ТЕПЛОФИЗИКА ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР
Том 17 1979 № 5

УДК 532.507

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЫ С НЕЛИНЕЙНЫМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЕМ

Левитан Ю. С.

На основе уравнения вторых моментов для пульсаций температуры проведен анализ заключительного периода вырождения температурной турбулентности в системах с нелинейным тепловыделением. На примере системы с джоулевым тепловыделением показано, что условие затухания турбулентности, обусловленного флуктуациями тепловыделения, совпадает с достаточным условием устойчивости стационарных состояний этой системы. На основе теории подобия и соображений размерности получено выражение для асимптотической формы спектра температурной турбулентности. Проанализировано влияние температурных флуктуаций на газодинамическую турбулентность в средах с нелинейным тепловыделением.

В работах [1, 2] отмечалось влияние пульсаций электропроводности, обусловленных пульсациями температуры, на интегральные характеристики МГД-генераторов. Спектр пульсаций температуры потока слабоионизованной плазмы в [2] исследовался в предположении, что температура ведет себя как пассивная примесь и не влияет на динамику потока. Течение считалось несжимаемым, турбулентность — однородной; градиенты скорости и температуры не учитывались. При этом было показано, что джоулев нагрев уменьшает затухание температурной турбулентности. Наконец, в [3] расчетным путем установлено, что температура ведет себя как пассивная примесь лишь при малых плотностях тока. При увеличении тока флуктуации температуры приводят к уменьшению затухания динамической турбуленности в магнитном поле. Температурная турбулентность при протекании тока возрастала, а в магнитном поле затухала вследствие корреляции с пульсационным полем скорости.

Следует, однако, отметить, что влияние на турбулентность джоулева нагрева (так же, как и любого другого источника тепловыделения) должно определяться не столько его абсолютной величиной (как в [2]), сколько параметром, характеризующим флуктуации тепловыделения. Это объясняется тем, что при нелинейном тепловыделении возникающие флуктуации могут в одних случаях затухать, способствуя снижению общего уровня температурной турбулентности, в других — возрастать, приводя, напротив, к повышению турбулентности.

Для более подробного анализа отмеченных условий обратимся к уравнению энергии в форме

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau}+u_k\frac{\partial\theta}{\partial x_k}=a(\theta)\left[\frac{\partial^2\theta}{\partial x_k\partial x_k}+q_V(\theta)\right]. \qquad (1)$$

Здесь $\theta=\int\limits_{v}^{T}\lambda(T)\,dT$ — потенциал теплопроводности; $a=\lambda/\rho c_p$ — коэффициент температуропроводности; $q_V(\theta)$ — плотность источников тепловыделе-

ния. Суммирование, как обычно, производится по повторяющимся индексам; остальные обозначения общепринятые. В дальнейшем под температурой понимается именно параметр θ.

Уравнение для вторых моментов пульсационного поля температуры θ', получаемое известным методом [4], имеет вид

$$\frac{\partial F_{\theta\theta}}{\partial \tau}+\bar{u}_k\frac{\partial F_{\theta\theta}}{\partial x_k}+\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_k}(F_{u\theta}+F_{\theta u})=\left(\frac{\partial^2\bar{\theta}}{\partial x_k\partial x_k}+\bar{q}_V\right)(F_{a\theta}+F_{\theta a})+$$
$$+\bar{a}\left(F_{q_V\theta}+F_{\theta q_V}+\frac{\partial^2 F_{\theta\theta}}{\partial x_k\partial x_k}-2F_{\nabla\theta\nabla\theta}\right)+\Omega, \tag{2}$$

где $F_{\alpha\beta}=\overline{\alpha'(i)\beta'(j)}$ — корреляционная функция; i, j — произвольные точки пространства; Ω — совокупность нелинейных членов, содержащих тройные моменты полей температуры и скорости; черточки и штрихи обозначают, как обычно, соответственно осредненные и пульсационные величины.

Рассмотрим для конкретности ситуацию, при которой режим тепловыделения определяется джоулевым нагревом $\sigma(\theta)E^2$ (σ — электропроводность, E — напряженность электрического поля) и отводом тепла излучением $U(\theta)$ (в приближении оптически прозрачного газа). Тогда

$$q_V(\theta)=\sigma(\theta)E^2-U(\theta). \tag{3}$$

В этом случае

$$F_{q_V\theta}+F_{\theta q_V}=(F_{g\theta}+F_{\theta g})-(F_{U\theta}+F_{\theta U}), \tag{4}$$

где $g=\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}$ — мощность, выделяющаяся в единице объема при пропускании тока плотностью $\mathbf{j}$.

Пульсации тепловыделения запишутся в виде

$$g'=\sigma'\bar{E}^2+2\bar{\sigma}(\bar{\mathbf{E}}\cdot\mathbf{E}'), \tag{5}$$

для $\mathbf{E}'$ используем полученное ранее выражение в [5], причем без предположения о параллельности $\mathbf{E}_2'$ и $\bar{\mathbf{E}}$ ($\mathrm{Re}_{\mathrm{M}}\ll 1$)

$$\mathbf{E}'=-\beta(\mathbf{U}'\times\mathbf{B})-(\sigma'/\bar{\sigma})\bar{E}\cos\varphi(\mathbf{E}_2'/\bar{E}). \tag{6}$$

Здесь φ — угол между $\bar{\mathbf{E}}$ и $\mathbf{E}'$; β — коэффициент (вообще говоря, не постоянный), учитывающий характер замыкания пульсационных токов в объеме системы; остальные обозначения и величины соответствуют [5].

Подставляя (6) в (5), получим в итоге

$$g'=\sigma'\bar{E}^2(1-2\cos^2\varphi)-2\beta\bar{\sigma}[\mathbf{u}'(\mathbf{B}\times\bar{\mathbf{E}})]. \tag{7}$$

Из (7) следует, что при $\mathbf{B}=0$ (или $\mathbf{B}\parallel\bar{\mathbf{E}}$)

$$g'=\sigma'\bar{E}^2(1-2\cos^2\varphi),$$

а при $\bar{\mathbf{u}}\perp\mathbf{B}\perp\bar{\mathbf{E}}$

$$g'=\sigma'\bar{E}^2(1-2\cos^2\varphi)-2\beta\bar{\sigma}\bar{E}B\cos\xi u',$$

где ξ — угол между $\mathbf{u}'$ и $\bar{\mathbf{u}}$.

Для последнего случая можно записать

$$F_{g\theta}+F_{\theta g}=\bar{E}^2(1-2\cos^2\varphi)(F_{\sigma\theta}+F_{\theta\sigma})-$$
$$-2\beta\bar{\sigma}\bar{E}B\cos\xi(F_{u\theta}+F_{\theta u}). \tag{8}$$

Подставляя (8) в (2), получим

$$\frac{\partial F_{\theta\theta}}{\partial \tau}+\bar{u}_k\frac{\partial F_{\theta\theta}}{\partial x_k}+\left(\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x_k}+2\beta\bar{a}\bar{\sigma}\bar{E}B\cos\xi\right)(F_{u\theta}+F_{\theta u})=$$
$$=\left(\frac{\partial^2\bar{\theta}}{\partial x_k\partial x_k}+\bar{q}_V\right)(F_{a\theta}+F_{\theta a})+\bar{a}\bar{E}^2(1-2\cos^2\varphi)(F_{\sigma\theta}+F_{\theta\sigma})- \tag{9}$$

$$-\bar{a}(F_{v\theta}+F_{\theta v})+\bar{a}\left(\frac{\partial^2 F_{\theta\theta}}{\partial x_k \partial x_k}-2F_{\nabla\theta\nabla\theta}\right)+\Omega.$$

Примем далее следующие допущения: 1) теплофизические свойства среды слабо меняются с давлением; 2) турбулентность предполагается слабой, близкой к заключительному периоду вырождения [4].

Эти предположения эквивалентны соотношению

$$F_{\alpha\beta}=\frac{d\bar{\alpha}}{d\bar{\theta}}\cdot\frac{d\bar{\beta}}{d\bar{\theta}}F_{\theta\theta}. \tag{10}$$

Примем также, что

$$F_{\nabla\theta\nabla\theta}\simeq mF_{\theta\theta}/l_\theta^2, \tag{11}$$

где m — эмпирическая константа; l_θ — некоторый масштаб температурной турбулентности.

На основании (10), (11) уравнение (9) можно привести к виду

$$\begin{gathered}\frac{\partial F_{\theta\theta}}{\partial\tau}+\bar{u}_k\frac{\partial F_{\theta\theta}}{\partial x_k}+\left(\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x_k}+2\beta\bar{\sigma}\bar{a}\bar{E}B\cos\xi\right)(F_{u\theta}+F_{u\theta})=\\ =\left(D-\frac{2\bar{a}m}{l_\theta^2}\right)F_{\theta\theta}+\bar{a}\frac{\partial^2 F_{\theta\theta}}{\partial x_k\partial x_k}+\Omega,\end{gathered} \tag{12}$$

где

$$D=2\bar{a}\left[\frac{d\ln\bar{a}}{d\bar{\theta}}\left(\frac{\partial^2\bar{\theta}}{\partial x_k\,\partial x_k}+\bar{\sigma}\bar{E}^2-\bar{U}\right)+\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\theta}}\bar{E}^2(1-2\cos^2\varphi)-\frac{d\bar{U}}{d\bar{\theta}}\right]$$

$$\Omega=\frac{d\bar{a}}{d\bar{\theta}}\left[(F_{\Delta\theta\theta,\theta}+F_{\theta,\Delta\theta\theta})+\frac{d\bar{U}}{d\theta}(F_{\theta^2,\theta}+F_{\theta,\theta^2})\right]-(F_{u\nabla\theta,\nabla\theta}+F_{\nabla\theta,u\nabla\theta}).$$

Из (12) видно, что магнитное поле может воздействовать на температурную турбулентность либо непосредственно через взаимную корреляцию температурного и динамического пульсационных полей, либо косвенно — путем влияния на коэффициенты переноса $\bar{\sigma}$ или $\bar{a}$ (при $H\gg1$, где H — параметр Холла).

При анализе заключительного периода вырождения температурной турбулентности рассмотрим случай отсутствия пространственных градиентов температуры и при $\mathbf{B}=0$ (или $\mathbf{B}\|\mathbf{E}$). Тогда, пренебрегая нелинейными и инерционными членами в уравнении (12), получим

$$\frac{\partial F_{\theta\theta}}{\partial\tau}=\left(D-\frac{2\bar{a}m}{l_\theta^2}\right)F_{\theta\theta}+\bar{a}\frac{\partial^2 F_{\theta\theta}}{\partial x_k\partial x_k}. \tag{13}$$

Далее, применяя к (13) преобразование Фурье корреляционной функции

$$\Phi(\mathbf{k})=(2\pi)^{-3}\int F_{\theta\theta}(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{kr}}d\mathbf{r},$$

получим

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}=-2\bar{a}\left(k^2+\frac{2m}{l_\theta^2}-\mathrm{M}\right)\Phi. \tag{14}$$

После интегрирования от τ_0 до τ найдем

$$\Phi(k,\tau)=\Phi(k,\tau_0)\exp\left\{\left[-2\bar{a}\left(k^2+\frac{2m}{l_\theta^2}-\mathrm{M}\right)\right](\tau-\tau_0)\right\}, \tag{15}$$

где

$$\mathrm{M}=2\left[\frac{d\ln\bar{a}}{d\bar{\theta}}(\bar{\sigma}\bar{E}^2-\bar{U})+\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\theta}}\bar{E}^2(1-2\cos^2\varphi)-\frac{d\bar{U}}{d\bar{\theta}}\right]. \tag{16}$$

[illegible] (15), (16) следует, что на вырождение турбулентности существенное влияние оказывают не только абсолютные значения тепловыделения, но и производные $d\ln\bar{a}/d\bar{\theta}$, $d\bar{\sigma}/d\bar{\theta}$ и $d\bar{U}/d\bar{\theta}$, характеризующие флуктуации соответствующих параметров. Причем, дополнительное затухание турбулентности (описываемое помимо членов с $-2\bar{a}k^2$ и $-4\bar{a}m/l_\theta^2$) имеет место при $M<0$. Интересно отметить, что в случае $\bar{a}=$ $=\text{const}$ это неравенство совпадает с достаточным условием устойчивости стационарных состояний систем с джоулевым тепловыделением (например, электрической дуги) [6]. Такое совпадение вполне естественно, поскольку возникновение температурных макронеоднородностей в результате неустойчивости будет способствовать повышению уровня и статистически равновесной мелкомасштабной турбулентности. Напротив, член $(-4\bar{a}m/l_\theta^2)$ отражает механизм затухания температурной турбулентности из-за наличия пространственных градиентов пульсаций θ' (или σ'), которые тем значительнее, чем меньше масштабы неоднородностей l_θ.

Рассмотрим некоторые особенности газодинамической турбулентности при наличии интенсивного нелинейного тепловыделения (в частности, джоулева) с точки зрения представлений подобия [4].

Из уравнения (2), полагая $i=j$, можно получить уравнение для меры температурной неоднородности $\frac{1}{2}\int\limits_V \overline{(\theta')^2}dV$

$$\frac{\partial\overline{(\theta')^2}}{\partial\tau}+\bar{u}_k\frac{\partial\overline{(\theta')^2}}{\partial x_k}+2\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x_k}\overline{u_k'\theta'}=$$
$$=2\left(\frac{\partial^2\bar{\theta}}{\partial x_k\partial x_k}+\bar{q}_V\right)\overline{a'\theta'}+2\bar{a}\left(\overline{q_V'\theta'}+\overline{\theta'\Delta\theta'}\right)+\Omega, \tag{17}$$

из него легко получается интегральная оценка для случая слабой турбулентности при вырождении и при условии обращения в нуль пульсаций на границе области

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_V\overline{(\theta')^2}\,dV\simeq-\bar{a}_*\int\limits_V\left[\overline{(\nabla\theta')^2}-\frac{d\bar{q}_V}{d\bar{\theta}}\overline{(\theta')^2}\right]dV, \tag{18}$$

где $\bar{a}_*$ — некоторое характерное значение $\bar{a}$.

Отсюда следуют выводы, качественно соответствующие сделанным выше при анализе вырождения температурной турбулентности на основании соотношений (15), (16) при $\bar{a}=\text{const}$. Так, для затухания температурных неоднородностей (или флуктуаций) достаточно, чтобы $(d\bar{q}_V/d\bar{\theta})\leqslant 0$. В то же время для поддержания температурных флуктуаций в системе необходимо выполнение неравенства $(d\bar{q}_V/d\bar{\theta})>0$. Таким образом, это неравенство является критерием (необходимым условием) возникновения в системе с нелинейным тепловыделением температурной турбулентности. Все последующие рассуждения относятся к случаям, когда это условие выполняется.

Существенной особенностью турбулентности в сжимаемых средах с зависящими от температуры свойствами и нелинейным тепловыделением является то, что температура в этих условиях не может считаться «пассивной примесью», не влияющей на динамику потока, как в несжимаемых средах с постоянными свойствами [4]. При этом газодинамическую турбулентность нельзя рассматривать независимо от температурных флуктуаций, которые будут оказывать влияние как на ее спектр, так и на локальные характеристики. Тем не менее интуитивно ясно, что приближение «пассивной примеси» все же можно использовать при достаточно малых величинах $(d\bar{q}_V/d\bar{\theta})$. В то же время при больших $(d\bar{q}_V/d\bar{\theta})$ спектр турбулентности, по-видимому, должен в основном определяться температурными флуктуациями.

Некоторые количественные оценки для иллюстрации приведенных рассуждений можно получить на основании обобщения первой гипотезы подобия Колмогорова: «Для турбулентности при наличии источников нелинейного тепловыделения при достаточно больших значениях Re и Pe существует равновесный интервал масштабов $l \ll L_0$, в котором многомерные распределения вероятностей для разностей скоростей и разностей температур допустимо считать стационарными и однородными и однозначно определяющимися параметрами $\bar{\varepsilon}$, $\bar{N}$, $\bar{Q}$, $\bar{\nu}$ и $\bar{a}$».

Смысл величин

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\bar{\nu}}{2} \sum \overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right)^2}, \quad \bar{N} = \frac{\bar{a}}{\bar{\lambda}^2} \sum_{i=1}^{3} \overline{\left(\frac{\partial \theta'}{\partial x_i} \right)^2}$$

хорошо известен [4]; L_0 — характерный размер системы; $\bar{\nu}$ — кинематическая вязкость. Величина $\bar{Q} = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\rho}} \left(\frac{d\bar{q}_V}{\partial \bar{\theta}} \right)$ характеризует удельную интенсивность тепловыделения на единицу массы и на один градус. Из параметров $\bar{\varepsilon}$, $\bar{N}$ и $\bar{Q}$ можно составить единственную комбинацию размерности длины

$$L_* = (\bar{\varepsilon}^7 \bar{N}^{-3} \bar{Q}^{-6})^{1/2}. \tag{19}$$

При малых $\bar{Q}$ $L_* \gg \eta$ и $L_* \gg \eta_\tau$ (разумеется, $L_* \ll L_0$), где $\eta = \bar{\nu}^{3/4} \bar{\varepsilon}^{-1/4}$ и $\eta_\tau = \bar{a}^{3/4} \bar{\varepsilon}^{-1/4}$ — соответственно динамический и температурный внутренние масштабы турбулентности [4]. В этом случае, если $l \ll L_*$, то влиянием тепловыделения на структуру турбулентности можно пренебречь.

Таким образом, масштаб L_* характеризует минимальный масштаб неоднородностей, начиная с которого становится существенным влияние тепловыделения на структуру турбулентности. При больших $\bar{Q}$, когда $l \ll L_*$, параметр $\bar{\varepsilon}$ будет мало влиять на форму спектра турбулентности. Это означает, что, начиная с некоторого значения $\bar{Q}$, асимптотическая форма спектра $E^{(\theta)}(k) = \iint\limits_{|\mathbf{k}|=k} \Phi(\mathbf{k})\, dS(\mathbf{k})$, где $dS(\mathbf{k})$ — элемент площади сферы $|\mathbf{k}| = k$, должна определяться лишь значениями параметров $\bar{N}$ и $\bar{Q}$ и будет иметь вид

$$E^{(\theta)}(k) = c \bar{N}^{2/7} \bar{Q}^{4/7} k^{-13/7}, \tag{20}$$

где c — эмпирический коэффициент.

Следует отметить, что при уточнении закона (20), описывающего спектр температурной турбулентности, необходимо иметь в виду зависимость коэффициента c от некоторого параметра γ, характеризующего флуктуации параметра $N = (\bar{a}/\bar{\lambda}^2) \sum_{i=1}^{3} (\partial\theta'/\partial x_i)^2$. Как известно, такие флуктуации приводят к явлению перемежаемости, что делает распределения вероятности для мелкомасштабных компонент температурной турбулентности существенно негауссовскими [4].

Как видно из (20), в спектре $E^{(\theta)}(k)$ по сравнению с обычным колмогоровским законом $E(k) \sim k^{-5/3}$ доля высокочастотной составляющей несколько ниже. Это, по-видимому, косвенно свидетельствует в пользу предположения о появлении в случае интенсивного нелинейного тепловыделения каскадного переноса энергии температурной турбулентности от больших волновых чисел к малым [1], т. е. противоположно переносу в обычной гидродинамической турбулентности. Это связано, по-видимому с тем, что существование равновесной температурной турбулентности, согласно

(20), определяется, с одной стороны, генерацией флуктуаций температуры (начиная с некоторого значения $(d\bar{q}_V/d\bar{\theta})>0$), а с другой стороны — диссипацией энергии, пропорциональной $\bar{\lambda}(\partial\theta'/\partial x_i)^2$ и максимальной для мелкомасштабных компонент пульсаций. Указанное обстоятельство ставит под сомнение использование в таких условиях аналогов известных гипотез о спектральном переносе энергии турбулентности (например, Коважного или Гейзенберга [4]) для отыскания формы спектра $E^{(\theta)}(k)$ во всем диапазоне $k \gg 1/L_0$.

Важно обратить внимание на то, что в общем случае, как уже отмечалось, температурные и газодинамические пульсации взаимно влияют друг на друга, и при анализе спектра турбулентности необходимо учитывать уже более сложный характер каскадного процесса переноса энергии вдоль иерархии возмущений различных порядков, связанный с принципиальным различием между генерацией газодинамической и температурной турбулентностей. Этот вопрос, однако, требует специального исследования.

В реальных ситуациях такая термогазодинамическая турбулентность может наблюдаться в подавляющем большинстве высокотемпературных устройств с интенсивным нелинейным тепловыделением (в частности, джоулевым). Особый интерес представляет ее изучение применительно к плазмохимическим реакторам и электродуговым устройствам различного назначения.

В заключение автор выражает благодарность А. Б. Ватажину за проявленный интерес к работе.

Москва

Поступила в редакцию
14 III 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Е. Борблик и др.* Препринт № 67. Институт электродинамики АН УССР, Киев, 1973.
2. *Р. В. Ганефельд* и др. 6th Intern. Conf. on Magnetohydrodynamic Electrical Power Generation, Washington, D. C., 9–13 June 1975, *4*, p. 187.
3. *Р. В. Ганефельд, Т. Д. Лаврова.* Тез. докл. 9-го Рижского совещания по магнитной гидродинамике, ч. 1, 1978, стр. 11.
4. *А. С. Монин, А. М. Яглом.* Статистическая гидромеханика, ч. 2. «Наука», 1967.
5. *Ю. С. Левитан.* Магнитная гидродинамика, № 2, 61, 1977.
6. *Ю. С. Левитан.* ТВТ, *15*, № 2, 261, 1977.