

ИЛЬИНСКИЙ Н. Б., ЛАБУТКИН А. Г., САЛИМОВ Р. Б.

ЗАДАЧА О ВЗРЫВЕ НЕСИММЕТРИЧНОГО ПОВЕРХНОСТНОГО ЗАРЯДА ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

В работе [1] исследована задача об образовании выемки выброса грунта при взрыве симметричного поверхностного заряда, толщина сечения которого меняется по линейному закону. В основу исследования положена твердо-жидкостная модель взрыва [2].

Ниже для той же модели рассматривается задача об образовании выемки выброса грунта при взрыве несимметричного поверхностного заряда.

Пусть при взрыве бесконечно длинного заряда сечением $AA'B'B$ образовалась выемка выброса грунта DQC (рис. 1). Область течения обозначим через G_z , а ее границу — через Γ_z .

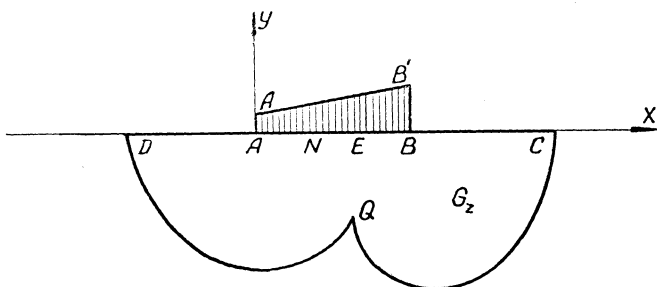


Рис. 1.

В соответствии с принятой моделью взрыва существует комплексный потенциал $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, где $\varphi = -P/\rho$, P — импульсное давление, $\rho = \text{const}$ — плотность жидкости (грунта), ψ — функция тока.

На границе области G_z имеем

$$\begin{aligned} \varphi &= 0 \text{ на } CB \text{ и } AD, \\ \psi &= 0 \text{ и } v = v_0 \text{ на } DQC, \end{aligned} \quad (1)$$

где $v_0 = \text{const}$ — известная критическая скорость.

Пусть форма сечения заряда $AA'B'B$ такова, что на AB

$$\varphi = a_1 x + a_2 \quad (a_1 < 0, a_2 < 0), \quad (2)$$

где $0 \leq x \leq l$, l — ширина заряда. Отметим, что при малой толщине заряда импульсное давление P , согласно [3], пропорционально толщине заряда δ , т. е. $P = k\delta$, где k — известный коэффициент пропорциональности. При этом условие (2) будет иметь место, когда толщина заряда меняется по линейному закону

$$\delta(x) = \frac{q_2 - q_1}{l} x + q_1, \quad (3)$$

где q_1 — длина отрезка AA' , q_2 — длина отрезка BB' (рис. 1). Коэффициенты a_1 и a_2 выражаются через q_1 и q_2 по формулам $a_1 = k(q_1 - q_2)/\rho l$, $a_2 = -kq_1/\rho$.

Таким образом, на прямолинейном участке $DABC$ границы Γ_z , согласно условиям (1), (2), известна реальная часть аналитической в G_z функции $w(z)$, а на криволинейном участке DQC известны $\text{Im } w(z) = 0$ и $|dw/dz| = v_0$. Требуется найти участок DQC контура Γ_z .

Введем плоскость годографа комплексной скорости

$$\omega = dw/dz = v_x + i(-v_y), \quad (4)$$

где v_x, v_y — проекции вектора скорости \vec{v} на координатные оси. На отдельных участках границы Γ_z имеют место условия

$$\begin{aligned} v_x &= 0, \quad v_y > 0 \text{ на } AD \text{ и } BC, \\ v^2 &= v_x^2 + v_y^2 = v_0^2 \text{ на } DQC, \\ v_x &= a_1 < 0, \quad v_y < 0 \text{ на } AB. \end{aligned} \quad (5)$$

Тогда, учитывая, что всюду в области G_z должно быть $v > v_0$, построим область G_ω в плоскости ω (рис. 2), соответствующую области G_z .

Положение конца разреза N границы Γ_ω области G_ω неизвестно. В то же время коэффициент a_2 формулы (2), характеризующий толщину заряда, в решении не используется. Поэтому положение точки N на Γ_ω , т. е. $\min |v_y|$ на AB , будем задавать. Тогда толщина заряда и соответствующая ему форма выемки выброса грунта определяется в процессе решения задачи.

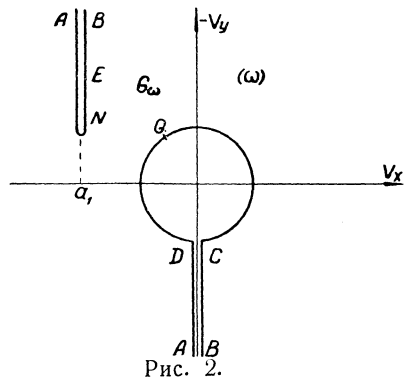


Рис. 2.

Пусть функция $\omega = \omega(\zeta)$ конформно отображает полуплоскость $\text{Im } \zeta > 0$ переменного $\zeta = \xi + i\eta$ на область G_ω так, что точкам $-a, -1, 1, a$ ($1 < a < \infty$) оси ξ соответствуют точки A, D, C, B границы Γ_ω области G_ω . Тогда в бесконечно удаленную точку $\zeta = \infty$ перейдет некоторая точка E участка AB границы Γ_ω . Соответствие остальных точек показано на рис. 3.

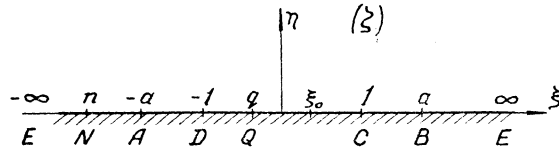


Рис. 3.

Введем в рассмотрение аналитическую в полуплоскости $\text{Im } \zeta > 0$ функцию $z(\zeta) = x(\xi, \eta) + iy(\xi, \eta)$, конформно отображающую эту полуплоскость на область G_z . Функцию (4) представим в виде

$$\omega = \left| \frac{d\omega}{dz} \right| e^{-i\theta}, \quad (6)$$

где θ — угол, образованный вектором скорости \bar{v} с положительным направлением оси x . Так как участок DQC границы Γ_z является линией тока, то на нем $\frac{\partial y}{\partial \xi} / \frac{\partial x}{\partial \xi} = \text{tg } \theta$ или

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} \sin \theta - \frac{\partial y}{\partial \xi} \cos \theta = 0 \quad (-1 \leq \xi \leq 1), \quad (7)$$

где $x = x(\xi, 0)$, $y = y(\xi, 0)$, а $\theta = \theta(\xi)$ — функция, определяемая из соответствия точек границ при конформном отображении области G_ω на полуплоскость $\text{Im } \zeta > 0$. На остальных участках оси ξ имеем

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при } -\infty < \xi < -1, 1 < \xi < \infty.$$

Следовательно, пришли к задаче построения аналитической в полуплоскости $\text{Im } \zeta > 0$ функции $\frac{dz}{d\zeta} = \frac{\partial x}{\partial \xi} + i \frac{\partial y}{\partial \xi}$ по краевому условию

$$c(\xi) \frac{\partial x}{\partial \xi} + d(\xi) \frac{\partial y}{\partial \xi} = 0, \quad (8)$$

где $c(\xi) = \sin \theta(\xi)$, $d(\xi) = -\cos \theta(\xi)$ при $|\xi| < 1$, $c(\xi) = 0$, $d(\xi) = 1$ при $1 < |\xi| < \infty$.

Установим класс функций, в котором следует искать решение задачи (8). Можно показать, что функция $z'(\zeta)$ в точках D и C обращается в бесконечность порядка $1/2$,

а в точке Q обращается в нуль первого порядка. В точке $\zeta = \infty$ функция $z'(\zeta)$ имеет нуль второго порядка.

Следовательно, решение полученной линейной однородной краевой задачи Гильберта (8) с разрывными коэффициентами для аналитической в полуплоскости $\text{Im } \zeta > 0$ функции $z'(\zeta)$ надо отыскивать в классе функций, обращающихся в нуль первого порядка в точке $\xi = q$ и в нуль второго порядка на бесконечности, а также обращающихся в бесконечность половинного порядка в точках $-1, 1$ оси ξ .

Представим функцию $z'(\zeta)$ в виде

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{\zeta - q}{(\zeta + i)^3} g(\zeta), \quad (9)$$

где $g(\zeta) = \mu(\xi, \eta) + i\nu(\xi, \eta)$ — функция, ограниченная на бесконечности и в окрестности точки q оси ξ , а в точках $-1, 1$ оси ξ имеющая особенность половинного порядка. При $\eta = 0$ из (9) имеем

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} + i \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\xi - q}{(\xi + i)^3} [\mu(\xi) + i\nu(\xi)].$$

Выражая отсюда $\partial x/\partial \xi$ и $\partial y/\partial \xi$, подставляя в (8) и сокращая на $(\xi - q)/(\xi^2 + 1)^3$, получим краевое условие для $g(\zeta)$ в виде

$$a(\xi)\mu(\xi) + b(\xi)\nu(\xi) = 0, \quad (10)$$

где $a(\xi) = (\xi^3 - 3\xi)c(\xi) - (3\xi^2 - 1)d(\xi)$, $b(\xi) = (3\xi^2 - 1)c(\xi) + (\xi^3 - 3\xi)d(\xi)$. Соответствующая задаче Гильберта (10) задача Римана имеет вид [4]: $F^+(\xi) = G(\xi)F^-(\xi)$, где $F^+(\xi) = g(\xi)$, $G(\xi) = -[a(\xi) + ib(\xi)]/[a(\xi) - ib(\xi)]$, причем функция $F(\zeta)$ удовлетворяет условию $F^+(\zeta) = F^-(\zeta)$. На отдельных участках оси ξ находим

$$G(\xi) = \left(\frac{\xi + i}{\xi - i}\right)^3 \text{ при } |\xi| > 1, \quad G(\xi) = \left(\frac{\xi + i}{\xi - i}\right)^3 e^{2i\theta(\xi)} \text{ при } |\xi| < 1.$$

В соответствии с установленным классом решений, за значения $\arg G(\xi) = \gamma(\xi)$ примем

$$3\beta(\xi) + 2\theta(\xi) \text{ при } \xi_0 < \xi < 1, \quad 3\beta(\xi) + 2\pi \text{ при } 1 < \xi < \infty, \\ 3\beta(\xi) - 4\pi \text{ при } -\infty < \xi < -1, \quad 3\beta(\xi) + 2\theta(\xi) \text{ при } -1 < \xi < \xi_0,$$

где $-1 < \xi_0 < 1$, $\beta(\xi) = \arg \frac{\xi + i}{\xi - i}$ — означает непрерывную при $-\infty < \xi < \infty$ ветвь. Индекс задачи Гильберта будет

$$\kappa = \frac{1}{2\pi} [\arg G(\xi_0 - 0) - \arg G(\xi_0 + 0)] = 0.$$

В этом случае ее решение определяется с точностью до действительного постоянного множителя [4]

$$g(\zeta) = A_0 \chi(\zeta), \quad A_0 = \bar{A}_0 = \text{const}, \quad (11)$$

где

$$\chi(\zeta) = \exp \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma(\tau) d\tau}{\tau - \zeta} \right].$$

Граничное значение $\chi(\zeta)$ выражается формулой

$$\chi(\xi) = f(\xi) \exp \frac{i\gamma(\xi)}{2}, \quad (12)$$

где

$$f(\xi) = \exp \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma(\tau) d\tau}{\tau - \xi},$$

интеграл в последнем выражении понимается в смысле главного значения.

На основании (9) и (11) найдем

$$z(\zeta) = A_0 \int_{-a}^{\zeta} \frac{\sigma - q}{(\sigma + i)^3} \chi(\sigma) d\sigma. \quad (13)$$

Осуществляя в (13) предельный переход при $\zeta \rightarrow \xi$ и выделяя реальную и мнимую части, получим параметрические уравнения Γ_z

$$\left. \begin{aligned} x &= A_0 \int_{-a}^{\xi} (\sigma - q) f(\sigma) \Phi(\sigma) d\sigma \\ y &= A_0 \int_{-a}^{\xi} (\sigma - q) f(\sigma) \Phi_1(\sigma) d\sigma \end{aligned} \right\} (-\infty < \xi < \infty), \quad (14)$$

где

$$\Phi(\sigma) = \left[(\sigma^3 - 3\sigma) \cos \frac{\gamma(\sigma)}{2} + (3\sigma^2 - 1) \sin \frac{\gamma(\sigma)}{2} \right] (\sigma^2 + 1)^{-3},$$

$$\Phi_1(\sigma) = \left| (\sigma^3 - 3\sigma) \sin \frac{\gamma(\sigma)}{2} - (3\sigma^2 - 1) \cos \frac{\gamma(\sigma)}{2} \right| (\sigma^2 + 1)^{-3}.$$

Так как $\frac{dw}{dz} = \omega(\zeta)$ или $d\omega = \omega(\zeta) \frac{dz}{d\zeta} d\zeta$, то с учетом (13) будем иметь

$$\omega(\zeta) = A_0 \int_{-1}^{\zeta} \frac{\sigma - q}{(\sigma + i)^3} \omega(\sigma) \chi(\sigma) d\sigma. \quad (15)$$

Из условия $\text{Re } \omega(1) = \varphi_c = 0$ определим параметр q

$$q = \int_{-1}^1 \sigma (1 + \sigma^2)^{-3/2} f(\sigma) d\sigma / \int_{-1}^1 (1 + \sigma^2)^{-3/2} f(\sigma) d\sigma. \quad (16)$$

Множитель A_0 найдется из условия $z_B = z(a) = l$

$$l = A_0 \int_{-a}^a (\sigma - q) f(\sigma) \Phi(\sigma) d\sigma. \quad (17)$$

Значение потенциала скорости φ в точке A , т. е. величина a_2 , определяется формулой

$$a_2 = A_0 \int_{-\infty}^{-a} (\sigma - q) v(\sigma) f(\sigma) \Phi_2(\sigma) d\sigma - A_0 \int_a^{\infty} (\sigma - q) v(\sigma) f(\sigma) \Phi_2(\sigma) d\sigma, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_2(\sigma) = & \left\{ (\sigma^3 - 3\sigma) \cos \left[\frac{3}{2} \beta(\sigma) - \theta(\sigma) \right] + \right. \\ & \left. + (3\sigma^2 - 1) \sin \left[\frac{3}{2} \beta(\sigma) - \theta(\sigma) \right] \right\} (1 + \sigma^2)^{-3}, \quad v(\sigma) = |\omega(\sigma)|, \\ & \theta(\sigma) = -\arg \omega(\sigma). \end{aligned}$$

Зная q и A_0 , по формулам (14) при $-1 \leq \xi \leq 1$ найдем границу выемки выброса грунта DQC .

Расчет числового примера. Пусть $a_1 = -0.2$, $l = 1$, $v_{yN} = -0.2$, $v_0 = 0.05$. Найдем функцию $\omega(\zeta)$, конформно отображающую полуплоскость $\text{Im } \zeta > 0$ на область G_ω (рис. 2). Предварительно область G_ω преобразуем в ограниченную функцией $t = 1/\omega$. Полученная область G_t , ограниченная внешней окружностью радиуса $1/v_0 = 20$ с центром в начале координат и разрезом $DANBC$ (разрез ANB проведен по дуге окружности радиуса $1/2|a_1| = 2.25$ с центром, смещенным по вещественной оси от начала координат на величину $1/2a_1 = -2.25$), изображена на рис. 4. Так как в изложенном методе решения задачи нет необходимости в построении всей функции $\omega(\zeta)$, а достаточно найти лишь ее граничные значения на участках $(-\infty, -a)$, $(-1, 1)$, (a, ∞) оси ξ , то удобно использовать метод электромоделирования (см., напр., [5]).

Приложив одну шину по берегу разреза BC (рис. 4), а другую — по берегу разреза AD , отобразим конформно область G_t на прямоугольник $ADCB$ с основанием $DC = 1$ и высотой $CB = 0.28$ (прямоугольник обозначим G_u , а его границу Γ_u). Разделив основание прямоугольника DC на равные части точками u_i , $i = \overline{0, 20}$ ($u_0 = 0 < u_1 < \dots < u_{19} < u_{20} = 1$), учитывая (6) и то, что на участке DQC границы Γ_t области

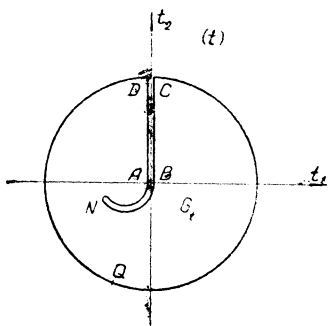


Рис. 4.

$-1 \leq \xi \leq 1$ вычислим координаты искомой кривой DQC .

Разделив затем верхнее основание AB прямоугольника G_u точками u_k , $k = \overline{0, 20}$ ($u_0 = 0,28i < \dots < u_{19} < u_{20} = 1 + 0,28i$) и учитывая, что на участке ANB границы Γ_t $t = \frac{1}{v} e^{i\theta}$, найдем $v_k = v(u_k)$ и $\theta_k = \theta(u_k)$. Так как отображение прямоугольника G_u на верхнюю полуплоскость известно, то будем знать $v(\xi)$ и $\theta(\xi)$ на участках $(-\infty, -a)$ и (a, ∞) оси ξ . Подставляя $v(\xi)$ и $\theta(\xi)$ в (18), найдем $a_2 = -0,21$.

$$G_t \quad t = \frac{1}{v_0} e^{i\theta}, \quad \text{найдем} \quad \theta_i = \theta(u_i).$$

Отобразив затем полуплоскость $\text{Im } \zeta > 0$ (рис. 3) на прямоугольник G_u формулой Кристоффеля — Шварца так, чтобы точкам $-a$, -1 , 1 , a оси ξ соответствовали точки A , D , C , B границы Γ_u , установим зависимость $\theta(\xi)$, на участке $(-1, 1)$. Подставляя эту зависимость в (16), определим $q = 0,083$, после чего по (17) найдем $A_0 = 0,37$, а по (14) при $\zeta = \xi$,

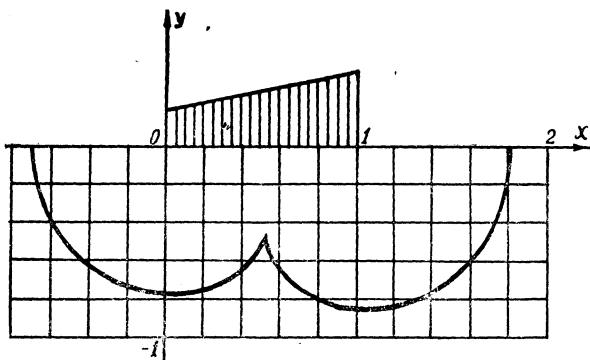


Рис. 5.

На рис. 5 изображены эпюра $\varphi(x)$ (ось φ совпадает с осью y , но направлена противоположно) и соответствующая выемка выброса грунта, полученные в результате численного расчета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильинский Н. Б., Лабуткин А. Г., Салимов Р. Б. Об одном случае взрыва симметричного поверхностного заряда переменной толщины. — ПМТФ, 1976, № 3.
2. Кузнецов В. М., Поляк Э. Б. Импульсно-гидродинамические схемы расчета взрыва на выброс шнуровых зарядов. — „Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых“, 1973, № 4, с. 32—39.

3. Кузнецов В. М., Лаврентьев М. А., Шер Е. И. О направленном метании грунта при помощи взрывчатого вещества. — ПМТФ, 1960, № 4, с. 49—50.

4. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.

5. Положий Г. Н. Эффективное решение задачи о приближенном конформном отображении односвязных и двусвязных областей и определение постоянных Кристоффеля — Шварца при помощи электрогидродинамических аналогий. — „УМЖ“, 1955, т. 7, № 4, с. 423—432.

Доложено на семинаре 3 февраля 1976 г.