

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Васильев, Континуальное моделирование деформирования двухрядной конечной дискретной системы с учетом краевых эффектов, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1996, номер 5, 66–68

<https://www.mathnet.ru/vmumm2056>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.83

27 апреля 2025 г., 18:54:16



Если, например,  $V=1/3$ , то решением (2.6) будет  $m^*=5,88$ ; поскольку  $x_m=0,5$ ,  $M(x_m)=0,25$ , из (2.5) окончательно находим  $\eta=2,04$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кийко И. А., Чарухчев А. Д. Оптимизационные задачи в изгибе и устойчивости упругопластических стержней//Изв. РАН. Механ. тверд. тела. 1991. № 6. 170—175.
2. Кийко И. А., Хашба Г. Н., Чарухчев А. Д. Две задачи об оптимизации формы неупругих стержней//Упругость и неупругость. М., 1993. 97—107.
3. Кийко И. А. Оптимизация формы упругопластического стержня при сложном переменном нагружении//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1994. № 4. 60—63.
4. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 2. М., 1959.

Поступила в редакцию  
09.02.96

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 5

УДК 530.9

А. А. Васильев

#### КОНТИНУАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ДВУХРЯДНОЙ КОНЕЧНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ С УЧЕТОМ КРАЕВЫХ ЭФФЕКТОВ

Замена неоднородных систем однородными моделями эффективно используется при решении ряда задач. В строительной механике широко применяются решетчатые конструкции. Уточнение моделей с целью учета некоторых эффектов, обусловленных структурой, базируется, как правило, на отказе от тех или иных гипотез, принимаемых в простейших моделях [1]. Отказ от предположения о том, что движение системы может быть полностью определено одним полем перемещений, и использование при моделировании нескольких полей перемещений приводят к построению многополевых моделей. Вопросы разработки многополевого подхода рассматривались, в частности, в работах [2, 3], вопросы построения пограничных операторов — в работе [4].

В настоящей статье на примере двухрядной конечной дискретной системы при растяжении с помощью многополевого подхода показано, что у краев, в окрестности дефектов, локальных нагрузок возникает погранслоное быстроосциллирующее поле смещений. Такие модели представляют интерес, в частности, при изучении разрушения.

**Дискретные уравнения, уравнения однополевой и двухполевой моделей.** Уравнения для поперечных смещений  $v_n$  узлов двухрядной системы (рис. 1) при действии сил  $f$ , если пренебречь смещениями вдоль

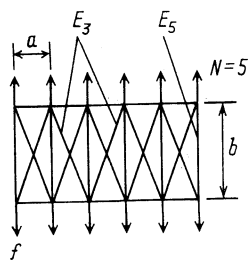


Рис. 1

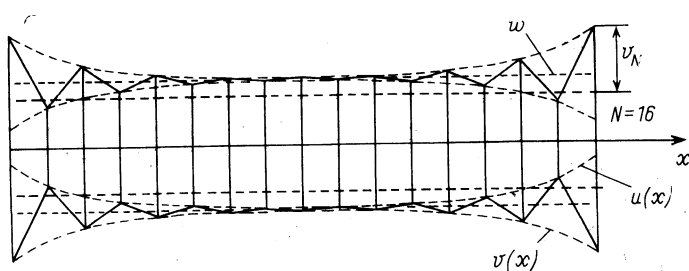


Рис. 2

оси, имеют вид

$$E_3 B^2 (v_{n+1} + 2v_n + v_{n-1})/r + E_5 v_n/(b/2) = f, \quad n = \overline{0, N}, \quad (1)$$

$$v_{-1} + v_0 = 0, \quad v_N + v_{N+1} = 0,$$

где  $B = b/r$ ,  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $E_m$  — жесткости стержней.

Обозначим  $v(na) = v_n$ . Тогда на основе (1), используя разложение в ряд Тейлора, получаем уравнение однополевой модели

$$E_3 B^2 a^2 v_{xx}/r + [2E_3 B^3 + E_5] v/(b/2) = f. \quad (2)$$

Для двухполевой модели вводим две функции  $u(x)$  и  $v(x)$ , такие, что  $u((2m-1)a) = v_{2m-1}$ ,  $v(2ma) = v_{2m}$ . Осуществляем разложение в ряд Тейлора двухполевых функций. Сохраняя вторые производные, получим уравнения движения и граничные условия

$$E_3 B^3 [v + a^2 v_{xx}/2] + [E_3 B^3 + E_5] u = (b/2) f,$$

$$[E_3 B^3 + E_5] v + E_3 B^3 [u + a^2 u_{xx}/2] = (b/2) f, \quad (3)$$

$$u(0) - au_x(0) + a^2 u_{xx}(0)/2 + v(0) = 0,$$

$$u(l) + v(l) + av_x(l) + a^2 v_{xx}(l)/2 = 0, \quad l = Na.$$

**Сравнение решений.** Решение  $v_n$  задачи (1) ищем в виде смещения в средней части и погранслоного решения  $v_{0,n}$  по схеме

$$v_n = \begin{cases} \omega + v_{0,n}, & 0 \leq n < n_0, \\ \omega, & n_0 \leq n \leq N/2; \\ \text{симметрично по } N/2 \leq n \leq N, \end{cases} \quad (4)$$

где  $\omega = (b/2)(f/E)$ ,  $v_{0,n} = (-1)^n (-2/[1 - e^\lambda]) e^{-\lambda n} \omega$ ,  $E = 2E_2 B^3 - E_5$ , а  $\lambda > 0$  — решение уравнения  $\text{ch}(\lambda) = 1 + c$ ,  $c = E_5/(E_3 B^3)$ . Значение  $n_0$  определяет зону распространения краевого эффекта.

Однородное уравнение, соответствующее уравнению однополевой модели (2), не имеет убывающего решения. Пренебрегая в (2) составляющей с  $v_{xx}$ , получаем осредненное уравнение  $Ev/(b/2) = f$ . Его решение совпадает с основным  $\omega$  и может использоваться для нахождения смещений в удаленных от границ областях.

Уравнения двухполевой модели (3) имеют частное решение  $\bar{\omega}$ , а соответствующие однородные уравнения имеют погранслоные решения, что позволяет удовлетворить граничным условиям и представить решение в виде

$$\bar{v}(x) = \begin{cases} \bar{\omega} + \bar{v}_0(x), & 0 \leq x \leq x_0; \\ \bar{\omega}, & x_0 \leq x \leq l/2; \\ \text{симметрично при } l/2 \leq x \leq l, \end{cases} \quad (5)$$

где  $\bar{\omega} = \omega \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$ ,  $\bar{v}_0(x) = \frac{-2}{1 - [1 + \mu + \mu^2/2]} e^{-\mu \frac{x}{a}} \omega \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mu = \sqrt{2c}$ . Значение  $x_0$  определяет зону распространения краевого эффекта.

В удаленных от границ областях дискретное (4) и двухполевое (5) решения при  $x = na$  совпадают. Близость этих решений в приграничных областях при  $x = na$  определяется коэффициентом  $\mu\sqrt{2c}$ , который является корнем уравнения  $\mu^2 - 2c = 0$ .

Пример, иллюстрирующий близость дискретного и двухполевого решений, представлен на рис. 2. Из рисунка видно, что введение двух полей для описания смещений отражает характерную с физической точки зрения черту деформированного состояния системы, заключающуюся в том, что стержни разделяются на две группы: сжатые и растянутые относительно осредненных смещений  $w$ . Некоторые вопросы математического обоснования многополевого подхода в моделировании краевых эффектов рассмотрены в [5].

В заключение отметим, что представленная система является модельной для ряда макро- и микросистем, в частности, она служит простейшей структурной моделью прослойки при моделировании разрушения при отрыве.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ломакин В. А. Статистические задачи механики твердого деформируемого тела. М., 1970.
2. Ильюшина Е. А. К построению теории упругости неоднородных твердых тел с микроструктурой: Канд. дис. М., 1977.
3. Васильев А. А. Моделирование деформируемых тел с внутренней структурой в задачах динамики и устойчивости: Канд. дис. Тверь, 1993.
4. Короткина М. Р. Построение граничных операторов для линейной цепочки частиц//Упругость и неупругость. М., 1987. 23—30.
5. Васильев А. А. К определению эффективных характеристик фильтра частот одномерной упругодеформируемой системы с микроструктурой//Физическая механика. Тверь, 1993. 63—67.

Поступила в редакцию  
09.02.96

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 5

УДК 539.3

**П. А. Моссаковский**

#### **О НОВОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ ПОСТУЛАТА ИЗОТРОПИИ**

Постулат изотропии, положенный в основу теории упругопластических процессов Ильюшина [1—8], в своей содержательной части представляет собой экспериментально установленный физический закон, значение которого выходит за рамки области малых деформаций. В работах [9—12] приведены варианты математически непротиворечивых формулировок постулата без ограничений на величину деформаций. Обобщение получено формальной заменой тензора малых деформаций соответствующей тензорной мерой деформированного состояния яуманновского типа. Отсутствие обоснованной процедуры выбора такой меры приводит к неопределенности в формулировке постулата изотропии при конечных деформациях.

В настоящей работе предлагается усиленный вариант постулата изотропии, в соответствии с которым образ процесса деформации (модуль и углы ориентации вектора напряжения в естественном пятиграннике Френе траектории деформации) мало изменяется (устойчив) при малых возмущениях параметров внутренней геометрии траектории деформации. При малых деформациях это свойство по существу равносильно классическому постулату и согласуется со всеми известными многочисленными экспериментально-теоретическими исследованиями, проведенными в рамках теории упругопластических процессов [4—8],