilon^{-1}y)\varphi(y)\,dy.$$

Последний интеграл в (27) равномерно по ε и $|x| \leqslant R$ стремится к нулю при $r \to \infty$ в силу оценок (18). Принимая во внимание (21), получаем

$$\int\limits_{|y|<r} \varepsilon^{-n} p(\varepsilon^{-2}t, \varepsilon^{-1}x, \varepsilon^{-1}y)\varphi(y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{|y|<r} p_0(t, x, y)\varphi(y)\,dy + \int\limits_{|y|<r} \theta(\varepsilon^{-2}t, \varepsilon^{-1}x, \varepsilon^{-1}y)\, t^{-n/2}\varphi(y)\,dy.$$

Так как при $|x| < R$, $|y| < r$ и $t = \mathrm{const}$ имеем

$$|\varepsilon^{-1}x|^2 + |\varepsilon^{-1}y|^2 < a\varepsilon^{-2}t$$

для некоторой постоянной $a > 0$, то

$$\theta(\varepsilon^{-2}t, \varepsilon^{-1}x, \varepsilon^{-1}y) \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0$$

равномерно по $|x| < R$ и $|y| < r$. Следовательно, $u_\varepsilon(t, x) \to u_0(t, x)$ при $\varepsilon \to 0$, $t = \mathrm{const} > 0$ равномерно при $|x| < R$, где

$$u_0(t, x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} p_0(t, x, y)\varphi(y)\,dy.$$

Согласно определению 1 это означает, что $P^\varepsilon \xrightarrow{G} \hat{P}$ при $\varepsilon \to 0$. Теорема доказана.

Точно также доказывается следующее более общее утверждение.

Т е о р е м а 5. *Пусть* $P^\varepsilon \xrightarrow{G} \hat{P}$ *при* $\varepsilon \to 0$. *Тогда имеет место соотношение* (21), *где* $p_0(t, x, y)$ — *фундаментальное решение уравнения* $\hat{P}u = 0$. *Обратно, если справедливо соотношение* (21) *и*

$$p_0(\rho^2 t, \rho x, \rho y) = \rho^{-n} p_0(t, x, y), \quad \rho = \mathrm{const} > 0,$$

то

$$P^\varepsilon \xrightarrow{G} \widehat{P} \quad \textit{при} \ \varepsilon \to 0.$$

Используя теоремы 4 и 5, установим некоторые теоремы о поведении решений задачи Коши для уравнения (15) при $t \to \infty$. Вопрос о стабилизации решения задачи Коши рассматривался во многих работах (см., например, [112] — [117], [90], [91]).

Теорема 6. *Пусть* $P^\varepsilon \xrightarrow{G} \hat{P}$ *при* $\varepsilon \to 0$, *где* $\hat{P}$ — *параболический оператор с постоянными коэффициентами* $\hat{a}_{ij}$ *вида* (15). *Тогда для решения* $u(t, x)$ *задачи Коши*

$$Pu = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}_+^{n+1}, \quad u|_{t=0} = \varphi, \tag{28}$$

справедлива асимптотика

$$u(t, x) = c_0 (4\pi t)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\, dy + t^{-n/2}\theta(t, x), \tag{29}$$

$$c_0 = (\det \{\hat{a}_{ij}\})^{-1/2},$$

где $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\theta(t, x) \to 0$ *при* $t \to \infty$ *равномерно при* $|x| < R$, $R = \text{const} > 0$.

Доказательство. Пусть $\hat{P} = \dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta$. Общий случай сводится к этому линейной заменой независимых переменных x. Решение задачи Коши (28) представимо в виде

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} p(t, x, y)\, \varphi(y)\, dy.$$

По теореме 4 для $p(t, x, y)$ имеет место асимптотика (21). Поэтому при любом $r > 0$ имеем

$$(4\pi t)^{n/2} u(x, t) = \int_{|y|<r} e^{-|x-y|^2/4t} \varphi(y)\, dy + \tag{30}$$

$$+ \int_{|y|<r} (4\pi)^{n/2}\, \theta(t, x, y)\, \varphi(y)\, dy + \int_{|y|>r} (4\pi t)^{n/2}\, p(t, x, y)\, \varphi(y)\, dy.$$

В силу оценки (18) последний интеграл сколь угодно мал при всех t и x, если r достаточно велико. Второй интеграл правой части (30) стремится к нулю при $t \to \infty$ равномерно по x при $|x| < R$. Так как

$$|e^{-|x-y|^2/4t} - 1| \leqslant ct^{-1}$$

при $|x| + |y| < r + R$, $c = \text{const} > 0$, то из (30) вытекает, что выполняется соотношение (29). Теорема доказана.

Аналогичное утверждение имеет место и в случае, когда $\hat{P}$ имеет переменные коэффициенты.

Теорема 7. *Пусть* $P^\varepsilon \xrightarrow{G} \dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta$ *при* $\varepsilon \to 0$, $\varphi(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. *Тогда при каждом* $x \in \mathbb{R}^n$ *для решения* $u(t, x)$ *задачи Коши* (28) *имеем*

$$u(t, x) \to \langle\varphi\rangle \quad \text{при} \quad t \to \infty \tag{31}$$

в том и только в том случае, когда для $\varphi(x)$ *существует шаровое среднее значение*

$$\lim_{R\to\infty} |Q_R|^{-1} \int_{Q_R} \varphi(x)\, dx \equiv \langle\varphi\rangle,$$

где $Q_R = \{x\colon |x| < R\}$, $|Q_R|$ — *объем* Q_R.

Доказательство. Очевидно, теорему достаточно доказать для случая, когда $\langle\varphi\rangle = 0$. Обозначим

$$\tilde{\psi}(r) = \omega_n^{-1} \int\limits_{|x|=1} \psi(r\xi)\, dS_\xi,$$

где ω_n — площадь поверхности единичной сферы $S_x = \{x\colon |x| = 1\}$. Если $\varphi(\lambda_k x) \to \psi(x)$ слабо в $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ при $\lambda_k \to \infty$, то

$$(32) \qquad \lim_{\lambda_k\to\infty} \int\limits_{|x|\leqslant 1} \varphi(\lambda_k \tau x)\, dx = \int\limits_{|x|\leqslant 1} \psi(\tau x)\, dx = \tau^{-n} \int\limits_0^\tau r^{n-1}\tilde{\psi}(r)\, dr.$$

Представим решение $u(t, x)$ задачи Коши (28) в виде

$$(33) \quad u(t, x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} p(t, x, y)\, \varphi(y)\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} p_{t^{-1/2}}(1, t^{-1/2}x, z)\, \varphi(zt^{1/2})\, dz,$$

где $p_\varepsilon(t, x, y)$ — фундаментальное решение уравнения $P^\varepsilon u = 0$. Пусть $\varphi(z\sqrt{t_k}) \to \psi(z)$ слабо в $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ при $t_k \to \infty$. Так как при $t \to \infty$

$$p_{t^{-1/2}}(1, xt^{-1/2}, z) \to (4\pi)^{-n/2} e^{-|z|^2/4}$$

равномерно при $|x| < R$, то, учитывая оценки (18) и переходя к пределу в равенстве (33), получим

$$(34) \qquad \lim_{t_k\to\infty} u(t_k, x) = (4\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2/4}\psi(z)\, dz =$$

$$= (4\pi)^{-n/2} \int\limits_0^\infty e^{-r^2/4} r^{n-1}\tilde{\psi}(r)\, dr.$$

Если $\langle\varphi\rangle = 0$, то из (32) следует, что $\tilde{\psi}(r) = 0$, и поэтому $u(t_k, x) \to 0$ при $t_k \to \infty$. Отсюда вытекает, что $u(t, x) \to 0$ при $t \to \infty$.

Пусть теперь $u(t, x) \to 0$ при $t \to \infty$. Покажем, что $\langle\varphi\rangle = 0$. Так как $u(t, \sqrt{\lambda}x) \to 0$ при $t \to \infty$, то из (34) следует, что

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda r^2/4} r^{n-1}\tilde{\psi}(r)\, dr = 0$$

при любом $\lambda > 0$. В силу теоремы единственности для преобразования Лапласа получаем, что $\tilde{\psi}(r) \equiv 0$. Из соотношений (32) следует, что $\langle\varphi\rangle = 0$. Теорема доказана.

Аналогичная теорема для случая уравнений с почти-периодическими коэффициентами другим путем доказана в [91].

Заметим, что теоремы § 2 носят условный характер в том смысле, что в предположения теорем входит условие G-сходимости семейства операторов P^ε. Усреднение и G-сходимость параболических операторов будут подробно рассмотрены в другой статье авторов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Poisson, Second memoire sur la theorie du magnetism, Mem. de Acad. de France (1822), 5.
[2] J. C. Maxwell, Electricity and magnetism, v. I, Oxford, Clarendon Press, 1892.
[3] W. R. Rayleigh, On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium, Phys. Mag. 34:241 (1892), 481.

[4] Н. Н. Боголюбов, О некоторых статистических методах в математической физике, Львов, Изд-во АН УССР, 1945.
[5] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М., 1963.
[6] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., Физматгиз, 1959.
[7] Z. Hashin, S. Shtrikman, A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials, J. Mech. Phys. of Solids. **11**:2 (1963), 127—140.
[8] В. В. Болотин, В. Н. Москаленко, Макроскопические коэффициенты теплопроводности и диффузии микрооднородных тел, Прикл. мех. и теор. физ., 6 (1967), 7—13.
[9] А. М. Дыхне, Проводимость двумерной двухфазной системы, ЖЭТФ **59**:7 (1970), 110—115.
[10] Е. П. Велихов, А. М. Дыхне, И. Я. Шипук, Ионизационная неустойчивость плазмы с горячими электронами, Phenomena in ionized gases, Proceedings of the VII Intern. Conference Beograd, vol. 2, 1965, 675—681.
[11] Ю. А. Буевич, Ю. А. Корнеев, О переносе тепла и массы в дисперсной среде, ПМТФ, № 4 (1974).
[12] E. Sanchez-Palencia, Comportements local et macroscopique d'un type de milieux physiques hétérogènes, Intern. J. Engng. Sci. **12** (1974), 331—351.
[13] D. A. De Vries, La conductibilité thermique des matériaux granuleux, Bull. Inst. Intern. Froid. **32**:6 (1952).
[14] Z. Hashin, Assesment of the self-consistent scheme approximation; conductivity of particulate compositions, J. Composite Materials 2:3 (1968).
[15] W. F. Brown, Solid mixture permitivities, J. Chem. Phys. **23**:8 (1955).
[16] E. Sanchez-Palensia, Methode d'homogénéisation pour l'etude de materiaux hétérogènes, Phénomènes de memoire, Rend. Sem. Matem. Univ. e Politec. Torino, 1979.
[17] E. Sanchez-Palensia, Problemes de perturbations liés aux phénomènes de conduction à travers des couches minces de grande resistivitè, J. Math. Pures Appl. **53** (1974), 251—270.
[18] Э. И. Григолюк, Л. А. Фильштинский, Перфорированные пластинки и оболочки, М., Итоги науки, 1970.
[19] В. Л. Бердичевский, Пространственное осреднение периодических структур, ДАН **222**:3 (1975), 565—567.
[20] В. Л. Бердичевский, Об осреднении периодических структур, ПММ **41**:6 (1977), 993—1006.
[21] В. Л. Бердичевский, Об одном вариационном принципе, ДАН **215**:6 (1974), 1329—1332.
[22] Р. И. Нигматуллин, Методы механики сплошной среды для описания многофазных смесей, ПММ **34**:6 (1970).
[23] M. Atola, G. Duvaut, Homogénéisation d'une plaque renforcée. C. R. **284** (1977), 707—710.
[24] К. С. Александров, А. А. Айзенберг, Способ вычисления физических констант поликристаллических материалов, ДАН **167**:5 (1966), 1028—1031.
[25] I. Babuska, Solution of interface problems by homogenezation, SIAM J. Math. Anal. **7** (1976), 603—645.
[26] S. Spagnolo, Sul limite delle solutioni di problemi di Cauchy relativi all'equazione del calore, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci. **21** (1967), 657—699.
[27] S. Spagnolo, Sulla convergenza di solutioni di equazioni paraboliche ed ellittiche, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci. 22 (1968), 577—597.
[28] S. Spagnolo, Some convergence problems, Symp. Math. (Conv. Ist. Sup. Alta Mat., Roma, 1974), 18 (1976), 391—398.

[29] S. Spagnolo, Convergence in energy for elliptic operators, Proc. 3rd Symp. Numer Solut. Part. Diff. equations. College park (1976), 469—498.

[30] S. Spagnolo, Convergence of parabolic equations, Boll. Un. Mat. Ital., (5), **14**—B (1977), 547—568.

[31] E. De Giorgi, S. Spagnolo, Sulla convergenza degli integrali dell'energia per operatori ellittici del 2 ordine, Boll. Un. Mat. Ital., (4), 8 (1973), 391—411.

[32] E. De Giorgi, Г-convergenza e *G*-convergenza, Boll. Un. Mat. Ital (5), **14**—A (1977), 213—220.

[33] E. De Giorgi, T. Franzoni, Sul un tipo di convergenza variazionale, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), 58 (1975), 842—850.

[34] E. De Giorgi, Convergence problem for functionals and operators, (preprint, 1979).

[35] E. De Giorgi, Sulla convergenza di alcuni successioni del tipo dell'area, Rend. Mat. Roma 8 (1975), 277—294.

[36] P. Marcellini, C. Sbordone, Sur quelques questions de *G*-convergence et d'homogénéisation non linéaire, C. R. **284**, (1977), 535—537.

[37] A. Marino, S. Spagnolo, Un tipo di apprcssimazione del l'operator $\sum_{i,j} D_j\,(a_{ij}D_j)$ con operatori $\sum_j D_j\,(\beta D_j)$, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci. (3), **23** (1969), 657—673.

[38] P. Marcellini, Convergence of second order linear elliptic operators, Boll. Un. Mat. Ital (5) **15**—B (1979).

[39] P. Marcellini, C. Sbordone, Dualità e perturbazione di funzionali integrali, Ricerche di Math. **26**:2 (1977), 383—421.

[40] P. Marcellini, Un teorema di passaggio al limite per la somma di funzioni convesse, Boll. Un. Mat. Ital. **11** (1975), 107—125.

[41] P. Marcellini, C. Sbordone, An appoach to the asymptotic behaviour of elliptic-parabolic operators. J. Math. Pures Appl. (9), **56** (1977), 157—182.

[42] J. L. Lions, Sur quelques questions d'analyse, de mécanique et de contrôle optimal, Univ. de Montreal (1976).

[43] A. Bensoussan, J. L. Lions, G. Papanicolaou, Asymptotic analysis for periodic structures, North-Holland Publ. Comp., 1978.

[44] L. Tartar, Homogénéisation, Cours Peccot au College de France, Paris, 1977.

[45] L. Tartar, Convergence d'operateurs differential, Analisi convessa e applicazioni, Roma, 1974, Quaderni dei gruppi ricerche del CNR, 101—104.

[46] L. Carbone, C. Sbordone, Some properties of Г-limits of integral functionals, Editrice tecnico scientifica, 1978, Pisa.

[47] L. Carbone, Sur la Г-convergence des integrales du type de l'energie a gradient borné, J. Math. Pures Appl. **56**:1 (1977).

[48] L. Carbone, Г-convergence d'integrales sur des fonctions avec des contraintes sur le gradient, Comm. in P. D. E. **2** (6) (1977), 627—651.

[49] L. Bocardo, P. Marcellini, Sulla convergenza delle soluzioni di disequazioni variazionali, Annali Mat. Pura Appl. **110** (1976), 137—159.

[50] C. Sbordone, Sulla *G*-convergenza di equazioni ellittiche e paraboliche, Ricerche di Mat. vol. **24** (1975), 76—136.

[51] A. Ambrosetti, C. Sbordone, Г-convergenza e *G*-convergenza per problemi non lineari di tipo ellittico, Boll. Un. Mat. Ital. (5), **13**—A (1976), 352—362.

[52] A. Bamberger, Appoximation des coefficients d'operateurs elliptiques, stable pour la *G*-convergence, Rapport interne. Ecole Polytechnique **15** (1977).

[53] F. Colombini, S. Spagnolo, On the convergence of solutions of hyperbolic equations, Comm. in P. D. E., **3** (1) (1978), 77—103.

[54] F. Colombini, S. Spagnolo, Sur la convergence de solutions d'equations paraboliques, J. Math. pures et appl. 56 (1977), 263—306.

[55] F. Colombini, S. Spagnolo, Sur la convergence de solutions d'équations parabolique avec des coefficients qui dépendent du temps, C. R. 282, (1976), 735—737.

[56] L. Boccardo, I. Capuzzo Dolcetta, G-convergenza e problema di Dirichlet unilaterale, Boll. Un. Mat. Ital., (4), 12 (1975), 115—123.

[57] S. Kesavan, Homogénéisation et valeurs propres, C. R. 283 (1976), 947—950.

[58] I. Babuška, Homogenization and its applications. Mathematical and computational problems, Proc. Symp. Numerical Solution of part. diff. equat. III, Maryland (1975), Acad. Press, 1976, 89—116.

[59] F. Murat, Compacité par compensation, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1977.

[60] F. Murat, Contre-exemples pour divers problèmes oú le contrôle intervient dans les coefficients, Ann. di Matem. Pura et Appl., (IV), 112 (1977), 49—68.

[61] D. Ciaranescu, J. Saint Jean Paulin, Homogénéisation dans des ouverts à cavités, C. R. 284 (1977), 857—860.

[62] Н. С. Бахвалов, Осредненные характеристики тел с периодической структурой, ДАН 218:5 (1974), 1046—1048.

[63] Н. С. Бахвалов, Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами, ДАН 221:3 (1975), 516—519.

[64] Н. С. Бахвалов, Осреднение нелинейных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами, ДАН 225:2 (1975), 1469—1473.

[65] Н. С. Бахвалов, А. А. Злотник, Коэффициентная устойчивость дифференциальных уравнений и осреднение уравнений со случайными коэффициентами, ДАН 242:4 (1978), 745—748.

[66] М. И. Фрейдлин, Задача Дирихле для уравнений с периодическими коэффициентами, зависящими от малого параметра. Теория вероятности и ее применен, 9:1 (1964), 133—139.

[67] О. А. Олейник, О сходимости решений эллиптических и параболических уравнений при слабой сходимости коэффициентов, УМН 30:4 (1975), 257—258.

[68] О. А. Олейник, О распространении тепла в многомерных дисперсных средах, Сб. «Задачи математической физики и механики», М., «Наука», 1976, 224—236.

[69] В. Г. Марков, О. А. Олейник, О распространении тепла в одномерных средах, ПММ 39:6 (1975), 1073—1081.

[70] С. М. Козлов, Осреднение дифференциальных операторов с почти-периодическими быстро осциллирующими коэффициентами, ДАН 236:5 (1977), 1068—1071.

[71] С. М. Козлов, Осреднение дифференциальных операторов с почти-периодическими быстро осциллирующими коэффициентами, Матем. сб. 107:2 (1978), 199—217.

[72] С. М. Козлов, Осреднение случайных структур, ДАН 241:5 (1978), 1016—1019.

[73] С. М. Козлов, Осреднение случайных операторов, Матем. сб. 109:2 (1979), 188—202.

[74] Ха Тьен Нгоан, О сходимости решений краевых задач для последовательности эллиптических уравнений, УМН 32:3 (1977), 183—184.

[75] Ха Тьен Нгоан, О сходимости решений краевых задач для последовательности эллиптических систем, Вестник МГУ, сер. матем. и мех., № 5 (1977), 83—92.

[76] П. К. Сенаторов, Устойчивость решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения относительно возмущений по мере его коэффициентов, Дифф. уравн. 6 (1970), 1725—1726.

[77] П. К. Сенаторов, Устойчивость собственных значений и собственных функций задачи Штурма — Лиувилля, Дифф. уравн. 7 (1971), 1667—1671.

[78] U. Mosco, Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities, Advances in Math. 3 (1969), 510—585.

[79] Г. П. Панасенко. Асимптотики высших порядков решений уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами, ДАН 240:6 (1978), 1293—1296.

[80] Е. Я. Хруслов, Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении границы области, Матем. сб. 106:4 (1978), 604—621.

[81] В. А. Марченко, Е. Я. Хруслов, Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей, Киев, «Наукова думка», 1974.
[82] В. В. Юринский, О задаче Дирихле со случайными коэффициентами, Международный симпозиум по стохастическим уравнениям, Вильнюс, 1978.
[83] I. Babuška, Homogénization approach in Engineering, in «Computing methods in Applied Sciences and Engineering», Lectures Notes in Economics and Math. systems. **134** (1976), 137—153.
[84] Н. С. Бахвалов, Осреднение уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами, Сб. «Проблемы математической физики и вычислительной математики», М., «Наука», 1977.
[85] Н. С. Бахвалов, А. А. Злотник, Осреднение дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами, УМН **33**:3 (1978), 127—128.
[86] L. Tartar, Quelques remarques sur l'homogénéisations, Université de Paris-Sud, Orsay, 1976.
[87] В. А. Марченко, Е. Я. Хруслов, Новые результаты в теории краевых задач и мелкозернистой границей, УМН **33**:3 (1978), 127.
[88] П. К. Сенаторов, Коэффициентная устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и параболических уравнений на плоскости, Дифф. уравн. **7**:4 (1971), 754—758.
[89] С. Мизохата, Теория уравнений с частными производными, М., «Мир», 1977.
[90] В. В. Жиков, О стабилизации решений параболических уравнений, Матем. сб. **104**:4 (1977), 597—616.
[91] В. В. Жиков, Критерий поточечной стабилизации для параболических уравнений с почти-периодическими коэффициентами, Матем. сб. **109**:9 (1979).
[92] Б. М. Левитан, Почти-периодические функции, М., Гостехиздат, 1953.
[93] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, М., Гостехиздат, 1949.
[94] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, Линейные операторы. Общая теория, М., ИЛ, 1962.
[95] Дж. Л. Дуб, Вероятностные процессы, М., ИЛ, 1956.
[96] А. А. Темпельман, Эргодические теоремы для общих динамических систем, Труды ММО **26** (1972), 95—132.
[97] М. Рид, Б. Саймон, Методы современной математической физики, т. I, II, М., «Мир», 1977.
[98] К. Иосида, Функциональный анализ, М., «Мир», 1967.
[99] Л. Хёрмандер, Линейные дифференциальные операторы с частными производными, М., «Мир», 1965.
[100] I. Ekeland, R. Temam, Convex Analysis variational problems, North. Holland, 1976.
[101] Ж. Л. Лионс, Е. Мадженес, Неоднородные граничные задачи и их приложения, М., «Мир», 1971.
[102] Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М., Гостехиздат, 1950.
[103] Ж. Л. Лионс, Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, М., «Мир», 1972.
[104] Т. Като, Теория возмущений линейных операторов, М., «Мир», 1972.
[105] Л. Берс, Ф Джон, М. Шехтер, Уравнения с частными производными, М., «Мир», 1966.
[106] W. Littman, G. Stampacchia, H. F. Weinberger, Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa **17** (1963), 43—77.
[107] G. Stampacchia, Le probleme de Dirichlet pour les equations elliptique du second ordre a coefficients discontinues, Ann. Inst. Fourier Grenoble **15** (1965), 189—258.

[108] К. Миранда, Уравнения с частными производными эллиптического типа, М., ИЛ, 1957.
[109] E. De Giorgi, Sulla differenziabilita e l'analiticita delle estremali degli integrali multipli regolari, Mem. Acc. Sci. Torino 3 (1957), 1—19.
[110] J. Nash, Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations, Amer. J. Math. **80** (1958), 93 -954.
[111] D. G. Aronson, Bounds for the fundamental solutions of a parabolic equations, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 890—896.
[112] А. М. Ильин, А. С. Калашников, О. А. Олейник, Линейные уравнения второго порядка параболического типа, УМН **18**:3 (1962), 3—146.
[113] А. К. Гущин, В. П. Михайлов, О стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения, Дифф. уравн. **7**:2 (1971), 297—311.
[114] С. Д. Эйдельман, Ф. О. Порпер, О стабилизации решения задачи Коши для параболических систем, Изв. вузов, № 4 (1960), 210—217.
[115] Л. А. Багиров, М. А. Шубин, О стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений с коэффициентами, почти-периодическими по пространственным переменным, Дифф. уравн. **11**:12 (1975), 2205—2209.
[116] В. Д. Репников, С. Д. Эйдельман, Новое доказательство теоремы о стабилизации решений задачи Коши для уравнения теплопроводности, Матем. сб. **73** (115) (1967), 155—159.
[117] А. К. Гущин, В. П. Михайлов, Л. А. Муравей, О стабилизации решений нестационарных граничных задач для линейных уравнений в частных производных, Динамика сплошной среды, вып. 23 (1975), 57—91.
[118] А. Л. Бердичевский, В. Л. Бердичевский, Обтекание идеальной жидкостью периодической системы тел, Изв. АН, Механика жидкости и газа **6** (1978), 3—18.
[119] G. Buttazzo, M. Tosques, Γ-convergenza per alcune classi di funzionali, Ann. Univ. Ferrara, ser. VII, **23** (1977), 257—267.

Поступила в редакцию 12 июня 1979 г.