ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том 44 И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 2
1999

 ВЕРЕТЕННИКОВ А. Ю.*

О ПОЛИНОМИАЛЬНОМ ПЕРЕМЕШИВАНИИ И СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ[1)]

Установлены полиномиальные оценки бэта-перемешивания и скорости сходимости к инвариантному распределению для решений стохастических дифференциальных и разностных уравнений при слабых рекуррентных условиях.

Ключевые слова и фразы: перемешивание, марковский процесс, стохастическое дифференциальное уравнение, полиномиальная сходимость.

1. Введение. В работе изучаются полиномиальные оценки некоторых коэффициентов перемешивания (β-перемешивания и более слабых) и скорость сходимости к инвариантной мере для двух классов марковских процессов с дискретным и непрерывным временем в фазовом пространстве $\mathbf{R}^d$. Один из них — это класс процессов, удовлетворяющих уравнению

$$X_{n+1} = X_n + f(X_n) + W_{n+1}, \tag{1}$$

где (W_n) — н.о.р., $\mathbf{E}W_n = 0$, $\mathbf{E}|W_n|^{m_0} < \infty$, $m_0 > 0$, и существуют такие постоянные r, C_0, $M_0 > 0$, что

$$\begin{aligned} &|x + f(x)| \leqslant |x|\,(1 - r|x|^{-2}), \quad |x| \geqslant M_0,\\ &|x + f(x)| \leqslant C_0, \quad |x| \leqslant M_0. \end{aligned} \tag{2}$$

Другой класс состоит из процессов, удовлетворяющих стохастическому дифференциальному уравнению (СДУ) вида

$$dX_t = b(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dW_t, \quad X_0 = x_0, \tag{3}$$

*Институт проблем передачи информации РАН, Большой Каретный, 19, 101447 Москва, Россия; e-mail: ayu@sci.lebedev.ru

1) Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 98-01-00062, DFG 436 RUS 17/133/97 и INTAS 93-1585-ext и 94-0378.

где (W_t) — d-мерный винеровский процесс, борелевская вектор-функция b локально ограничена и найдутся такие $r > 0$, $M_0 > 0$, что

$$(b(x), x) \leqslant -r, \quad |x| \geqslant M_0. \tag{4}$$

Предполагается, что существует единственное по распределению решение уравнения (3), которое является однородным марковским процессом. Ниже будут сформулированы некоторые дополнительные предположения. Для обоих уравнений нас интересует эргодический случай с единственной инвариантной мерой. Предположения теорем 1 и 5 гарантируют это свойство.

Обозначим через X_t^x решение уравнения (1) или (3) с начальным условием $x \in \mathbf{R}^d$, $\mu_t^x = \mathscr{L}(X_t^x)$ — его одномерное маргинальное распределение, μ — инвариантную вероятностную меру. Напомним определение коэффициента β-перемешивания:

$$\beta^x(t) = \sup_{s \geqslant 0} \mathbf{E}_x \operatorname*{var}_{F^X_{\geqslant t+s}} \Big(\mathbf{P}(B \mid F^X_{\leqslant s}) - \mathbf{P}(B)\Big),$$

где F_I^X — сигма-алгебра, порожденная величинами $\{X_s,\ s \in I\}$, а $\mathbf{E}_x$ обозначает математическое ожидание для процесса с начальным условием x. Обозначим через $\bar\beta(t)$ среднее значение $\int \beta^x(t)\,\mu(dx)$, это оценка сверху коэффициента β-перемешивания для стационарной версии процесса.

Цель работы — установить оценки

$$\operatorname{var}\,(\mu^x(t) - \mu) \leqslant C(1 + |x|^m)(1 + t)^{-(k+1)} \tag{5}$$

с некоторыми $m > 0,\ k > 0$,

$$\beta^x(t) \leqslant C(1 + |x|^m)(1 + t)^{-(k+1)} \tag{6}$$

и похожие оценки для $\bar\beta(t)$,

$$\bar\beta(t) \leqslant C(1 + t)^{-(k+1)}. \tag{7}$$

Неравенства (5)–(7) полезны во многих приложениях, если все постоянные контролируемы. Такие оценки установлены в работе [16] для стохастических дифференциальных уравнений (3) с невырожденной диффузией при условии (4), если постоянная r достаточно велика ($r > \frac{3}{2}$ в случае $d = 1$, $\sigma \equiv 1$). В настоящей работе предложен другой метод, который не использует невырожденность, а также подходит и для дискретного времени.

Проблема полиномиальных оценок типа (8) для моментов касания множества (см. ниже) рассматривалась в работах [3], [7], [8], [10], [15].

Аналогичные (8) оценки другими методами установлены в [11] для семимартингалов и в [14] для полумарковских процессов. В тех примерах, которые можно рассмотреть разными методами, основные предположения в последних двух работах и в настоящей работе совпадают, как, например, условие $k+1 < r + \frac{1}{2}$ в теореме 1 ниже.

Неравенство (8) само по себе не является достаточным для оценки скорости сходимости и перемешивания без дополнительных моментных ограничений на процесс; однако оно может служить существенным этапом при установлении таких оценок. Это обстоятельство отмечалось в большом числе работ, см. [3], [9], [12], [14]. Наиболее близкой к нашим результатам является оценка (44) из [14]. Тем не менее, непосредственно из этой оценки информация, подобная неравенству (5), по-видимому, не вытекает. Неравенства для коэффициентов перемешивания типа (6), насколько известно автору, ранее установлены только в работе [6] при ограничениях, аналогичных использованным в [15], а также в [16].

Результаты данной работы предполагают их дальнейшее применение, в частности, к проблеме уравнения Пуассона в $\mathbf{R}^d$ (см. [13]), к чему они, по возможности, приспособлены. Для такого последующего использования все остальные оценки из цитированных выше работ недостаточны.

В [13] уравнение Пуассона в $\mathbf{R}^d$ исследовано для невырожденных эллиптических операторов. Метод, применявшийся в [16], не позволяет охватить вырожденные случаи, что было бы весьма желательно. По этой причине результаты п. 3 настоящей работы являются новыми.

В настоящей работе используется подход, развитый в [1], [9, гл. 5], [16]. Он основан на следующих оценках. Положим $B_R = \{x \in \mathbf{R}^d\colon |x| \leqslant R\}$, $\tau = \tau_r = \inf(t \geqslant 1\colon |X_t| \leqslant R)$. Первая нужная нам оценка имеет вид

$$\mathbf{E}_x \tau^{k+1} \leqslant C(1+|x|^m) \tag{8}$$

с некоторыми $R > 0$, k, $m > 0$. Вообще говоря, функции, отличные от полиномов, в правой части последнего неравенства также могут быть полезны. Другие необходимые нам оценки следующие:

$$\sup_{t\geqslant 0} \mathbf{E}_x |X_t|^m I(t \leqslant \tau) \leqslant C(1+|x|^m), \tag{9}$$

$$\int |x|^{m'} \mu(dx) < \infty. \tag{10}$$

В предыдущих работах автора использовался такой вариант оценки вместо (9) (см. [16])

$$\sup_t \mathbf{E}_x |X_t|^m \leqslant C(1+|x|^m) \tag{11}$$

(в некоторых случаях после замены времени). Можно отметить, что (11) влечет за собой (10) с $m' = m$.

Основные результаты формулируются в п. 2 для дискретного времени и в п. 3 для СДУ. Вспомогательные леммы и все доказательства содержатся в пп. 4 и 5.

2. Дискретное время: основные результаты. Рассмотрим процесс $(X_t,\ t = 0, 1, \ldots)$, удовлетворяющий (1) и условию (2). Пусть $B \subset \mathbf{R}^d$, $\tau_1^B := \inf(t \geqslant 0\colon\ X_t \in B)$ и $\tau_{n+1}^B := \inf(t \geqslant \tau_n^B + 1\colon\ X_t \in B)$. Если B фиксировано, мы будем опускать индекс B у τ. Положим $\widehat{\tau} = \widehat{\tau}^B = \inf(t \geqslant 1\colon\ X_t \in B)$. Определим *«процесс на B»*, $X_t^B := X_{\tau_t^B}$. Обозначим через $P^B(n, x, dx')$ переходные вероятности процесса (X_t^B) за n шагов.

Скажем, что для процесса (X_t) выполнено *локальное условие типа Дёблина*, если для любого достаточно большого $R \geqslant 0$ процесс на множестве $B = B_R := (y \in \mathbf{R}^d\colon\ |y| \leqslant R)$ удовлетворяет следующему условию: найдется такое целое число $n_0 = n_0(R) > 0$, что

$$(D_l) \qquad \inf_{x,x'} \int \min\left\{\frac{P^B(n_0, x, dy)}{P^B(n_0, x', dy)},\ 1\right\} P^B(n_0, x', dy) =: q(R, n_0) > 0,$$

где $P(dy)/P'(dy)$ означает производную абсолютно непрерывной части меры P относительно P'. Сингулярная часть может быть нетривиальной. Условие (D_l) означает, в частности, что сингулярная часть не должна быть близка к единице.

Предполагаем, что процесс (X_t) удовлетворяет локальному условию типа Дёблина (D_l). Разумеется, это влечет неприводимость (ср. [12]). Более того, из неприводимости такое свойство также следует (ср., например, [4, гл. 2]), хотя не обязательно с шаром B_R. Обозначим $r_m := (m-1)\,\mathbf{E}|W_1|^2/2$.

Теорема 1. *Пусть процесс (X_t) удовлетворяет* (1), (2) *и локальному условию типа Дёблина (D_l). Если $m_0 \geqslant 2$, $r > r_m$ и $2 \leqslant m \leqslant m_0$, то существует (единственная) инвариантная мера μ и при указанном значении m справедливо неравенство* (9). *Если $m_0 > 2$, $2 < m \leqslant m_0$, $r > r_2$ и $k < (m-2)/2$, то имеют место неравенства* (8) *и* (10) *с $m' = m - 2$. Если $m_0 > 4$, $2 < m \leqslant m_0 - 2$ и $k < (m-2)/2$, то справедливо неравенство* (5).

Положим

$$\mu^m(dy) := (1 + |y|^m)\,\mu(dy), \qquad \mu_t^{x,m}(dy) := (1 + |y|^m)\,\mu_t^x(dy).$$

Ради простоты изложения в следующих результатах данного пункта предполагается, что r достаточно велико. Сформулировать более точные условия вида $r > r'$ при некотором r' несложно, однако, слишком громоздко.

Теорема 2. *Пусть $m_0 > 4$ и выполнено условие* (2). *Тогда для любых $2 < m < m_1 - 2 \leqslant m_0 - 2$, $k < (m-2)/2$ найдутся такие C, $r_0 > 0$, что неравенство $r \geqslant r_0$ влечет оценку*

$$\operatorname{var}(\mu_t^{x,m} - \mu^m) \leqslant C(1 + |x|^{m_1})(1 + t)^{-(k+1)}. \tag{12}$$

Это неравенство обобщает (5) при дополнительных ограничениях на значения r и m_0. Оценка (12) может быть весьма полезной в приложениях. Сформулируем два ее непосредственных следствия.

Теорема 3. *Пусть $m_0 > 4$ и выполнено условие* (2). *Тогда для любых $2 < m < m_1 - 2 \leqslant m_0 - 2$ найдутся такие C, $r_0 > 0$, что неравенство $r \geqslant r_0$ влечет оценку*

$$\sup_t \mathbf{E}_x |X_t|^m \leqslant C(1 + |x|^{m_1}). \tag{13}$$

Кроме того, если еще $2 < m \leqslant m_0 - 2$, $k < (m-2)/2$, то найдутся такие r, $C > 0$, что выполнены неравенства (6), (7).

Конечно, можно рассмотреть и $m \leqslant 2$, если использовать неравенство Гёльдера. Ранее упоминалось, что более «обычный» порядок состоит в доказательстве (13), а затем уже (5). Здесь порядок обратный и условия для (13) более жесткие.

Следующее следствие является весьма частным результатом типа центральной предельной теоремы (ЦПТ). Однако, он может быть полезен, в частности, в некоторых задачах непараметрического оценивания в нелинейной авторегрессионной модели. Отметим также, что это пример прямого применения оценок перемешивания для определенного класса процессов. Обычная ситуация такова, что либо такие оценки предполагаются, либо легче обойтись без них, вовсе не используя перемешивание.

Положим $\xi_k = h(X_k)$, где борелевская функция h удовлетворяет неравенству роста $|h(x)| \leqslant C_h(1 + |x|^2)$, $S_n^h := \sum_{i=0}^{n-1}(\xi_i - \overline{h})$, где $\overline{h} = \int h(x)\,\mu(dx)$; последняя величина конечна.

Теорема 4. *Пусть $m_0 > 4$ и r достаточно велико. Тогда S_n удовлетворяет ЦПТ, т.е.*

$$n^{-1/2} S_n \Rightarrow \mathcal{N}(0, s^2), \tag{14}$$

с неотрицательной конечной дисперсией $s^2 = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \operatorname{cov}(\xi_0, \xi_i)$; cov означает ковариацию, вычисленную в стационарном режиме. Кроме того, для всех функций h и f, удовлетворяющих данным ограничениям с фиксированными постоянными C_h, M_0, C_0, $C_W := \mathbf{E}|W_1|^{m_0}$, при $r \geqslant r(C_h, M_0, C_0, C_W)$ дисперсия s^2 равномерно ограничена и последовательность $(n^{-1/2} S_n)$ равномерно плотна.

Замечание. По-видимому, можно установить плотность без ЦПТ, т.е. не используя ни условие (D_l), ни неприводимость.

3. Непрерывное время: основные результаты. Для уравнения (3) нет «естественного» m_0, или, если угодно, можно считать $m_0 = +\infty$. Поэтому рекуррентное условие формулируется лишь в терминах величины r в (4) и коэффициентов уравнения, как и в [16].

Предположим, что коэффициент b локально ограничен, матричная $d \times d$ функция σ непрерывна и функция $a = \sigma\sigma^*$ равномерно ограничена.

Всегда предполагается выполненным условие (4), что достаточно для отсутствия взрыва (см. ниже). Используя обозначения из [16], положим

$$\lambda_+ = \sup_{x\neq 0}\left(a(x)\frac{x}{|x|}, \frac{x}{|x|}\right), \quad \Lambda = \sup_x \frac{\mathrm{Tr}\ a(x)}{d}$$

и введем новую постоянную

$$r(m) = \frac{d\Lambda + (m-2)\lambda_+}{2}, \quad m \geqslant 2.$$

Отличие от результатов [16] состоит в том, что σ может вырождаться. Однако, предполагается, что существует единственное по распределению решение уравнения (3), во всяком случае, локально. Глобальная единственность будет следовать из отсутствия взрыва. Кроме того, мы рассматриваем лишь процессы с одним эргодическим классом. Отметим, что $\lambda_+ = 0$ не означает непременно $\sigma \equiv 0$ при $d > 1$. Предполагается также, что «процесс на любом B_R» удовлетворяет локальному условию типа Дёблина (D_l). Это можно обеспечить с помощью невырожденности диффузии, либо условия типа Хермандера.

Кроме того, предполагаем, что для любого $R > 0$

$$(T) \qquad \sup_{|x|=R} \mathbf{E}_x T < \infty,$$

где $T := \inf(t \geqslant 0\colon |X_t| \geqslant R+1)$. Это свойство также можно гарантировать посредством невырожденности или условия Хермандера.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (4), (D_l) *и* (T). *Если* $r > r(2)$, *то существует* (*единственная*) *инвариантная мера* μ *и выполнено неравенство* (9) *с* $m = 2$. *Если* $2 < m$, $r > r(m)$, *то имеет место оценка* (9) *с данным* m *и выполнено неравенство* (10) *с* $m' = m - 2$. *Если* $r > r(m)$, $k \in (0, (m-2)/2)$, *то процесс удовлетворяет соотношению* (8). *Если* $m_0 > 4$, $2 < m \leqslant m_0$, $r > r(m)$, $k < (m-2)/2$, *то справедлива оценка* (5).

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* (4), (D_l) *и* (T). *Тогда для любых* m, m', $k > 0$, $m_1 > m + 2$ *найдутся такие* r_0, $C > 0$, *что неравенство* $r \geqslant r_0$ *влечет соотношения* (8)–(10), (12), (13) *и* (6), (7).

Замечание. В [16] формула перед (28) должна читаться как

$$(a_{ij}p)_{x_ix_j} - (b_ip)_{x_i} = 0, \quad (\widetilde{a}_{ij}\widetilde{p})_{x_ix_j} - (\widetilde{b}_i\widetilde{p})_{x_i} = 0.$$

Отметим также, что оба уравнения понимаются в слабом смысле. В цитированной работе говорилось, что две плотности, удовлетворяющие одному уравнению, совпадают. Это верно и для уравнений в слабом смысле, без дополнительных предположений типа регулярности коэффициентов. В самом деле, любое из уравнений означает инвариантность меры для соответствующего диффузионного процесса. Такая мера единственна в силу невырожденности, так как процесс неприводим и положительно возвратен.

4. Дискретное время: вспомогательные результаты. Мы установим четыре леммы, после чего доказательство теоремы будет вытекать из леммы 4 и рассуждений в доказательстве раздела 4 в [16]. Хотя в указанной работе рассматривались диффузионные процессы, все выкладки сохраняются, если только справедливы некоторые оценки. В лемме 4 ниже эти оценки и устанавливаются. Ради простоты изложения мы предполагаем, что условие (D_l) выполнено с $n_0 = 1$. Изменения при $n_0 > 1$ очевидны.

Лемма 1. *Пусть выполнены оценки* (1) *и* (2) *с* $m_0 \geqslant 2$ *и* $r > r_2$. *Тогда при достаточно большом* R *найдется такое* $C > 0$, *что*

$$\mathbf{E}_x\tau \leqslant C(1 + |x|^2) \tag{15}$$

и (9) *выполнено с* $m = 2$. *Кроме того, если* $m_0 > 2$, $2 \leqslant m \leqslant m_0$ *и* $r > r_m$, *то выполнено неравенство* (9).

В частности, процесс является положительно возвратным относительно B_R, во всяком случае, если R достаточно велико. Обозначим через F_n сигма-алгебру, порожденную X_k, $k \leqslant n$.

Доказательство. Рассмотрим величину $\mathbf{E}_x|X_{n+1}|^2 I(n < \tau)$ (опуская индекс в $\tau = \tau_R \equiv \tau_1^{B_R}$). В силу условия леммы, при достаточно большом R найдется такое $c_2 > 0$, что

$$\mathbf{E}_x|X_{n+1}|^2 I(n < \tau) \leqslant \mathbf{E}_x|X_n|^2 I(n < \tau)\,(1 - c_2|X_n|^{-2}).$$

По индукции это влечет (9) с $m = 2$. Теперь выберем $R > c_2^{1/2}$, тогда с некоторой новой постоянной $c > 0$ получим

$$\mathbf{E}_x|X_{n+1}|^2 I(n + 1 < \tau) \leqslant \mathbf{E}_x|X_n|^2 I(n < \tau) - c\,\mathbf{E}_x I(n < \tau). \tag{16}$$

Отсюда находим $c^{-1}\mathbf{E}_x\tau \leqslant 1 + |x|^2$.

Пусть $m_0 > 2$, $r > r_m$. Выберем $2 < m \leqslant m_0$ и обозначим $\zeta = X_n + f(X_n)$, $\Delta = W_{n+1}$. Применяя формулу Тэйлора и неравенство Юнга, оцениваем

$$\begin{aligned}
|\zeta + \Delta|^m &= |\zeta|^m + m|\zeta|^{m-2}(\zeta, \Delta) + \frac{m}{2}\,|\Delta|^2|\zeta + s\Delta|^{m-2} \\
&\quad + \frac{m}{2}\,(m-2)\,|(\zeta + s\Delta, \Delta)|^2\,|\zeta + s\Delta|^{m-4} \\
&\leqslant |\zeta|^m + m|\zeta|^{m-2}(\zeta, \Delta) \\
&\quad + \frac{m}{2}\,[1 + (m-2)]\,|\Delta|^2(1 + \varepsilon)\,|X_n + f(X_n)|^{m-2} + C_{\varepsilon,m}|\Delta|^m.
\end{aligned}$$

Здесь $s \in [0, 1]$; постоянная $\varepsilon > 0$ может быть выбрана сколь угодно малой. Поскольку $\mathbf{E}\Delta = 0$, то при достаточно большом R получаем

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[I(n < \tau)\,|\zeta + \Delta|^m|F_n] &\leqslant I(n < \tau)|X_n|^m(1 - r|X_n|^{-2})^m \\
&\quad + m(1 + \varepsilon)\,r_m I(n < \tau)\,|X_n|^{m-2} + C_{\varepsilon,m} I(n < \tau)\,\mathbf{E}|\Delta|^m.
\end{aligned}$$

Стало быть, при достаточно большом $R > 0$ найдется такое $C > 0$, что

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}_x I(n+1 \leqslant \tau)\,|X_{n+1}|^m + C^{-1}\,\mathbf{E}_x I(n<\tau)\,|X_n|^{m-2}\\ &\leqslant \mathbf{E}_x I(n<\tau)\,|X_n|^m \leqslant \mathbf{E}_x I(n\leqslant\tau)\,|X_n|^m.\end{aligned} \tag{17}$$

Отсюда по индукции получаем (9). Из неравенства Гёльдера следует, что такое же неравенство верно и при любом $0 < m \leqslant m_0$. Лемма доказана.

Отметим, что при выводе (16) мы могли использовать $|X_n| > R$ вместо $n < \tau$.

В силу теоремы Харриса (ср. [12, теорема 10.2.1]) неприводимый положительно возвратный процесс (X_t) имеет единственную инвариантную меру μ.

Лемма 2. *Пусть $m_0 \geqslant 2$, $r > r_{m_0}$. Тогда*

$$\int |x|^{m_0-2}\mu(dx) < \infty. \tag{18}$$

Доказательство. Достаточно доказать (18) для $m_0 > 2$. По индукции из (17) при $2 \leqslant m \leqslant m_0$, $|x| > R$ получаем

$$\mathbf{E}_x \sum_{k=0}^{\tau-1} |X_k|^{m-2} \leqslant C\,|x|^m. \tag{19}$$

Воспользуемся представлением Харриса для инвариантной меры. Рассмотрим «процесс X на $B = B_R$». В силу локального условия типа Дёблина для X этот процесс имеет инвариантную меру μ^B. Инвариантная мера самого (X_t) представляется в виде

$$\mu(A) = c^{-1}(B)\int_B \mu^B(dx)\,\mathbf{E}_x \sum_{k=1}^{\widehat{\tau}} I(\xi_k \in B) \tag{20}$$

(ср. [12, предложение 10.4.8]) с $c(B) = \int_B \mu^B(dx)\,\mathbf{E}_x\widehat{\tau}$; последняя величина конечна и не меньше единицы. Из (20) следует, что для любой неотрицательной функции h

$$\int h(x)\,\mu(dx) = c^{-1}(B)\int_B \mu^\beta(dx)\,\mathbf{E}_x \sum_{k=1}^{\widehat{\tau}} h(X_k). \tag{21}$$

Поскольку $\mathbf{E}_x|X_1|^m \leqslant C(1+|x|^m)$ при $m \leqslant m_0$, мы оцениваем

$$\begin{aligned}\int |x|^{m-2}\mu(dx) &= c^{-1}(B)\int_B \mu^B(dx)\,\mathbf{E}_x \sum_{k=1}^{\widehat{\tau}^z} |X_k|^{m-2}\\ &\leqslant C\int_B \mu^B(dx)\,C\,\mathbf{E}_x(1+|X_1|^m)\\ &\leqslant C\int_B \mu^B(dx)\,C(1+|x|^m) < \infty.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $m_0 > 2$, $r > r_m$, $2 < m \leqslant m_0$, $0 < k < (m-2)/2$. Тогда при достаточно большом R*

$$\mathbf{E}_x \tau^{k+1} \leqslant C_{k,m}(1 + |x|^m).$$

Отметим, что если $r > r_2$, то и $r > r_m$ при некотором $m > 2$.

Доказательство. Воспользуемся неравенством (16), на этот раз умножая его на $(n+2)^k$, и тождеством $n+2 = (n+1)(1+(n+1)^{-1})$:

$$\begin{aligned}
&(n+2)^k \mathbf{E}_x |X_{n+1}|^2 I(n<\tau) \leqslant (n+2)^k \mathbf{E}_x |X_n|^2 I(n<\tau)\,(1 - c_2|X_n|^{-2}) \\
&\leqslant (n+1)^k \mathbf{E}_x |X_n|^2 I(n<\tau)\,(1 - c_2|X_n|^{-2}) \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^k \\
&\leqslant (n+1)^k \mathbf{E}_x |X_n|^2 I(n<\tau) \left(1 - c_2|X_n|^{-2}\right) \left(1 + \frac{k}{n+1} + \frac{C_k}{(n+1)^2}\right) \\
&\leqslant (n+1)^k \mathbf{E}_x |X_n|^2 I(n<\tau) \left(1 - c_2|X_n|^{-2} + \frac{C'_k}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Рассмотрим индикаторы $1 = I(|X_n|^2 \leqslant c(n+1)) + I(|X_n|^2 > c(n+1))$, выбирая здесь $c < c_2/C'_k$. Тогда $(C'k(n+1)^{-1} - c_2|X_n|^{-2})\, I(|X_n|^2 \leqslant c(n+1)) \leqslant -C|X_n|^{-2} I(|X_n|^2 \leqslant c(n+1))$. Таким образом,

$$\begin{aligned}
&(n+2)^k \mathbf{E}_x |X_{n+1}|^2 I(n<\tau) - (n+1)^k \mathbf{E}_x |X_n|^2 I(n<\tau) \\
&\leqslant (n+1)^k \mathbf{E}_x |X_n|^2 I(n<\tau) \left(-c_2|X_n|^{-2} + \frac{C'_k}{n+1}\right) I(|X_n|^2 \leqslant c(n+1)) \\
&\quad + (n+1)^k \mathbf{E}_x |X_n|^2 I(n<\tau) \left(-c_2|X_n|^{-2} + \frac{C'_k}{n+1}\right) \\
&\quad \times I(|X_n|^2 > c(n+1)) \leqslant C(n+1)^k \mathbf{E}_x |X_n|^2 \\
&\quad \times I(n<\tau)\,(n+1)^{-1} I(|X_n|^2 > c(n+1)) - C(n+1)^k \mathbf{E}_x I(n<\tau).
\end{aligned}$$

Отметим, что $|X_n|^{-2} I(n<\tau) \leqslant R^{-2} I(n<\tau)$. Выбираем R таким большим, что $C|X_n|^{-2} I(n<\tau) \leqslant I(n<\tau)$. Тогда получаем

$$\begin{aligned}
&C^{-1}(n+1)^k \mathbf{E}_x I(n<\tau) \\
&\leqslant \left\{(n+1)^k \mathbf{E}_x |X_n|^2 I(n<\tau) - (n+2)^k \mathbf{E}_x |X_{n+1}|^2 I(n+1<\tau)\right\} \\
&\quad + C(n+1)^k \mathbf{E}_x |X_n|^2 (n+1)^{-1} I(n<\tau)\, I(|X_n|^2 > c(n+1)).
\end{aligned}$$

Оцениваем

$$\begin{aligned}
&(n+1)^k \mathbf{E}_x |X_n|^2 (n+1)^{-1} I(n<\tau)\, I(|X_n|^2 > c(n+1)) \\
&\leqslant \mathbf{E}_x |X_n|^m I(n<\tau)\,(n+1)^{k-1-(m-2)/2}. \qquad (22)
\end{aligned}$$

Здесь можно выбрать любое $k \in (0,(m-2)/2)$. При таком k имеем $\sum_{n=0}^{\infty} C(n+1)^{k-1-(m_1-2)/2}(1+|x|^m) \leqslant C(1+|x|^m)$. Таким образом,

$$\mathbf{E}_x \sum_{n=0}^{\tau-1}(n+1)^k = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^k \mathbf{E}_x I(n<\tau) \leqslant C(1+|x|^m).$$

Стало быть, $\mathbf{E}_x\tau^{k+1} \leqslant C(1+|x|^m)$. Лемма доказана.

Отметим, что аналогичные выкладки можно провести и с величиной $\mathbf{E}_x|X_{n+1}|^{m'}I(n<\tau)$ при любом $2<m'<m$.

Теперь рассмотрим прямое произведение двух идентичных вероятностных пространств с двумя копиями нашего марковского процесса, (X_t) и (X'_t), с начальными данными $X_0=x_0$, $X'_0=x'_0$ соответственно. Мы не меняем обозначений для вероятности и математического ожидания. Пусть $R_1>R$, $\gamma \equiv \gamma_{R_1} = \inf(t \geqslant 0\colon\ \max(|X_t|,|X'_t|) \leqslant R_1)$, $\gamma(t)=\min(\gamma,t)$.

Лемма 4. *Пусть* $m_0>2, 2<m\leqslant m_0, r>r_m$. *Тогда существуют такие* R_1, $C>0$, *что*

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_{x,x'}I(n+1\leqslant\gamma(t))(|X_{n+1}|^m+|X'_{n+1}|^m)\\
&\quad+C^{-1}\,\mathbf{E}_{x,x'}I(n<\gamma(t))(|X_n|^{m-2}+|X'_n|^{m-2})\\
&\leqslant \mathbf{E}_{x,x'}I(n\leqslant\gamma(t))C(1+|x|^m+|x'|^m). \qquad (23)
\end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Повторяя вычисления в лемме 1 при $m>2$, мы получаем для $|X_n|>R$ и $|X'_n|>R$, соответственно,

$$\mathbf{E}[|X_{n+1}|^m + C^{-1}|X_n|^{m-2}|\,X_n] \leqslant |X_n|^m,$$
$$\mathbf{E}[|X'_{n+1}|^m + C^{-1}|X'_n|^{m-2}|\,X'_n] \leqslant |X'_n|^m.$$

Кроме того, при $|X_n|\leqslant R$

$$\mathbf{E}[|X_{n+1}|^m + C^{-1}|X_n|^{m-2}|\,X_n] \leqslant P(R),$$

где $P(R)$ — некоторый полином от R. Если $n<\gamma(t)$, то $|X_n|\leqslant R$ влечет $|X'_n|>R_1$. Выберем $R_1>R$ так, что $\frac{1}{2}\,C^{-1}R_1^{m-2}>P(R)$. Тогда по индукции получим (23) с новой постоянной C. Лемма доказана.

Лемма 5. *В условиях предыдущей леммы найдутся такие* $R_1, C>0$, *что*

$$\mathbf{E}_{x,x'}\gamma^{k+1} \leqslant C(1+|x|^m+|x'|^m). \qquad (24)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аналогично доказательству леммы 3, получаем

$$\begin{aligned}
&(n+2)^k\,\mathbf{E}_x(|X_{n+1}|^m+|X'_{n+1}|^m)\,I(n<\gamma(t))\\
&\quad-(n+1)^k\,\mathbf{E}_x(|X_n|^m+|X'_n|^m)\,I(n<\gamma(t))\\
&\leqslant C\,(n+1)^k\,\mathbf{E}_x|X_n|^mI(n<\gamma(t))(n+1)^{-1}I(|X_n|^2>c(n+1))
\end{aligned}$$

$$+C(n+1)^k\,\mathbf{E}_x|X'_n|^m I(n<\gamma(t))(n+1)^{-1}I(|X'_n|^2>c(n+1))$$
$$-C(n+1)^k\,\mathbf{E}_x(|X_n|^{m-2}+|X'_n|^{m-2})\,I(n<\gamma(t)).$$

Выберем R_1 столь большим, что $|X_n|^{m-2}+|X'_n|^{m-2}\geqslant 1$ при $n<\gamma(t)$. Тогда

$$C^{-1}(n+1)^k\,\mathbf{E}_{x,x'}I(n<\gamma(t))\leqslant\Big\{(n+1)^k\,\mathbf{E}_{x,x'}(|X_n|^m+|X'_n|^m)\,I(n<\gamma(t))$$
$$-(n+2)^k\,\mathbf{E}_{x,x'}(|X_{n+1}|^m+|X'_{n+1}|^m)\,I(n+1<\gamma(t))\Big\}$$
$$+C(n+1)^k\,\mathbf{E}_{x,x'}\Big(|X_n|^m(n+1)^{-1}I(|X_n|^2>c(n+1))$$
$$+|X'_n|^m(n+1)^{-1}I(|X'_n|^2>c(n+1))\,I(n<\gamma(t))\Big).$$

Окончание доказательства аналогично доказательству леммы 3 после соотношения (22). Лемма 5 доказана.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим пару независимых копий нашего марковского процесса (X_t,Y_t) с начальными значениями X_0,Y_0: $X_0=x\in\mathbf{R}^d$, Y_0 распределено согласно инвариантной мере μ^{inv}. Положим $s_0=0$ (ниже будет использовано $s_0\geqslant 0$, так что это обозначение нам понадобится). Определим последовательность моментов останова $\gamma_1<\gamma_2<\cdots$:

$$\gamma_1=\inf\,(t\geqslant s_0\colon\ |X_t|\leqslant R \text{ и } |Y_t|\leqslant R),$$

при $n\geqslant 1$

$$T_n=\inf\,(t\geqslant\gamma_n\colon\ |X_t|\geqslant R+1 \text{ или } |Y_t|\geqslant R+1);$$
$$\gamma_{n+1}=\inf\,(t\geqslant T_n\colon\ |X_t|\leqslant R \text{ и } |Y_t|\leqslant R).$$

В силу леммы 4 имеем:

$$\mathbf{E}((\gamma_1-s_0)^{k+1}\mid F^{X,Y}_{s_0})\leqslant C(1+|Y_{s_0}|^m+|X_{s_0}|^m).$$

Аналогично $\mathbf{E}((\gamma_{n+1}-\gamma_n)^{k+1}|F^{X,Y}_{\gamma_k})\leqslant C$, $n\geqslant 1$. Положим $n(t):=\sup(n\geqslant 0\colon\ \gamma_n\leqslant t)$. В силу последнего неравенства и строго марковского свойства пары (X_t,Y_t) получаем $\mathbf{P}\{n(t)\to\infty,\ t\to\infty\}=1$. С помощью метода каплинга (ср. [4]) можно определить новый процесс $(\widetilde{X}_t)$ и случайную величину $L=L_{s_0}\geqslant s_0$ на некотором расширении вероятностного пространства $(\Omega,F,\mathbf{P})$ (при этом мы не меняем обозначений для вероятности и математического ожидания) такие, что $(\widetilde{X}_t)$ эквивалентен по распределению (X_t) и, кроме того,

$$\mathbf{P}\{\widetilde{X}_t=X_t,\ t\leqslant L_{s_0}\}=\mathbf{P}\{\widetilde{X}_t=Y_t,\ t\geqslant L_{s_0}\}=1,$$

и L_{s_0} является моментом остановки относительно $F^{X,Y,\widetilde{X}}_t$. Более того, в силу локального условия Дёблина и марковского свойства найдется такое $q \in (0,1)$, что $\sup_{s_0 \geqslant 0} \mathbf{P}\{L_{s_0} > \gamma_n \mid F_{s_0}^{X,Y,\widetilde{X}}\} \leqslant q^n \quad \forall n$. Ниже мы опускаем индекс $s_0 = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(\mu_t^x - \mu) \leqslant \mathbf{P}\{L > t\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}(I(L > t)\, I(\gamma_n \leqslant t < \gamma_{n+1})) \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} [\mathbf{P}\{L > \gamma_n\}]^{1/a} [\mathbf{P}\{\gamma_{n+1} > t\}]^{1/c} \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} q^{n/a} [\mathbf{P}\{\gamma_{n+1} > t\}]^{1/c} \end{aligned}$$

(использовано неравенство Гёльдера с $a^{-1} + c^{-1} = 1$, $a > 1$, $c > 1$). В силу неравенства Бьенамэ–Чебышева получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\gamma_{n+1} > t\} \leqslant t^{-(k+1)}\, \mathbf{E}(\gamma_{n+1})^{k+1} &\leqslant t^{-(k+1)} (n+1)^k \sum_{j=0}^{n} \mathbf{E}(\gamma_{j+1} - \gamma_j)^{k+1} \\ &\leqslant t^{-(k+1)} (n+1)^k (C(1 + |X_0|^m + \mathbf{E}|Y_0|^m) + Cn). \end{aligned} \tag{25}$$

Стало быть, в силу леммы 5,

$$\mathbf{P}\{L > t\} \leqslant \sum_{n \geqslant 0} q^{n/a} \Big[t^{-(k+1)} (n+1)^k (C(1 + |x|^m) + Cn) \Big]^{1/c}. \tag{26}$$

Для любого $\nu > 0$ существуют такие c, близкое к 1, и $C < \infty$, что $\mathbf{P}\{L > t\} \leqslant Ct^{-(k+1-\nu)}(1 + |x|^m)$. Это и доказывает теорему 1.

З а м е ч а н и е. В качестве вспомогательного шага мы установили неравенство

$$\operatorname{var}(\mu_t^x - \mu_t^{x'}) \leqslant C(1 + |x|^m + |x'|^m)\,(1+t)^{-(k+1)}$$

при $m_0 > 2$, $2 < m < m_0$, $k < (m-2)/2$. При интегрировании степени по мере μ требуется $m_0 > 4$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Пусть $m < m_0 - 2$. Используя обозначения предыдущего доказательства, оцениваем

$$\begin{aligned} |\mu_t^{x,m}(B) - \mu^m(B)| &= \Big| \mathbf{E}_x(1 + |X_t|^m)\, I(X_t \in B) - \mathbf{E}(1 + |\widetilde{X}_t|^m)\, I(\widetilde{X}_t \in B) \Big| \\ &\leqslant \Big| \mathbf{E}_x(1 + |X_t|^m)\, I(X_t \in B)\, I(t < L) \\ &\quad + \mathbf{E}(1 + |\widetilde{X}_t|^m)\, I(\widetilde{X}_t \in B)\, I(t < L) \Big|. \end{aligned}$$

В силу оценки (10),

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}(1 + |\widetilde{X}_t|^m)\, I(\widetilde{X}_t \in B)\, I(t < L) \\ &\leqslant \Big(\mathbf{E}(1 + |\widetilde{X}_t|^{m_0 - 2}) \Big)^{m/(m_0-2)} (\mathbf{P}\{t < L\})^{1 - m/(m_0-2)} \\ &\leqslant C(1+t)^{-(k+1)(1 - m/(m_0-2))}, \end{aligned}$$

где k может быть выбрано произвольно большим. Остается оценить похожее выражение с X_t. Имеем

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}_x(1+|X_t|^m)\,I(X_t\in B)\,I(t<L)\\&\leqslant \mathbf{E}_x(1+|X_t|^m)\sum_{i=0}^{\infty}I(\gamma_i\leqslant t<\gamma_{i+1})\,I(\gamma_i<L)\,I(L>t).\end{aligned}$$

В силу неравенства Гёльдера оцениваем с $a,b,c>1$, $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}=1$, $a\leqslant m_0/m$:

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}_x(1+|X_t|^m)\,I(\gamma_i\leqslant t<\gamma_{i+1})\,I(L>\gamma_i)\,I(L>t)\\&\leqslant C\left(\mathbf{E}_x(1+|X_t|^{am})\,I(\gamma_i\leqslant t<\gamma_{i+1})\right)^{1/a}[\mathbf{P}_x\{L>\gamma_i\}]^{1/b}[\mathbf{P}_x\{L>t\}]^{1/c}.\end{aligned}$$

Напомним, что $\mathbf{P}\{L>\gamma_i\}\leqslant q^i$ с некоторым $q<1$ и $\mathbf{P}_x(L>t)\leqslant C(1+|x|^m)(1+t)^{-(k+1)}$, где k может быть выбрано произвольно большим. Далее, для любого $i\geqslant 1$ имеем

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}_x\Big[(1+|X_t|^{am})\,I(\gamma_i\leqslant t<\gamma_{i+1})\Big]\\&\leqslant \mathbf{E}_xI(\gamma_i\leqslant t)\,\mathbf{E}\Big[(1+|X_t|^{am})\,I(t<\gamma_{i+1})\mid F_{\gamma_i}\Big].\end{aligned}$$

Кроме того, при всяком $|x|\leqslant R$ $\mathbf{E}_x(1+|X_t|^{am})\,I(t<\gamma_1)\leqslant C(1+|x|^{am})$ в силу леммы 4. Значит, для любого $i\geqslant 1$ получаем $\mathbf{E}_x(1+|X_t|^{am})\,I(\gamma_i\leqslant t<\gamma_{i+1})\leqslant C<\infty$. Также в силу леммы 4,

$$\mathbf{E}_x(1+|X_t|^{am})\,I(\gamma_0\leqslant t<\gamma_1)\leqslant C(1+|x|^{am}).$$

Стало быть,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty}\mathbf{E}_x(1+|X_t|^m)\,I(\gamma_i\leqslant t<\gamma_{i+1})I(L>\gamma_i)&\leqslant\sum_{i=0}^{\infty}q^{i/b}C(1+|x|^m)\\&=C(1+|x|^m).\end{aligned}$$

Наконец, получаем

$$\mathbf{E}_x(1+|X_t|^m)\,I(X_t\in B)\,I(L>t)\leqslant C(1+|x|^m)(1+t)^{-(k+1)/c}.$$

Поскольку k может быть произвольным, отсюда следует искомое утверждение. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Имеем $\mathrm{var}\,\mu_t^{x,m}\leqslant\mathrm{var}\,\mu^m+\mathrm{var}\,(\mu_t^{x,m}-\mu^m)$, откуда в силу теоремы 2 следует (13).

Чтобы получить оценки (6) и (7), повторим вычисления в доказательстве теоремы 1 с произвольным $s_0\geqslant 0$. Имеем,

$$\beta^x(t)\leqslant\sup_{s_0}\mathbf{E}_x\mathbf{P}\{L_{s_0}>t+s_0\mid F_{s_0}^{X,Y,\widetilde{X}}\}\leqslant\sup_{s_0}\mathbf{E}_xC(1+|X_{s_0}|^m+|Y_{s_0}|^m).$$

Стало быть, неравенства (13) и (10) влекут как (6), так и (7). Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Для стационарного режима слабая сходимость вытекает из ЦПТ в [2]. В самом деле, случайные величины ξ_i имеют момент порядка $2+\delta$ с некоторым $\delta > 0$, и коэффициент β-перемешивания убывает быстрее любой степени. Дисперсия $s^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{cov}(\xi_0, \xi_k)$ конечна. Либо $s^2 > 0$, либо $s^2 = 0$. Если $s^2 > 0$, то $\mathbf{D}(S_n) = s^2 n(1 + o(1))$. В этом случае мы получаем ЦПТ в силу теоремы 18.4.2 из [2]. Если $s^2 = 0$, то из «хорошего» β-перемешивания и из теоремы 17.2.2 в [2] вытекает, что $\sup_n \mathbf{D}(S_n) < \infty$. Тогда, очевидно, имеет место сходимость к нулю, который рассматривается как вырожденная гауссовская случайная величина.

Равномерная плотность легко следует из оценки для дисперсии $n^{-1/2} S_n$, которая оказывается равномерно ограниченной благодаря оценкам для β-перемешивания в силу теоремы 17.2.2 из [2].

В нестационарном режиме ЦПТ следует из утверждения для стационарного случая и сходимости μ_t^x по вариации, или же непосредственно из неравенства каплинга.

Плотность следует из нестационарных оценок для дисперсии S_n и аналогичных оценок для $\mathbf{E}S_n$: оказывается, что $\sup_n |\mathbf{E}_x S_n| \leqslant C(x)$ и $\mathbf{D}S_n \leqslant nC(x)$, если скорость убывания коэффициента β-перемешивания достаточно хорошая. Теорема 4 доказана.

Замечание. Два слова о постоянной m в оценках. В представлении Харриса (20) мы пользуемся оценкой $c(B) \geqslant 1$. Для невырожденной диффузии это не дает возможности получить оптимальное значение m (ср. [16]). С другой стороны, данное неравенство справедливо и в вырожденном случае. Возможно, есть шансы улучшить оценки, если найти более точные неравенства для $\widehat{\tau}$.

5. Непрерывное время: доказательства. Как в [16], применим формулу Ито к процессу $(1+t)^k |X_t|^m$ при $t < \tau$, $k > 0$, $m \geqslant 2$. Имеем

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}(1+\tau)^k |X_\tau|^m - |x|^m \\
&\quad = \mathbf{E} \int_0^t (1+s)^k |X_s|^m \Big[k(1+s)^{-1} + m|X_s|^{-2}(X_s,\, b(X_s)) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\, m|X_s|^{-2} \operatorname{Tr} a(X_s) + \frac{1}{2}\, m(m-2)\, |X_s|^{-4} (a(X_s)\, X_s, X_s) \Big] \\
&\qquad \times \Big\{ I(|X_s|^2 \leqslant c(1+s)) + I(|X_s|^2 > c(1+s)) \Big\}\, I(s < \tau)\, ds \\
&\quad \leqslant \mathbf{E} \int_0^t (1+s)^k |X_s|^m [k(1+s)^{-1} - rm|X_s|^{-2} + mr(m)\, |X_s|^{-2}] \\
&\qquad \times I(s < \tau)\, I(|X_s|^2 \leqslant c(1+s))\, ds \\
&\qquad + \mathbf{E} \int_0^t (1+s)^k |X_s|^m [k(1+s)^{-1} - rm\, |X_s|^{-2} + mr(m)\, |X_s|^{-2}] \\
&\qquad \times I(s < \tau)\, I(|X_s|^2 > c(1+s))\, ds.
\end{aligned}$$

Выберем c так, чтобы $m(r - r(m)) > c^2k$. Тогда получаем

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}(1+\tau)^{k+1} + \mathbf{E}_x(1+\tau)^k|X_\tau|^m \\ &\quad\leqslant C(1+|x|^m) + C\mathbf{E}\int_0^t (1+s)^k|X_s|^m\left[(1+s)^{-1} + \frac{|X_s|^{-2}}{2}\right] \\ &\qquad\qquad \times I(|X_s|^2 \leqslant c(1+s))\, I(s<\tau)\, ds.\end{aligned}$$

Это дает неравенство

$$\mathbf{E}(1+\tau)^{k+1} + \mathbf{E}_x(1+\tau)^k|X_\tau|^m \leqslant C(1+|x|^m), \tag{27}$$

являющееся аналогом неравенств лемм 1 и 3 из пункта 3.

Следующий шаг — неравенство (10). Чтобы его доказать, используем представление Харриса. Для него нужно дополнительное построение. Положим $T_1 = \tau_R$, $T_1' = \inf(t \geqslant 0\colon |X_t| \geqslant R+1)$, и по индукции $T_{n+1} = \inf(t \geqslant T_n'\colon |X_t| \leqslant R)$, $T_{n+1}' = \inf(t \geqslant T_{n+1}\colon |X_t| \geqslant R+1)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Обозначим $Z_n = X_{T_n'}$. Тогда (Z_n) — марковский процесс, удовлетворяющий условию типа Дёблина в силу предположений. Стало быть, этот процесс имеет стационарную меру μ' на $B = \{|y| = R+1\}$. Поэтому

$$\mu(A) = c^{-1}(B)\int_B \mu'(dx)\,\mathbf{E}_x\int_0^{T_1'} I(X_s \in A)\, ds, \tag{28}$$

где $c(B) = \int_B \mu'(dx)\,\mathbf{E}_x T_1'$, см. [5]. Величина $c(B)$ конечна благодаря условию (T) и (27). Значит,

$$\int h(y)\,\mu(dy) = c^{-1}(B)\int_B \mu'(dx)\,\mathbf{E}_x\int_0^{T_1'} h(X_s)\, ds. \tag{29}$$

Имеем,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x\int_0^{T_1'} h(X_s)\,ds &= \mathbf{E}_x\int_0^{T_1} h(X_s)\,ds + \mathbf{E}_x\int_{T_1}^{T_1'} h(X_s)\,ds \\ &\leqslant C(1+R^m) + C\sup_{|x|\leqslant R}\mathbf{E}_x T \leqslant C(1+R^m).\end{aligned}$$

Отсюда следует соотношение (10).

Теперь мы можем повторить рассуждения в доказательстве леммы 4. Остальная часть доказательства такая же, как и для теоремы 1. Теорема 5 доказана.

Отметим, что выше мы использовали то же определение последовательности (γ_i), что и в предыдущем пункте, и при этом условие (T) достаточно для наших целей. Вместо этого можно было бы использовать непосредственно моменты (T_i'). В таком случае условие (T) надо было бы заменить на условие $\sup_{|x|=R}\mathbf{E}_x T^k < \infty\ \forall\, k > 0$, которое, строго говоря, является более ограничительным. Однако «обычно» последнее условие обеспечивается более или менее теми же предположениями типа предположений Хермандера или невырожденности.

Наконец, все утверждения теоремы 6 вытекают из тех же рассуждений, что и в доказательствах теорем 2 и 3.

Автор признателен О. В. Лепскому, предложившему вопрос относительно плотности в схеме ЦПТ для нелинейной авторегрессии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Веретенников А. Ю.* Об оценках скорости перемешивания для стохастических дифференциальных уравнений. — Теория вероятн. и ее примен., 1987, т. 32, в. 2, с. 299–308.
2. *Ибрагимов И. А.*, *Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965. 524 с.
3. *Калашников В. В.* Свойство γ-возвратности для марковских последовательностей. — Докл. АН СССР, сер. матем., 1973, т. 213, № 6, с. 1243–1246.
4. *Нуммелин Е.* Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы. М.: Мир, 1989.
5. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969. 367 с.
6. *Ango Nze P.* Critères d'ergodicité de modèles markoviens. Estimation non paramétrique sous des hypothèses de dependance. Thèse de Doctorat de Mathématiques Appliquées. Paris: Univ. Paris IX–Dauphine, 1994.
7. *Aspandiiarov S.*, *Iasnogorodski R.* General criteria of integrability of functions of passage-times for non-negative stochastic processes and their applications. — Теория вероятн. и ее примен., 1988, т. 43, в. 3, с. 509–539.
8. *Aspandiiarov S.*, *Iasnogorodski R.*, *Menshikov M.* Passage-time moments for non-negative stochastic processes and an application to reflected random walks in a quadrant. — Ann. Probab., 1996, v. 24, № 2, p. 932–960.
9. *Gulinsky O. V.*, *Veretennikov A. Yu.* Large deviations for discrete-time processes with averaging. Utrecht: VSP, 1993. 186 p.
10. *Lamperti J.* Criteria for stochastic processes II: passage-time moments. — J. Math. Anal. Appl., 1963, v. 7, p. 127–145.
11. *Menshikov M.*, *Williams R. J.* Passage-time moments for continuous non-negative stochastic processes and applications. — Adv. Appl. Probab., 1996, v. 28, p. 747–762.
12. *Meyn S. P.*, *Tweedie R. L.* Markov Chains and Stochastic Stability. Berlin: Springer-Verlag, 1993. 550 p.
13. *Pardoux E.*, *Veretennikov A. Yu.* On Poisson equation and diffusion approximation, 1. Prépublication 98-14. Marseille: ATP Univ. de Provence, 1998.
14. *Silvestrov D. S.* Recurrence relations for generalized hitting times for semi-Markov processes. — Ann. Appl. Probab., 1996, v. 6, № 2, p. 617–649.
15. *Tuominen P.*, *Tweedie R. L.* Subgeometric rates of convergence of f-ergodic Markov chains. — Adv. Appl. Probab., 1994, v. 26, p. 775–798.
16. *Veretennikov A. Yu.* On polynomial mixing bounds for stochastic differential equations. — Stochastic Process. Appl., 1997, v. 70, p. 115–127.

Поступила в редакцию
6.II.1998

Исправленный вариант
15.III.1999