

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

S. A. Маев, Перенос тепла в разреженном газе, *TVT*,  
1967, Volume 5, Issue 1, 114–120

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have  
read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.89

January 14, 2025, 03:27:19



УДК 533.722.536.022

## ПЕРЕНОС ТЕПЛА В РАЗРЕЖЕННОМ ГАЗЕ

С. А. Маев

Рассмотрен метод вычисления теплового потока в разреженном газе с помощью уравнений переноса, полученных по методу Грэда. Показано, что использование обычного уравнения теплопроводности и скачков температур на границах дает правильные результаты для любой степени разрежения. Показано, что при соответствующем выборе сечения можно пользоваться приближенной формулой Смолуховского. Предложены уточненные значения параметров потенциала Леннарда — Джонса для взаимодействия атомов цезия.

В последнее время появился ряд работ, где рассматривается теплопроводность между двумя параллельными пластинами [1, 3]. Эта задача представляет определенный интерес для исследования процессов переноса в газе, в частности, для определения кинетических коэффициентов, вида взаимодействия молекул, коэффициентов аккомодации атомов на поверхности и т. п. В [1] измерялся поток тепла между параллельными пластинами в парах цезия; при этом величина теплового потока приближенно дается выражением [2, 3]

$$S_0 = \frac{\kappa(T_0 - T_d)}{d + g_1 + g_2}, \quad (1)$$

где  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности;  $T_0$ ,  $T_d$  — температура горячей и холодной стенки;  $d$  — расстояние между ними;  $g_1$  и  $g_2$  — экстраполированные длины возле горячей и холодной поверхности, причем

$$g_1 = \frac{2 - a_1 \kappa \sqrt{2\pi m T_0}}{a_1 4p_0}, \quad g_2 = \frac{2 - a_2 \kappa \sqrt{2\pi m T_d}}{a_2 4p_0}. \quad (2)$$

Здесь  $p_0$  — давление газа;  $m$  — масса его молекулы;  $a_1$ ,  $a_2$  — коэффициенты аккомодации. По порядку величины  $g_1$  и  $g_2$  соответствуют длине свободного пробега молекул  $l$ . Эти формулы получены в предположении, что в газе поток тепла пропорционален градиенту температуры, а на границах занимаемого газом объема имеются скачки температуры

$$T_{ст} - T_r = -\psi \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \psi \sim \frac{l(2-a)}{a}. \quad (3)$$

Здесь  $T_{ст}$  — температура стенки;  $T_r$  — температура газа возле стенки; величина  $\psi$  носит название коэффициента температурного скачка. Простой вывод соотношения (3) можно найти в работе [4].

В настоящей работе показывается, что использование граничного условия типа (3) справедливо во всей области длин пробега от  $l = 0$  до  $l = \infty$  (свободномолекулярный режим). При этом тепловой поток с достаточной степенью точности пропорционален градиенту температуры.

Для решения задачи о переносе тепла применим уравнения переноса, полученные методом Грэда [5]. Для покоящегося одноатомного газа в при-

ближении восьми моментов в одномерной геометрии они имеют вид

$$\frac{dI}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dS}{dx} = 0, \quad \frac{5p}{2m} \frac{dT}{dx} = -\frac{16}{15} n \Omega^{22} \left( S - \frac{5}{2} IT \right). \quad (4)$$

Здесь  $I, S$  — потоки частиц и тепла;  $p$  — давление. Температура  $T$  измеряется в энергетических единицах;  $\Omega^{22}$  — интеграл Чепмена [6]. Из (4) получаем

$$I = \text{const}, \quad p = \text{const} = p_0, \quad S = \text{const} = -\kappa \frac{dT}{dx} + \frac{5}{2} IT, \quad (5)$$

где  $\kappa = 75T / 32m\Omega^{22}$  — коэффициент теплопроводности.

Граничные условия для рассматриваемой задачи получены в работе [7] в предположении диффузного отражения частиц от стенки. Учет упругого отражения не представляет труда. Пусть  $R$  — коэффициент отражения частиц от стенки, причем считаем, что он не зависит от их скорости. Тогда граничное условие для функции распределения частиц имеет вид

$$f^{(+)}(c_x, c_y, c_z) = Rf^{(-)}(-c_x, c_y, c_z) + \frac{m^2 I_0}{2\pi T_0^2} e^{-\frac{mc^2}{2T_0}}, \quad c_x > 0. \quad (6)$$

Здесь  $f^{(\pm)}$  — функция распределения для частиц, летящих в положительном и отрицательном направлениях по отношению к внешней нормали (ось  $x$ );  $I_0$  — поток частиц, диффузно отраженных от стенки, равный  $n_0 \sqrt{T_0} / 2\pi m$ . Уравнение (6) показывает, что часть атомов в количестве  $R$  отражается от стенки зеркально, остальные адсорбируются на ней и испускаются затем с максвелловским распределением скоростей. Используя для  $f^{(\pm)}$  разложение Грэда в приближении восьми моментов, умножая (6) на  $c_x, c^2 c_x$  и интегрируя по пространству скоростей  $c_x > 0$ , получим

$$\frac{1+R}{2} I = I_0 - \frac{1}{4} n \bar{v} (1-R), \quad \frac{1+R}{2} S = 2I_0 T_0 - \frac{1}{4} n \bar{v} (1-R) 2T. \quad (7)$$

Здесь  $n, T$  — плотность частиц и температура газа возле стенки;  $n = p_0 / T$ ;  $\bar{v} = \sqrt{8T} / \pi m$ ;  $T_0$  — температура стенки. Если ось  $x$  направлена против внешней нормали, у величин  $I$  и  $S$  в (7) следует изменить знак. Записывая граничные условия для холодной и горячей поверхности, найдем величины скачков температуры

$$T_0 - T(0) = \frac{2}{n\bar{v}(1-R_0)} \left[ \frac{1+R_0}{2} S - (1+R_0) IT_0 \right],$$

$$T(d) - T_d = \frac{2}{n\bar{v}(1-R_d)} \left[ \frac{1+R_d}{2} S - (1+R_d) IT_d \right], \quad (8)$$

где  $R_0, R_d$  — коэффициенты отражения частиц на горячей и холодной поверхности.

В дальнейшем рассмотрим теплопроводность без переноса массы, положив  $I \equiv 0$ . (Случай  $I \neq 0$  описывает так называемую перекоонденсацию, т. е. перенос вещества с одной поверхности на другую.) В этом приближении из (8) с помощью (5) получаем выражение (3), где  $T_\Gamma = T$  — температура газа возле стенки и коэффициент температурного скачка

$$\psi = \frac{75\pi}{128} l \frac{2-a}{a},$$

где  $l = 1/\sqrt{2}nQ$ ;  $a = 1-R$ ;  $Q$  — сечение рассеяния атомов. Это выражение для  $\psi$  совпадает с тем, которое приведено в [2]. Введем безразмерные

величины

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{T(x)}{T_0} \quad n = \frac{S\sqrt{2\pi m}}{4\rho_0\sqrt{T_0}}, \quad \eta_1 = \frac{2-a_1}{a_1} n \\ \eta_2 &= \frac{2-a_2}{a_2} \eta, \quad \tau_1 = \frac{T(0)}{T_0}, \quad \tau_2 = \frac{T(d)}{T_0}, \\ \theta &= T_d/T_0, \quad T(0) = T_1, \quad T(d) = T_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Выражая в граничных условиях (8)  $n$  через  $\rho$ ,  $T$ , получим граничные значения температуры

$$\tau_1 = \left( \sqrt{1 + \frac{1}{4}\eta_1^2} - \frac{1}{2}\eta_1 \right)^2, \quad \tau_2 = \left( \sqrt{\theta + \frac{1}{4}\eta_2^2} + \frac{1}{2}\eta_2 \right)^2. \quad (10)$$

Рассмотрим сначала случай постоянного коэффициента теплопроводности. Из (5) получаем

$$T(x) = T_1 - \frac{S}{\kappa} x, \quad S = \kappa(T_1 - T_2)/d.$$

Последнюю формулу, используя выражения (8) для скачков температуры, можно записать в виде (1), где в этом случае

$$g_1 = \frac{2-a_1}{a_1} \frac{\kappa\sqrt{2\pi m T_1}}{4\rho_0}, \quad g_2 = \frac{2-a_2}{a_2} \frac{\kappa\sqrt{2\pi m T_2}}{4\rho_0}. \quad (11)$$

Отличие этих выражений от (2) заключается в том, что в (11) стоят точные граничные значения температуры вместо  $T_0$  и  $T_d$ .

С помощью написанных уравнений можно найти выражение для теплового потока для любой модели взаимодействия частиц. Например, для модели упругих шаров, когда  $\kappa \sim \sqrt{T}$ , безразмерный тепловой поток  $\eta$  определяется из уравнения

$$\beta\eta = \tau_1^{3/2} - \tau_2^{3/2}, \quad (12)$$

где  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  даются формулами (10). Величина  $\beta$  обратно пропорциональна длине пробега

$$\beta = \frac{6\rho_0 d}{\kappa(T_0)\sqrt{2\pi m T_0}} = \frac{64}{25\pi} \frac{1}{\text{Kn}}, \quad (13)$$

где  $\text{Kn} = l/d$  — число Кнудсена. При  $\beta \gg 1$  ( $l \ll d$ ) из (10), (12) получаем формулу

$$\eta \approx \frac{1 - \theta^{3/2}}{\beta + 3/2(q_1 + q_2)\theta}, \quad q \equiv \frac{2-a}{a}, \quad (8)$$

которая дает достаточную точность даже при  $\beta \sim 1$ . При  $\beta \ll 1$

$$T(x) = \text{const} = \frac{q_1 T_d + q_2 T_0}{q_1 + q_2} \quad (14)$$

$$\eta = \eta_{\text{max}} = \frac{1 - \theta}{[(q_1 + q_2)(q_1\theta + q_2)]^{1/2}}$$

при  $R_1 = R_2 = 1$   $T(x) = (T_0 + T_d)/2$ , т. е. температура газа в зазоре равна среднему арифметическому температур стенок. Из граничных условий имеем

$$n_0\sqrt{T_0} = n_d\sqrt{T_d}, \quad (15)$$

где  $n_0$ ,  $n_d$  — плотность эмиссии частиц.

Следует подчеркнуть, что скачки температуры, полученные выше, характеризуют истинную температуру газа возле поверхности, в отличие от результатов, приведенных в [2], [8], где скачки температуры интерпретируются, как разность между истинной температурой газа возле стенки и температурой, линейно экстраполированной к стенке из объема газа.

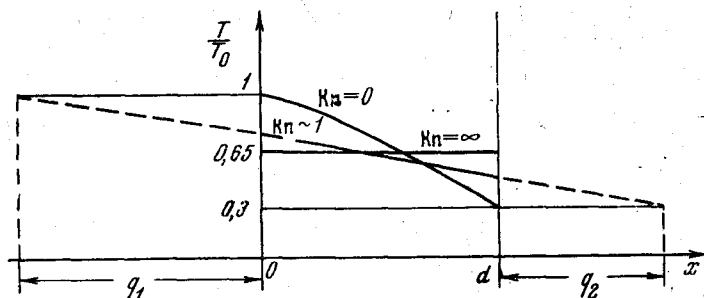


Рис. 1. Распределение температуры в зазоре для различных чисел Кнудсена

На рис. 1 показано распределение температуры в зазоре при различных значениях чисел Кнудсена, построенное по формуле

$$\tau(x) = \left[ \tau_1^{3/2} - (\tau_1^{3/2} - \tau_2^{3/2}) \frac{x}{d} \right]^{2/3} \quad (a_1 = a_2 = 1).$$

Распределение температуры очень мало отличается от линейного.

Рассмотрим поток тепла в газе, взаимодействие молекул которого описывается потенциалом (6—12) Леннарда — Джонса

$$U(r) = 4\epsilon \left[ \left( \frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma}{r} \right)^6 \right].$$

В этом случае из (5) при  $I = 0$  получаем

$$\frac{du}{dx} = - \frac{64\sigma^2 \sqrt{\pi m}}{75\epsilon^{3/2}} S \frac{F(u)}{\sqrt{u}}. \quad (16)$$

Здесь  $u = T/\epsilon$ ;  $F(u) = \Omega^{22*}$  (см. [6]). Из (16) находим

$$S = \frac{75\epsilon^{3/2}}{64 \sqrt{\pi} \sigma^2 \sqrt{md}} [\Phi(u_1) - \Phi(u_2)], \quad (17)$$

где

$$\Phi(u) = \int_0^u \frac{\sqrt{u} du}{F(u)}, \quad u_1 = \frac{T_1}{\epsilon}, \quad u_2 = \frac{T_2}{\epsilon}.$$

$u$	$\Phi(u)$	$u$	$\Phi(u)$	$u$	$\Phi(u)$	$u$	$\Phi(u)$
0	0	0,55	0,1011	1,05	0,3526	1,55	0,7594
0,05	0,001787	0,60	0,1191	1,10	0,3865	1,60	0,8082
0,10	0,005434	0,65	0,1386	1,15	0,4219	1,65	0,8584
0,15	0,01050	0,70	0,1597	1,20	0,4588	1,70	0,9099
0,20	0,01692	0,75	0,1824	1,25	0,4972	1,75	0,9629
0,25	0,02469	0,80	0,2072	1,30	0,5372	1,80	1,0171
0,30	0,03383	0,85	0,2326	1,35	0,5787	1,85	1,0727
0,35	0,04437	0,90	0,2602	1,40	0,6217	1,90	1,1297
0,40	0,05633	0,95	0,2894	1,45	0,6661	1,95	1,1879
0,45	0,06976	1,00	0,3202	1,50	0,7120	2,00	1,2474
0,50	0,08467						

Величина  $\Phi(u)$  вычислялась с помощью таблицы, приведенной в [6]. Значения  $F(u)$  при  $u \rightarrow 0$ , отсутствующие в [6], вычислялись путем экстраполяции по формуле Лагранжа. Значения функции  $\Phi(u)$  приведены в таблице.

На рис. 2 построены графики зависимости теплового потока от давления для различных моделей взаимодействия. При вычислении по формуле (17) для цезия принято  $\varepsilon = 0,387 \text{ эв}$  и  $\sigma = 4,55 \text{ \AA}$  согласно [9]. В формуле (1) и для модели упругих шаров сечение взаимодействия увеличено в три раза, так как для принятых при расчете температур ( $T_0 = 2000^\circ \text{ К}$ ,

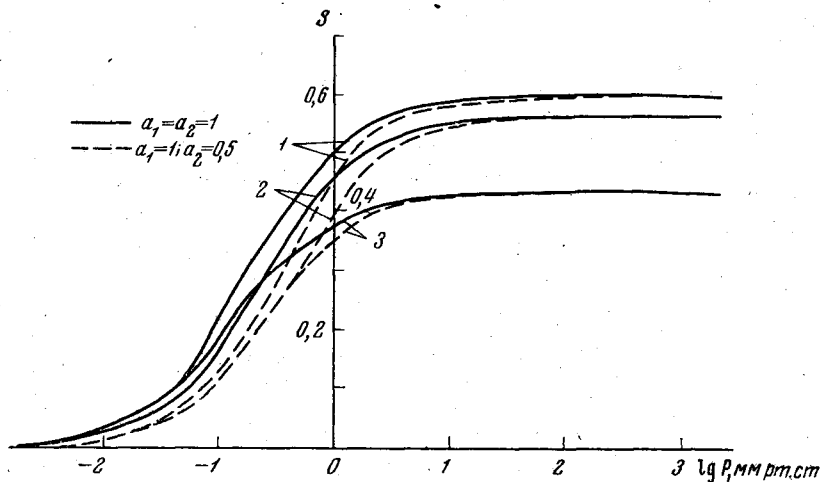


Рис. 2. Зависимость теплового потока от давления для разных моделей взаимодействия

1 — потенциал Леннарда — Джонса, 2 — формула (1), 3 — модель упругих шаров

$T_d = 600^\circ \text{ К}$ )  $\Omega^{22*} = 3$ . Из рис. 2 следует, во-первых, что при высоких давлениях формула (1) лучше согласуется с моделью (6—12), чем с моделью упругих шаров (величина  $\kappa$  относилась к температуре, равной средней арифметической температур стенок). При низких давлениях, напротив, модель упругих шаров и (6—12) дают практически совпадающие результаты, тогда как (1) отличается от них приблизительно на 30%. Далее, из рис. 2 следует, что отражение частиц влияет на величину теплопроводности только при низких давлениях.

Заметим в заключение, что величины  $\varepsilon$  и  $\sigma$ , приведенные в [9], нуждаются в уточнении. Например, при  $\varepsilon = 0,387 \text{ эв}$  из результатов измерений для высоких давлений [1] получаем  $\sigma = 4,15 \text{ \AA}$  вместо  $4,55 \text{ \AA}$ . Если положить  $\sigma = 4,55 \text{ \AA}$ , то получим  $\varepsilon = 0,24 \text{ эв}$ . Для нахождения более точных значений  $\varepsilon$  и  $\sigma$  необходимы дальнейшие измерения коэффициентов переноса в цезии.

Рассмотрим вопрос о точности данного приближения, сравнив полученное решение с точным для свободномолекулярного потока. Пренебрегая столкновениями и рассматривая для простоты диффузное отражение частиц от стенки, запишем функцию распределения молекул в зазоре между стенками в следующем виде:

$$f(c) = \begin{cases} 2n_0 \left( \frac{m}{2\pi T_0} \right)^{3/2} e^{-\frac{mc^2}{2T_0}}, & c_x > 0, \\ 2n_d \left( \frac{m}{2\pi T_d} \right)^{3/2} e^{-\frac{mc^2}{2T_d}}, & c_x < 0. \end{cases}$$

Из равенства нулю суммарного потока получим условие (15), с помощью которого далее находим

$$p \equiv \frac{m}{3} \int c^2 f(c) dc = n_0 T_0 + n_d T_d,$$

$$n = n_0 + n_d, \quad T \equiv p/n = \sqrt{T_0 T_d},$$

(18)

$$S = 2n_0 \sqrt{\frac{2T_0}{\pi m}} (T_0 - T_d).$$

Безразмерный тепловой поток  $\eta_0$ , определенный согласно (9), как  $S\sqrt{2\pi m}/4p\sqrt{T_0}$ , равен  $1 - \sqrt{\theta}$ . Ниже представлена величина  $1 - \eta_0/\eta_{\max}$  для разных значений  $\theta$  ( $\eta_{\max}$  определяется соотношением (14)).

$\theta$	1	0,8	0,6	0,4	0,2	0
$1 - \eta_0/\eta_{\max}$	0	0,002	0,008	0,025	0,066	0,293

Видно, что точность метода в наиболее важном интервале температур не ниже 10%.

Выражения (18) можно получить также с помощью уравнений переноса, используя приближение, которое можно назвать двухкомпонентной моделью разреженного газа. Если считать, что частицы, испускаемые холодной и горячей стенками, представляют собой два компонента с различными температурами и средними скоростями (массы молекул при этом одинаковы), то из уравнений переноса, пренебрегая правыми частями получим, что параметры состояния в зазоре  $p$ ,  $n$  и  $T$  для каждого компонента постоянны. Граничные условия для рассматриваемого случая имеют вид (1 и 2 — номера компонентов)

$$I_1 = 2I_{10} - \frac{1}{2}n_1\bar{v}_1, \quad I_2 = -\frac{1}{2}n_2\bar{v}_2, \quad x = 0$$

$$S_1 = 4I_{10}T_0 - n_1\bar{v}_1T_1, \quad S_2 = -n_2\bar{v}_2T_2,$$

$$I_1 = \frac{1}{2}n_1\bar{v}_1, \quad I_2 = -2I_{20} + \frac{1}{2}n_2\bar{v}_2, \quad x = d$$

$$S_1 = n_1\bar{v}_1T_1, \quad S_2 = -4I_{20}T_d + n_2\bar{v}_2T_2.$$

Из этих уравнений, считая, что  $n_1(0) = n_1(d)$ ,  $T_1(0) = T_1(d)$  и т. д., получим для суммарных величин  $p = p_1 + p_2$  и  $S = S_1 + S_2$  выражения (18). Если же положить в уравнениях переноса  $T_1 = T_2$ , то для величин  $p$  и  $S$  получим автоматически уравнения (4). Таким образом, при малой длине пробега, когда температуры выравниваются очень быстро, двухкомпонентная модель разреженного газа фактически совпадает с обычным описанием процесса. Для разреженного газа она, напротив, позволяет получить более точные результаты. Из полученных результатов видно, что даже в сильно разреженном газе приближенно справедлив закон Фурье для теплового потока:  $S = -\chi \nabla T$ . Как известно, это выражение применимо, если изменение температуры на длине пробега мало

$$l \frac{d \ln T}{dx} \ll 1. \quad (19)$$

Характерным масштабом изменения температуры (рис. 1) является величина  $d + g_1 + g_2$ , так что (19) можно переписать в виде

$$\frac{l}{d + g_1 + g_2} \ll 1. \quad (20)$$

Так как  $g_1, g_2$  порядка  $l$ , условие (20) и, следовательно (19), приближенно выполняются не только при  $l \ll d$ , но и при  $l \gtrsim d$ , т. е. закон Фурье с определенной точностью справедлив при любой длине свободного пробега  $l$ .

В заключение приношу благодарность И. П. Стаханову за полезные обсуждения затронутых в статье вопросов.

Физико-энергетический  
институт

Поступила в редакцию  
13 VII 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С. Китрилакис, М. Микер. Сб. «Термоэмиссионное преобразование энергии», 1, Атомиздат, 1964, 45.
2. J. H. Kennard. Kinetic theory of gases, New York — London, 1938.
3. У. Р. Мартини. Сб. «Термоэмиссионное преобразование энергии», 1, Атомиздат, 1964, 35.
4. А. А. Померанцев. Инженерно-физический ж., 3, № 5, 1960.
5. H. Grad. Comm. pure appl. math., 2, 331, 1949. (русск. пер. в сб. «Механика», № 4, 5, ИЛ, 1952).
6. Дж. Гиршфельдер, Ч. Кертисс, Р. Берд. Молекулярная теория газов и жидкостей, ИЛ, 1961.
7. С. А. Маев. Теплофизика высоких температур, 3, № 2, 1965.
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1944.
9. Л. Б. Робинсон. Сб. «Термоэмиссионное преобразование энергии», 1, Атомиздат, 1964, 11.