



Общероссийский математический портал

И. В. Андрианов, Новый асимптотический метод расчета подкрепленных конструкций при учете дискретности размещения ребер и их ширины, *Докл. РАН*, 1997, том 352, номер 4, 474–476

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.89

14 января 2025 г., 09:32:03



УДК 531.39

НОВЫЙ АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПОДКРЕПЛЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ УЧЕТЕ ДИСКРЕТНОСТИ РАЗМЕЩЕНИЯ РЕБЕР И ИХ ШИРИНЫ

© 1997 г. И. В. Андрианов

Представлено академиком И. Ф. Образцовым 20.11.95 г.

Поступило 24.11.95 г.

Расчет подкрепленных конструкций при учете реального (дискретного) характера размещения ребер – проблема, имеющая достаточно длительную историю [1, 2]. При большом числе ребер естественным является переход к схеме конструктивной ортотропии. Как было показано в ряде работ [2], подобная упрощенная инженерная схема совпадает с первым приближением метода осреднения дифференциальных уравнений с быстропеременными коэффициентами [2–4]. При этом, как правило, используются методы интегрирования дифференциальных уравнений с быстропеременными правыми частями и граничными условиями [2] или многих масштабов [3, 4]. Основным недостатком подобных подходов являются необходимость решения задачи на ячейке, что в случае подкрепления перекрестной системой ребер приводит к существенно двумерной задаче, а также громоздкость выкладок, усложняющая построение высших приближений. Кроме того, основные результаты в этом направлении получены для случая, когда ребра считаются одномерными. Значительно сложнее обстоит дело с аналитическим учетом ширины ребер. В то же время сейчас в асимптотологии успешно развивается подход, основанный на асимптотическом разложении обобщенных функций [5–8]. Ниже показано, что эта техника может быть с успехом использована для исследования подкрепленных конструкций с учетом дискретного размещения ребер, а также их ширины.

1. В качестве модельной задачи рассматривается изгибная деформация бесконечной пластинки, подкрепленной периодическими системами ребер в двух главных направлениях и лежащей на упругом основании. Исходное дифференциальное уравнение в частных производных может быть в этом

случае записано в следующем виде:

$$D\Delta\Delta w + cw + D_1F_1(x)w_{xxxx} + D_2F_2(y)w_{yyyy} = q(x, y). \quad (1)$$

Здесь

$$F_1(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [H(x + nl_1) - H(x + nl_1 + a)],$$

$$F_2(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [H(y + nl_2) - H(y + nl_2 + b)];$$

D – цилиндрическая жесткость; Δ – оператор Лапласа; c – жесткость основания; $H(x)$ – функция Хевисайда; l_1, l_2 – расстояния между ребрами; a, b – их толщины.

Считая параметры a, b малыми (т.е. ребра тонкими), разложим функции $F_1(x), F_2(y)$ в ряды по этим малым параметрам. Покажем это разложение на примере функции $f(x) = H(x) - H(x + a)$. Применяя к функции $f(x)$ преобразование Лапласа, имеем после разложения экспоненты в ряд Маклорена по a

$$\bar{f}(p) = a + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a^{n+1} p^n / (n+1)!$$

Здесь $\bar{f}(p)$ – изображение функции $f(x)$; p – параметр преобразования Лапласа.

Переход к оригиналу, обоснованный в рамках теории обобщенных функций [6], дает разложение

$$\bar{f}(p) = a\delta(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a^{n+1} \delta^{(n)}(x) / (n+1)!$$

Здесь $\delta(x), \delta^{(n)}(x)$ – дельта-функция Дирака и ее n -я производная.

Аналогично могут быть разложены функции $F_1(x)$ и $F_2(y)$. В результате исходное уравнение

Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры, Днепрпетровск, Украина

равновесия (1) переписывается в виде

$$D\Delta\Delta w + cw + D_1\Phi_1(x)w_{xxxx} + D_2\Phi_2(y)w_{yyyy} = q(x, y), \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= \Phi_{10}(x) + \Phi_{11}(x) + \Phi_{12}(x) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a\delta(x + nl_1) - 0.5 \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^2\delta'(x + nl_1) + \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k a^{k+1} \delta^{(n)}(x + nl_1); \\ \Phi_2(y) &= \Phi_{20}(y) + \Phi_{21}(y) + \Phi_{22}(y) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a\delta(y + nl_2) - 0.5 \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^2\delta'(y + nl_2) + \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k a^{k+1} \delta^{(n)}(y + nl_2). \end{aligned}$$

Решение уравнения (2) можно искать в виде следующего асимптотического разложения по малым параметрам a, b :

$$w = w_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a^i b^j w_{ij}.$$

В результате в нулевом приближении получаем конструкцию с одномерными ребрами

$$D\Delta\Delta w_0 + cw_0 + D_1\Phi_{10}(x)w_{0xxxx} + D_2\Phi_{20}(y)w_{0yyyy} = q(x, y). \quad (3)$$

Учет ширины ребер легко осуществляется в следующих приближениях, так как левые части соответствующих дифференциальных уравнений для всех приближений одни и те же, и для построения соответствующих функций Грина, обеспечивающих их единообразное решение, могут быть использованы известные методы [1-3].

В частности, в первом приближении имеем (в предположении, что малые параметры a и b имеют один и тот же порядок)

$$D\Delta\Delta w_1 + cw_1 + D_1\Phi_{11}(x)w_{1xxxx} + D_2\Phi_{21}(y)w_{1yyyy} = 0.$$

Здесь $w_1 = w_{01} + w_{10}$.

Построение рекуррентной системы уравнений последующих приближений тривиально.

2. Перейдем теперь к решению дифференциального уравнения (3).

Разложим сначала функции $\Phi_{10}(x), \Phi_{20}(y)$ в ряд Фурье (подобное разложение обосновано в рамках теории обобщенных функций [7]):

$$\begin{aligned} \Phi_{10}(x) &= \frac{1}{l_1} + \frac{2}{l_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos 2k\pi x/l_1, \\ \Phi_{20}(y) &= \frac{1}{l_2} + \frac{2}{l_2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos 2k\pi y/l_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Оставляя в разложениях (4) только постоянные составляющие, приходим к соотношениям конструктивно-ортотропной теории

$$D\Delta\Delta w_{00} + cw_{00} + (D_1 a/l_1)w_{00xxxx} + (D_2 b/l_2)w_{00yyyy} = q(x, y). \quad (5)$$

Пусть характерные периоды изменения внешней нагрузки $q(x, y)$ L_1, L_2 (причем L_1 и L_2 имеют один и тот же порядок) существенно превосходят расстояния между ребрами ($l_1/L_1 = \epsilon \ll 1$). Тогда переменные части выражений (4) можно разложить в ряд по малому параметру ϵ . Для этого рассмотрим сначала функцию $\varphi(\xi) = \cos 2k\pi\xi\epsilon^{-1}$ ($\xi = x/L_1$) на периоде $-0.5\epsilon \leq \xi \leq 0.5\epsilon$. Применив к ней двустороннее преобразование Лапласа, получаем

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(p) &= 4\exp((-p\epsilon))\epsilon^2 p(\pi k)^{-2} / [1 + (p\epsilon/\pi k)^2], \\ k &= 2n + 1; \\ \bar{\varphi}(p) &= 0, \quad k = 2n, \end{aligned}$$

где p – параметр преобразования Лапласа.

Разложив далее функцию от p в степенной ряд

$$\bar{\varphi}(p) = 4\epsilon^2 p(\pi k)^{-2} - 4\epsilon^3 p^2(\pi k)^{-2} + \dots$$

и переходя почленно к оригиналам (обоснование этой операции см. [8]), имеем

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= 0, \quad k = 2n, \\ \varphi(\xi) &= 4\epsilon^2(\pi k)^{-2} [\delta'(\xi) + \epsilon\delta''(\xi) + \dots]. \end{aligned} \quad (6)$$

Учитывая периодичность функций $\Phi_{10}(x)$ и $\Phi_{20}(y)$, запишем

$$\begin{aligned} \Phi_{10}(x) &= \frac{1}{l_1} + \frac{2}{l_1} \left[0.5\epsilon^2 \sum_{n=1}^{\infty} \delta'(x + nl_1) + \right. \\ &\left. + 0.5\epsilon^3 \sum_{n=1}^{\infty} \delta''(x + nl_1) + \dots \right]; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\Phi_{20}(y) = \frac{1}{l_2} + \frac{2}{l_2} \left[0.5l_2^2\epsilon^2 \sum_{n=1}^{\infty} \delta'(y + nl_2) + \dots \right]$$

$$+ 0.5\varepsilon^3 l^3 \sum_{n=1}^{\infty} \delta''(y + nl_2) + \dots \Big], \quad (8)$$

где

$$l = L_2/L_1.$$

Решение уравнения (2) можно представить в виде разложения

$$w_0 = w_{00} + \varepsilon^2 w_{001} + \varepsilon^3 w_{001} + \dots \quad (9)$$

Подставляя далее разложения (7)–(9) в уравнение (2) и производя расщепление по ε , получим рекуррентную систему уравнений

$$D\Delta\Delta w_{001} + cw_{001} + \frac{D_1 a}{l_1} w_{001,xxxx} + \frac{D_2 b}{l_2} w_{001,yyyy} = \\ = -\frac{2}{l_1} 0.5\varepsilon^2 \sum_{n=1}^{\infty} \delta'(x + nl_1) - \frac{2}{l_2} 0.5l^2 \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{\infty} \delta'(y + nl_2), \quad (10)$$

$$D\Delta\Delta w_{002} + cw_{002} + \frac{D_1 a}{l_1} w_{002,xxxx} + \frac{D_2 b}{l_2} w_{002,yyyy} = \\ = -\frac{2}{l_1} 0.5\varepsilon^2 \sum_{n=1}^{\infty} \delta''(x + nl_1) - \frac{2}{l_2} 0.5l^2 \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{\infty} \delta''(y + nl_2), \quad (11)$$

Интегрирование уравнений с постоянными коэффициентами (10), (11), ... не представляет труда и особенно просто может быть выполнено после построения соответствующей функции Грина однородного уравнения (5).

Итак, предложенная методика позволяет получать аналитическое решение задачи о расчете перекрестно подкрепленных конструкций с учетом дискретного размещения ребер и их толщины в любом приближении, что выгодно отличает ее от известных модификаций метода осреднения. Метод допускает естественное обобщение на под-

крепленные пластины и оболочки более сложного вида, динамические и нелинейные задачи, а также периодически неоднородные конструкции, описываемые дифференциальными уравнениями с периодически разрывными коэффициентами (складчатые, многоопорные пластины и оболочки, пластины и оболочки с периодическими шарнирами, большим числом присоединенных масс и т.д. [2, 9–13].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Теория ребристых оболочек. Киев: Наук. думка, 1980. 368 с.
2. Андрианов И.В., Лесничая В.А., Маневич Л.И. Метод усреднения в статике и динамике ребристых оболочек. М.: Наука, 1985. 224 с.
3. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 252 с.
4. Победра Б.Е. Механика композитных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
5. Андрианов И.В. // ДАН. 1993. Т. 328. № 5. С. 557–558.
6. Андрианов И.В. // ПММ. 1993. Т. 57. № 5. С. 181–184.
7. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир, 1978. 520 с.
8. Земляня А.Г. Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1974. 399 с.
9. Глизер В.Я., Дмитриев М.Г. // ДАН. 1979. Т. 249. № 5. С. 1036–1040.
10. Estrada R.P., Kanwal R.P. // Proc. Roy. Soc. London. A. 1990. V. 428. P. 399–430.
11. Estrada R.P., Kanwal R.P. Asymptotic Analysis: A Distributional Approach. В.: Birkhauser, 1993. 258 p.
12. Андрианов И.В., Маневич Л.И. // Успехи механики. 1983. Т. 6. № 3/4. С. 3–29.
13. Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В., Андрианов И.В. Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1991. 416 с.