С. А. Григорян, А. Ш. Шарафутдинов, Градуировка полугрупповой C^*-алгебры по локальной группе, *Изв. вузов. Матем.*, 2023, номер 7, 85–90

DOI: 10.26907/0021-3446-2023-7-85-90

Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2023, № 7, с. 85–90 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Краткое сообщение, представленное А.М. Бикчентаевым

С.А. ГРИГОРЯН, А.Ш. ШАРАФУТДИНОВ

ГРАДУИРОВКА ПОЛУГРУППОВОЙ C^*-АЛГЕБРЫ ПО ЛОКАЛЬНОЙ ГРУППЕ

Аннотация. В статье рассмотрена градуировка по локальной группе полугрупповой C^*-алгебры, порожденной свободным прооизведением абелевых полугрупп. Простейшей из таких алгебр является алгебра Кунца–Теплица TO_n. Для таких алгебр строится абстрактный вариант ряда Фурье по локальной группе. Приводится ряд свойств "гармоник" этого ряда.

Ключевые слова: полугрупповая C^*-алгебра, локальная группа, расслоение Фелла, частичное представление.

УДК: 517.98

DOI: 10.26907/0021-3446-2023-7-85-90

Введение

Работа посвящена описанию ряда свойств полугрупповой C^*-алгебры, порожденной регулярным представлением полугруппы, образованной свободным произведением конечного числа абелевых полугрупп. Примерами таких алгебр являются алгебра Кунца–Теплица TO_n, порожденная регулярным представлением свободной полугруппы $F_n(\mathbb{Z}_+)$, и индуктивные пределы последовательностей алгебр Кунца–Теплица [1].

Одна из важных задач в теории полугрупповых C^*-алгебр есть разложение таких алгебр на "ортогональные" подпространства (расслоение Фелла). Известно, что алгебру TO_n можно разложить по группе $\mathbb{Z}$, а ее индуктивные пределы раскладываются по подгруппе группы рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

В [2] введено понятие частичного представления групп, порождающего локальные группы. Локальные группы были введены Л.С. Понтрягиным для построения группы Ли с помощью некоторого симметрического подмножества [3], [4].

В данной статье приводится ряд свойств C^*-алгебр, порожденных регулярным представлением свободного произведения конечного числа абелевых полугрупп. В частности, утверждается, что для таких алгебр существует градуировка по локальной группе. Дается полное описание "гармоник" Фелла в случае, когда абелевы полугруппы являются конусами в соответствующих группах.

Поступила в редакцию 26.05.2023, после доработки 26.05.2023. Принята к публикации 29.05.2023.

1. Локальная группа

Под локальной группой будем понимать набор $\mathbf{g} = (g, g^2, m, i)$, где g — дискретное множество, g^2 — подмножество в декартовом произведении $g \times g$, $m\colon g^2 \to g$ и $i\colon g \to g$ — два отображения, причем выполняются следующие условия:

1) если (a,b),$(b,c) \in g^2$, и $(m(a,b),c)$, $(a, m(b,c)) \in g^2$, тогда $m(a, m(b,c)) = m(m(a,b),c)$;
2) если $(a,b) \in g^2$, тогда $(i(b), i(a)) \in g^2$ и $m(i(b), i(a)) = i(m(a,b))$;
3) существует такой элемент $e \in g$, что (e,a), (a,e) принадлежат g^2, $m(e,a) = m(a,e) = a$;
4) $(a, i(a))$ и $(i(a), a)$ принадлежат g^2, и $m(a, i(a)) = m(i(a), a) = e$.

Элемент e называется единицей g, отображение $m\colon g^2 \to g$ — произведением, а отображение $i\colon g \to g$ — взятием обратного. В данной статье локальная группа предполагается глобализуемой, т. е. помимо условия локальной ассоциативности 1) выполняется условие глобальной ассоциативности, и симметричной относительно взятия обратного. Применять локальные группы в C^*-алгебраических конструкциях было предложено в работах [5]–[7]. Пусть $\mathcal{A}$ — C^*-алгебра. Будем говорить, что алгебра $\mathcal{A}$ градуирована по $\mathbf{g}$, если существует набор банаховых пространств $\{B_g\}_{g\in\mathbf{g}}$ такой, что $\mathcal{A} = \overline{\bigoplus_{g\in\mathbf{g}} B_g}$, причем $B_g B_h \in B_{gh}$ (если gh определено), $B_g^* = B_{g^{-1}}$, $B_g \cap B_h = \{0\}$. Если при этом существует условное ожидание на подалгебру B_e (единичный слой), то C^*-алгебра $\mathcal{A}$ называется топологически градуированной. Напомним, что условным ожиданием на подалгебру $B_e \subset \mathcal{A}$ называется вполне положительное отображение $F\colon \mathcal{A} \to B_e$ такое, что $F(B_1 A B_2) = B_1 F(A) B_2$ для $B_1, B_2 \in B_e$, $A \in \mathcal{A}$.

Расслоением Фелла над локальной группой $\mathbf{g}$ называется семейство замкнутых подпространств $\mathcal{B} = \{B_a\}_{a\in\mathbf{g}}$ с введенными над ними операциями $\cdot\colon \mathcal{B}\times\mathcal{B} \to \mathcal{B}$ и $^*\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, если для всех $a, b \in \mathbf{g}$, $A, B \in \mathcal{B}$

1) $B_a B_b \subseteq B_{ab}$ для $(a,b) \in g^2$;
2) операция $\cdot\colon \mathcal{B}\times\mathcal{B} \to \mathcal{B}$ ассоциативна и билинейна, если $(a,b) \in g^2$ и (ab, c), $(a, bc) \in g^2$;
3) $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$;
4) $(B_a)^* \subseteq B_{a^{-1}}$;
5) операция $^*\colon B_a \to B_{a^{-1}}$ сопряженно-линейна;
6) B_e — C^*-алгебра;
7) $A^*A \in B_e$.

Если $\mathcal{A}$ — топологически градуированная C^*-алгебра, то ее градуировочные подпространства автоматически образуют расслоение Фелла с наследуемыми из алгебры операциями, а также существует сжимающее отображение $F_a\colon \mathcal{A} \to B_a$ такое, что $F_a(A) = A$, если $A \in B_a$. Очевидно, $F_a(B_b) = 0$ при $a \ne b$, т. е. F_a — ортогональный проектор.

Локальная группа тесно связана с понятием частичного представления (см. [2], 9.1). Пусть $B(H)$ — алгебра линейных ограниченных операторов на гильбертовом пространстве H. Отображение $\pi\colon \Gamma \to B(H)$ дискретной группы Γ называется частичным представлением, если выполняются следующие условия:

1) $\pi(e) = I$ — единичный оператор в $B(H)$;
2) $\pi(a)\cdot\pi(b)\cdot\pi(b^{-1}) = \pi(ab)\cdot\pi(b^{-1})$;
3) $\pi(a^{-1})\cdot\pi(a)\cdot\pi(b) = \pi(a^{-1})\cdot\pi(ab)$;
4) $\pi(b^{-1}) = \pi(b)^*$.

Очевидно, что $\pi(a)\cdot\pi(a)^*\cdot\pi(a) = \pi(a)$, $\pi(a)^*\cdot\pi(a)\cdot\pi(a)^* = \pi(a)^*$ и $\pi(a)^* = \pi(a^{-1})$ для любых $a \in \Gamma$, т.е. образ $\pi(\Gamma)$ есть инверсная полугруппа с нулем в $B(H)$. В ([5], утверждение 1) показано, что множество $\{a \in \Gamma\colon \pi(a) \neq 0\}$ образуют локальную группу.

Подмножество g в группе Γ назовем локальной подгруппой, если множество g можно наделить структурой локальной группы $\mathbf{g} = (g, g^2, m, i)$ так, что операции произведения и взятия обратного совпадают с соответствующими операциями в Γ.

Каждую симметрическую окрестность единицы в Γ можно наделить структурой локальной подгруппы.

Пусть $\pi\colon \Gamma \to B(H)$ — частичное представление, $g = \{a \in \Gamma\colon \pi(a) \neq 0\}$.

Предложение 1.

1) *Множество g можно наделить структурой локальной подгруппы группы* Γ;
2) $\pi(\mathbf{g})$ — *инверсная полугруппа.*

2. Свободное произведение полугрупп

Пусть группа $\Gamma = \Gamma_1 * \ldots * \Gamma_n$ — свободное произведение дискретных абелевых групп Γ_i, $i = 1, \ldots, n$. Напомним, что каждый элемент $a_i \in \Gamma_i$ называется буквой, а произведение $a = a_{i_1} * \ldots * a_{i_m}$, $a_{i_k} \in \Gamma_{i_k}$, $i_k = 1, \ldots, n$, $i_k \neq i_{k+1}$, называется словом.

Пусть S — полугруппа в Γ, порожденная свободным произведением полугрупп $S_i \subset \Gamma_i$, т. е. $S = S_1 * \ldots * S_n$. Предполагаем, что S содержит единицу группы Γ, и каждая полугруппа S_i порождает соответствующую группу Γ_i, т. е. $\Gamma_i = S_i \cdot S_i^{-1}$ и $S_i \cap S_i^{-1}$, где $S_i^{-1} = \{a^{-1} \in \Gamma_i\colon a \in S_i\}$.

Предложение 2. *Пусть $a \in \Gamma_i$, $b \in \Gamma_j$, $i \neq j$. Предположим, что $c \in S$ — такой элемент, что $b * c$ не принадлежит S. Тогда $a * b * c$ также не принадежит S.*

Пусть

$$l^2(\Gamma) = \left\{ f \in \Gamma \to \mathbb{C}\colon \sum_{a\in\Gamma} |f(a)|^2 < \infty \right\}$$

— гильбертово пространство со скалярным произведением $(f, g) = \sum\limits_{a\in\Gamma} f(a)\overline{g(a)}$. Семейство функций $\{e_a\}_{a\in\Gamma}$, где $e_a(b) = \delta_{a,b}$ — символ Кронекера, образует ортонормированный базис в $l^2(\Gamma)$.

Определим левое регулярное представление группы Γ на $l^2(\Gamma)$, отображая $a \to M_a$, где $M_a e_b = e_{a*b}$. C^*-алгебру, порожденную операторами M_a, $a \in \Gamma$, обозначим через $C_r^*(\Gamma)$.

Множество тех функций из $l^2(\Gamma)$, носитель которых принадлежит S, образуют гильбертово подпространство $l^2(S)$ с базисом $\{e_a\}_{a\in S}$.

Пусть $J\colon l^2(S) \to l^2(\Gamma)$ — естественное вложение. Определим отображение π группы Γ в пространство линейных операторов $B(l^2(S))$ на $l^2(S)$, полагая $\pi(a) = J^* M_a J$, $a \in \Gamma$. Заметим, что $\pi(a^{-1}) = J^* M_{a^{-1}} J = \pi(a)^*$.

Предложение 3. *Отображение $a \to \pi(a)$ есть частичное представление группы* Γ.

Следствие. Семейство $\{\pi(a)\}_{a\in\Gamma}$ есть инверсная полугруппа с нулем.

Через $C_\pi^*(\Gamma)$ обозначим C^*-алгебру на $l^2(S)$, порожденную операторами $\pi(a)$, $a \in \Gamma$. Пусть $C_r^*(S)$ — C^*-подалгебра алгебры $C_\pi^*(\Gamma)$, порожденная операторами $\pi(a)$, $a \in S$. В дальнейшем для удобства операторы $\pi(a)$, $a \in S$, будем обозначать через T_a. Пусть $M(S)$ — множество всех мономов, т. е. конечных произведений операторов T_a и T_b^* из полугруппы $\{T_a\}_{a\in S}$. Множество мономов $M(S)$ есть инверсная полугруппа операторов.

Лемма 1. *Существует вложение из* $\{\pi(a)\}_{a\in\Gamma}$ *в* $M(S)$.

Из этой леммы вытекает

Теорема 1. $C^*_\pi(\Gamma) = C^*_r(S)$.

Заметим, что если $a * b \notin S$, то $T_aT_b = 0$ и $\pi(a^{-1})\pi(a*b) = \pi(a*b)\pi(b^{-1}) = 0$, т. е. $\pi'\colon \mathbf{g} \to B(l^2(S))$, где $\pi' = \pi|_{\mathbf{g}}$, есть строгое $*$-представление ([6], определение 5) локальной группы $\mathbf{g}$ в $B(l^2(S))$, и $\pi'(\mathbf{g}) = M(S)$. Далее будем рассматривать сужение π на $\mathbf{g}$, которое обозначим той же буквой. Также нетрудно проверить, что $\mathbf{g} = \{a \in \Gamma\colon (a*S)\cap S \neq \emptyset\}$ и $\pi\colon \mathbf{g} \to B(l^2(S))$ удовлетворяет условию

$$\pi(a)e_b = \begin{cases} e_{a*b}, & \text{если} \quad a*b \in S; \\ 0, & \text{если} \quad a*b \notin S, \end{cases}$$

т. е. $C^*_r(S)$ является алгеброй, порожденной подмножеством $S \subset \Gamma$ ([6], определение 7). Примеры таких алгебр для подмножества, которое не является полугруппой, приведены в [7]. В случае, когда $S \subset \Gamma$ — дискретная полугруппа, содержащаяся в группе Γ, $C^*_r(S)$ — полугрупповая Γ-градуированная алгебра, если же Γ (и S) является свободным произведением групп (полугрупп), то $C^*_r(S)$ уже топологически градуирована по локальной группе $\mathbf{g}$.

Определим отображение $\rho\colon M(S) \to \Gamma$: если $W \in M(S)$ и $W = T_{a_{i_1}}T^*_{a_{i_2}}\dots T_{a_{i_m}}$, $a_{i_k} \in \Gamma_{i_k}$, то $\rho(W) = a_{i_1} * a^{-1}_{i_2} * \dots * a_{i_m}$.

Лемма 2. *Отображение* $\rho\colon M(S) \to \Gamma$ *есть инверсный гомоморфизм инверсной полугруппы* $M(S)$ *на* $\mathbf{g}$.

Пусть B_a, $a \in \mathbf{g}$, — замкнутое подпространство в $C^*_r(S)$, порожденное линейными комбинациями элементов множества $M_a = \{W \in M(S)\colon \rho(W) = a\}$.

Теорема 2.

1) $B_a \cap B_b = \{0\}$, $a \neq b$;
2) $B_a \cdot B_b \subset B_{a*b}$, *если* $(a,b) \in g^2$, *и* $B_a \cdot B_b = \{0\}$ *в противном случае*;
3) $C^*_r(S) = \overline{\bigoplus_{a\in\mathbf{g}} B_a}$;
4) B_e — *коммутативная* C^*-*алгебра*;
5) *существует условное ожидание* $F_e\colon C^*_r(S) \to B_e$.

Доказательство. Условие 4) следует из следствия. Пусть $P = \sum\limits_{i=-m}^{m} A_{a_i}$, $A_{a_i} \in B_{a_i}$. Положим $F_e(P) = A_e \in B_e$. Имеем

$$\|P\|^2 = \sup_{\|f\|=1}(P(f), P(f)) \geq \sup_{e_b}(Pe_b, Pe_b) = \sup_{e_b}\left|\sum_{i,j}(A_{a_i}e_b, A_{a_j}e_b)\right| =$$

$$= \sup_{e_b}\sum_i (A_{a_i}e_b, A_{a_i}e_b) = \sup_{e_b}\sum_i (A^*_{a_i}A_{a_i}e_b, e_b) = \left\|\sum_i A^*_{a_i}A_{a_i}\right\|.$$

Поскольку $P^*P = \sum\limits_{i,j} A^*_{a_i}A_{a_j} = \sum\limits_i A^*_{a_i}A_{a_i} + \sum\limits_{i\neq j} A^*_{a_i}A_{a_j}$, то

$$\|P\|^2 \geq \left\|\sum_i A^*_{a_i}A_{a_i}\right\| = \|F_e(P^*P)\|.$$

Полиномы плотны в $C_r^*(S)$, следовательно, F_e расширяется до непрерывного отображения $C_r^*(S) \to B_e$. Поскольку $I \in B_e$ и $F_e(I) = I$, то F_e — проектор единичной нормы, т. е. условное ожидание, семейство $\{B_a\}_{a\in\mathbf{g}}$ есть расслоение Фелла по локальной группе $\mathbf{g}$ и $C_r^*(S) = \overline{\bigoplus_{a\in\mathbf{g}} B_a}$. □

3. C^*-алгебра, порожденная конусом

Пусть S_i — конус в группе Γ_i, т.е. $\Gamma_i = S_i \cup S_i^{-1}$, $S_i \cap S_i^{-1} = e$. Если на Γ_i задать порядок с помощью полугрупп S_i, $a \prec b$, если $b = a \cdot c$, где $c \in S$. Тогда $S_i = \Gamma_i^+ = \{a \in \Gamma_i \colon e \preceq a\}$. Везде в дальнейшем предполагаем, что S_i — конус в Γ_i, $i = 1, \ldots, n$.

Лемма 3. *$\mathbf{g} = \mathbf{g}_+ \cup \mathbf{g}_0 \cup \mathbf{g}_-$, где $\mathbf{g}_+$ — слова, состоящие из букв из S_i, $\mathbf{g}_-$ — из S_i^{-1}, и $\mathbf{g}_0 = \left\{a * b^{-1}, a \in \mathbf{g}_+, b^{-1} \in \mathbf{g}_-\right\}$.*

В дальнейшем, если $a \in \mathbf{g}_+$, $a = a_{i_1} * \cdot * a_{i_m}$, то $\pi(a) = T_a = T_{a_{i_1}} \cdot \cdots \cdot T_{a_{i_m}}$, если $a \in \mathbf{g}_-$, то $\pi(a) = T_a^*$, и $\pi(a) = T_c T_b^*$ в случае $a = c * b^{-1}$.

Если $a, b \in \mathbf{g}_+$, то $a * b \in \mathbf{g}_+$. Аналогичное утверждение верно и для $\mathbf{g}_-$. Поэтому замыкание линейных комбинаций элементов из $\{B_a\}_{a\in\mathbf{g}_+}$ и $\{B_a\}_{a\in\mathbf{g}_-}$ есть замкнутые подалгебры алгебры $C_r^*(S)$. Эти алгебры будем обозначать через $C_r^+(S)$ и $C_r^-(S)$ соответственно. Отметим, что $\mathbf{g}_0 = \mathbf{g}_+ * \mathbf{g}_-$ есть инволютивная подполугруппа в $\mathbf{g}$.

Опишем структуру пространств B_a, $a \in \mathbf{g}_0$.

Лемма 4.

1) *Если $W \in B_a, a \in \mathbf{g}_+$, то $a \in S$ и $B_a = T_a B_e$;*
2) *если $W \in B_a, a \in \mathbf{g}_-$, то $B_a = B_e T_a^*$;*
3) *если $W \in B_a, a \in \mathbf{g}_0$ и $W = T_c T_b^*$, то $B_a = T_c B_e T_b^*$.*

Лемма 5. *Пусть $a = a_{i_1} * \ldots * a_{i_m}$ и $b = b_{j_1} * \cdots * b_{j_k}$ — слова в S_i. Предположим, что $T_a^* T_b \neq \{0\}$, где$T_a = T_{a_{i_1}} \cdot \cdots \cdot T_{a_{i_m}}$, $T_b = T_{b_{j_1}} \cdot \cdots \cdot T_{b_{j_k}}$. Тогда либо $T_a^* T_b = T_c$, $b = a * c$, либо $T_a^* T_b = T_c^*$, $a = b * c$.*

По лемме 3 разобьем локальную подгруппу $\mathbf{g}$ группы Γ на три множества: $\mathbf{g}_+$, $\mathbf{g}_0$, $\mathbf{g}_-$, где $\mathbf{g}_+ = \left\{a\right\}_{a\in S}$, $\mathbf{g}_- = \{a^{-1}\}_{a\in S/\{e\}}$ и $\mathbf{g}_0 = \left\{a * b^{-1} \in \Gamma \colon a, b \in S/\{e\}\right\}$. Мы предполагаем, что слово $a * b^{-1}$ несократимо, т.е. последние буквы в словах a и b принадлежат различным группам, и $\mathbf{g} = \mathbf{g}_+ \cup \mathbf{g}_0 \cup \mathbf{g}_-$. Пусть

$$C_r^+(S) = \overline{\bigoplus_{a\in\mathbf{g}_+} B_a}, \quad C_r^0(S) = \overline{\bigoplus_{a\in\mathbf{g}_0} B_a}, \quad C_r^-(S) = \overline{\bigoplus_{a\in\mathbf{g}_-} B_a}.$$

Очевидно, $C_r^*(S) = \overline{C_r^+(S) \oplus C_r^0(S) \oplus C_r^-(S)}$.

Теорема 3.

1) *$B_a = T_a \cdot B_e$, если $a \in \mathbf{g}_+$;*
2) *$B_{a*b^{-1}} = T_a B_e T_b^*$, если $a \in b^{-1} \in \mathbf{g}_0$;*
3) *$B_{a^{-1}} = B_e T_a^*$, если $a^{-1} \in \mathbf{g}_-$.*

Литература

[1] Григорян С.А., Гумеров Р.Н., Липачева Е.В. *Пределы индуктивных последовательностей алгебр Теплица-Кунца*, в сб.: Математика квантовых технологий, Тр. МИАН, **313**, 67–77 (МИАН, М., 2021).

[2] Exel R. *Partial Dynamical Systems, Fell Bundles and Applications*, Vol. 224, Mathematical surveys and monographs (Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2017).

[3] Понтрягин Л.С. *Непрерывные группы* (ГОНТИ НКТП СССР, М., 1938).

[4] Мальцев А.И. *О локальных и полных топологических группах*, в сб.: Избранные труды, Т.1, под ред. Александрова П.С. и др. (Наука, М., 1976).

[5] Grigoryan S.A., Kuznetsova A.Yu. *On a Grading of the Cuntz Algebra*, Lobachevskii Journal of Mathematics **40** (10), 1479–1482 (2019).

[6] Григорян С.А., Кузнецова А.Ю. *Локальные группы и их представления*, Изв. вузов. Матем. (6), 73–78 (2020).

[7] Григорян С.А., Кузнецова А.Ю. *Об одном классе локальных групп и их представлений*, Изв. вузов. Матем. (2), 76–82 (2022).

Сурен Аршакович Григорян

Казанский государственный энергетический университет,
ул. Красносельская, д. 51, г. Казань, 420066, Россия,

e-mail: gsuren@inbox.ru

Азат Шамильевич Шарафутдинов

Казанский государственный энергетический университет,
ул. Красносельская, д. 51, г. Казань, 420066, Россия,

e-mail: shash1996@mail.ru

S.A. Grigoryan, A.Sh. Sharafutdinov

Grading of a semigroup C^*-algebra by a local group

Abstract. In this paper we consider the grading by a local group of the semigroup C^*-algebra generated by the free product of abelian semigroups. The simplest of these algebras is the Cuntz-Toeplitz algebra TO_n. For such algebras, an abstract version of the Fourier series by the local group is constructed. A number of properties of the "harmonics" of this series are given.

Keywords: semigroup C^*-algebra, local group, Fell bundle, partial representation.

Suren Arshakovich Grigoryan

Kazan State Power Engineering University,
51 Krasnoselskaya str., Kazan, 420066 Russia,

e-mail: gsuren@inbox.ru

Azat Shamilyevich Sharafutdinov

Kazan State Power Engineering University,
51 Krasnoselskaya str., Kazan, 420066 Russia,

e-mail: shash1996@mail.ru