А. В. Васильев, Е. П. Вдовин, Критерий смежности в графе простых чисел конечной простой группы,

Алгебра и логика, 2005, том 44, номер 6, 682–725

Алгебра и логика, 44, № 6 (2005), 682—725

УДК 512.542

КРИТЕРИЙ СМЕЖНОСТИ В ГРАФЕ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ КОНЕЧНОЙ ПРОСТОЙ ГРУППЫ*)

А. В. ВАСИЛЬЕВ, Е. П. ВДОВИН

Пусть G — конечная группа, $\pi(G)$ — множество всех простых делителей её порядка и $\omega(G)$ — спектр G, т. е. множество порядков всех её элементов. Граф $GK(G) = \langle V(GK(G)), E(GK(G))\rangle$, где $V(GK(G))$ — множество вершин и $E(GK(G))$ — множество рёбер, называется *графом Грюнберга–Кегеля* (или *графом простых чисел*) группы G, если $V(GK(G)) = \pi(G)$ и ребро (r, s) лежит в $E(GK(G))$ тогда и только тогда, когда $rs \in \omega(G)$. Простые числа $r, s \in \pi(G)$ называются *смежными*, если они смежны как вершины графа $GK(G)$, т. е. $(r, s) \in E(GK(G))$. В противном случае r и s называются *несмежными*.

Свойства графа простых чисел $GK(G)$ дают богатую информацию о структуре группы G (см. [1–4] и §§ 5 и 7 настоящей работы). Основная цель статьи — указать исчерпывающий арифметический критерий смежности в графе простых чисел $GK(G)$ для каждой конечной неабелевой простой группы G. Этой цели посвящены §§ 1–4. В § 5 обсуждаются некоторые новые результаты, касающиеся графа простых чисел конечной группы. Кроме того, объясняется важность так называемых чисел неплотности графа

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 05–01–00797, Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ, проект НШ-2069.2003.1, программы Рособразования „Развитие научного потенциала высшей школы“, проект № 8294, программы „Университеты России“, проект УР.04.01.202, а также гранта Президиума СО РАН № 86-197.

простых чисел для исследований групповой структуры. В § 6 определяются указанные инварианты для всех конечных неабелевых простых групп (результирующие таблицы приводятся в § 8). Приложения полученных результатов рассматриваются в § 7.

§ 1. Предварительные сведения

Если n — натуральное число, π — множество простых чисел, то через $\pi(n)$ обозначается множество всех простых делителей числа n, через n_π — наибольший делитель t числа n такой, что $\pi(t) \subseteq \pi$. Заметим, что для конечной группы G по определению $\pi(G) = \pi(|G|)$.

Критерий смежности двух простых делителей для знакопеременных групп очевиден и может быть сформулирован следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Пусть $G = \mathrm{Alt}_n$ — знакопеременная группа степени n.*

(1) *Пусть $r, s \in \pi(G)$ нечётны. Тогда r и s несмежны в том и только в том случае, если $r + s > n$.*

(2) *Пусть $r \in \pi(G)$ нечётно. Тогда 2 и r несмежны в том и только в том случае, если $r + 4 > n$.*

Информацию о смежности вершин в графе простых чисел для всех спорадических групп и группы Титса ${}^2F_4(2)'$ можно найти в [5, 6]. Таким образом, требуется рассмотреть лишь простые группы лиева типа.

Для групп лиева типа и линейных алгебраических групп обозначения согласуются с обозначениями в [7, 8], соответственно. Обозначим через G_{sc} универсальную группу лиева типа. Тогда каждая фактор-группа G_{sc}/Z, где $Z \leq Z(G_{sc})$, называется *группой лиева типа.* Почти во всех случаях группа $G_{sc}/Z(G_{sc})$ проста и говорят, что $G_{ad} = G_{sc}/Z(G_{sc})$ — группа *присоединённого типа.* Некоторые группы лиева типа над небольшими полями не являются простыми. В табл. 1 собирается информация из [7, теор. 11.1.2 и 14.4.1] и указываются все такие исключения. Используются обозначения $A_n^\varepsilon(q)$, $D_n^\varepsilon(q)$ и $E_6^\varepsilon(q)$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$, и $A_n^+(q) = A_n(q)$, $A_n^-(q) = {}^2A_n(q)$, $D_n^+(q) = D_n(q)$, $D_n^-(q) = {}^2D_n(q)$, $E_6^+(q) = E_6(q)$, $E_6^-(q) = {}^2E_6(q)$.

Таблица 1. Группы лиева типа, не являющиеся простыми

Группа	Свойства
$A_1(2)$	группа разрешима
$A_1(3)$	группа разрешима
$B_2(2)$	$B_2(2) \simeq \mathrm{Sym}_6$
$G_2(2)$	$[G_2(2), G_2(2)] \simeq {}^2A_2(3)$
${}^2A_2(2)$	группа разрешима
${}^2B_2(2)$	группа разрешима
${}^2G_2(3)$	$[{}^2G_2(3), {}^2G_2(3)] \simeq A_1(8)$
${}^2F_4(2)$	$[{}^2F_4(2), {}^2F_4(2)] = {}^2F_4(2)'$ — группа Титса

Если G изоморфна ${}^2A_n(q)$, ${}^2D_n(q)$ или ${}^2E_6(q)$, будем говорить, что G определена над полем $GF(q^2)$; если $G \simeq {}^3D_4(q)$, будем говорить, что G определена над $GF(q^3)$; и G определена над $GF(q)$ для всех остальных групп лиева типа. Поле $GF(q)$ во всех случаях называется *основным полем* группы G. Если G — универсальная группа лиева типа с основным полем $GF(q)$, то существуют натуральное число N (равное $|\Phi^+|$ в большинстве случаев) и многочлен $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ такие, что $|G| = f(q) \cdot q^N$ и $(q, f(q)) = 1$ (см. [7, теор. 9.4.10 и 14.3.1]). Этот многочлен обозначается через $f_G(t)$. Если G не является универсальной, то найдётся универсальная группа K такая, что $G = K/Z$, где $Z \leq Z(K)$, и $f_G(t)$ определяется как $f_K(t)$.

Предположим, что $\overline{G}$ — связная простая линейная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем положительной характеристики p. Пусть σ — эндоморфизм группы $\overline{G}$ такой, что $\overline{G}_\sigma = C_{\overline{G}}(\sigma)$ — конечное множество. Тогда σ называется *отображением Фробениуса* и $G = O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$ является конечной группой лиева типа. Более того, все конечные группы лиева типа, скрученные и нескрученные, могут быть получены таким способом. Далее предполагается, что для каждой конечной группы G лиева типа зафиксирована (некоторым способом) линейная алгебраическая группа $\overline{G}$ и отображение Фробениуса σ так, что $G = O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$. Если группа $\overline{G}$ односвязна, то $G = \overline{G}_\sigma = O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$, и если $\overline{G}$ — присоединённого типа, то $\overline{G}_\sigma = \widehat{G}$ — группа внутренне-диагональных автоморфизмов группы G (см. [9, § 12]).

Если $\overline{R}$ — σ-инвариантная редуктивная подгруппа группы $\overline{G}$, то $\overline{R}_\sigma \cap G = \overline{R} \cap G$ называется *редуктивной подгруппой* группы G. Если $\overline{R}$ имеет максимальный ранг, то говорят, что $\overline{R}_\sigma \cap G$ также имеет *максимальный ранг*. Заметим, что если $\overline{R}$ — σ-инвариантная редуктивная подгруппа максимального ранга, то $\overline{R} = \overline{T} \cdot \overline{G}_1 * \ldots * \overline{G}_k$, где $\overline{T}$ — некоторый σ-инвариантный максимальный тор группы $\overline{R}$ и $\overline{G}_1, \ldots, \overline{G}_k$ — подсистемные подгруппы группы $\overline{G}$. Кроме того, $\overline{G}_1 * \ldots * \overline{G}_k = \left[\overline{R}, \overline{R}\right]$. Известно, что $\overline{R}_\sigma = \overline{T}_\sigma G_1 * \ldots * G_m$, подгруппы $G_1, \ldots, G_m$ называются *подсистемными подгруппами* группы G. В общем случае $m \leqslant k$ и для всех i основное поле группы G_i равно $GF(q^{\alpha_i})$, где $\alpha_i \geqslant 1$. Существует эффективный алгоритм, построенный Борелем и де Зибенталем, для определения всех подсистемных подгрупп группы $\overline{G}$ (см. [10 и 11]). Требуется рассмотреть расширенную диаграмму Дынкина группы $\overline{G}$ и исключить любое количество вершин. Связные компоненты получившегося графа являются диаграммами Дынкина подсистемных подгрупп группы $\overline{G}$, и диаграммы Дынкина всех подсистемных подгрупп могут быть получены таким способом.

Если $\overline{T}$ — σ-инвариантный тор группы $\overline{G}$, то $T = \overline{T} \cap G = \overline{T}_\sigma \cap G$ называется *тором* группы G. Если $\overline{T}$ максимален, то T — *максимальный тор* группы G. Если G не является группой Сузуки или группой Ри, то для каждого максимального тора T выполняется $|\overline{T}_\sigma| = g(q)$, где $GF(q)$ — основное поле группы G, $g(t)$ — многочлен степени n, делящий $f_G(t)$, и n — ранг группы $\overline{G}$. Для более подробной информации см. [12, гл. 1].

В леммах 1.2 и 1.3 приводится информация о максимальных торах в конечных простых группах лиева типа.

ЛЕММА 1.2 [13, предлож. 7–10 и 14]**.** *Пусть $\overline{G}$ — связная простая классическая алгебраическая группа присоединённого типа и $G = O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$ — конечная простая классическая группа.*

(1) *Каждый максимальный тор T группы $G = A^{\varepsilon}_{n-1}(q)$ имеет поря-*

док

$$\frac{1}{(n, q-(\varepsilon 1))(q-(\varepsilon 1))}(q^{n_1}-(\varepsilon 1)^{n_1})\cdot(q^{n_2}-(\varepsilon 1)^{n_2})\cdot\ldots\cdot(q^{n_k}-(\varepsilon 1)^{n_k})$$

для подходящего разбиения $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$ *числа* n. *Более того, для любого разбиения существует тор соответствующего порядка.*

(2) *Каждый максимальный тор* T *группы* G, *где* $G=B_n(q)$ *или* $G=C_n(q)$, *имеет порядок*

$$\frac{1}{(2, q-1)}(q^{n_1}-1)\cdot(q^{n_2}-1)\cdot\ldots\cdot(q^{n_k}-1)\cdot(q^{l_1}+1)\cdot(q^{l_2}+1)\cdot\ldots\cdot(q^{l_m}+1)$$

для подходящего разбиения $n_1+n_2+\ldots+n_k+l_1+l_2+\ldots+l_m=n$ *числа* n. *Более того, для любого разбиения существует тор соответствующего порядка.*

(3) *Каждый максимальный тор* T *группы* $G=D_n^{\varepsilon}(q)$ *имеет порядок*

$$\frac{1}{(4, q^n-\varepsilon 1)}\cdot(q^{n_1}-1)\cdot(q^{n_2}-1)\cdot\ldots\cdot(q^{n_k}-1)\cdot(q^{l_1}+1)\cdot(q^{l_2}+1)\cdot\ldots\cdot(q^{l_m}+1)$$

для подходящего разбиения $n_1+n_2+\ldots+n_k+l_1+l_2+\ldots+l_m=n$ *числа* n, *где* m *чётно, если* $\varepsilon=+$, *и* m *нечётно, если* $\varepsilon=-$. *Более того, для любого разбиения существует тор соответствующего порядка.*

ЛЕММА 1.3 [14 и 15]. *Пусть* $\overline{G}$ *— связная простая исключительная алгебраическая группа присоединённого типа, а* $G=O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$ *— конечная простая исключительная группа лиева типа.*

(1) *Каждый максимальный тор* T *группы* $G=G_2(q)$ *имеет один из следующих порядков*: $(q\pm 1)^2$; q^2-1; $q^2\pm q+1$. *Более того, для любого из приведённых выше чисел существует тор соответствующего порядка.*

(2) *Каждый максимальный тор* T *группы* $G=F_4(q)$ *имеет один из следующих порядков*: $(q\pm1)^4$; $(q\pm1)^2\cdot(q^2\pm1)$; $(q^2\pm1)^2$; $(q\pm1)(q^3\pm1)$; $q^4\pm1$; $(q^2\pm q+1)^2$; q^4-q^2+1. *Здесь и ниже символ* $\pm$ *означает, что можно выбрать либо „+“, либо „−“ независимо для каждого множителя, т. е.,* $(q\pm1)^2(q^2\pm1)$ *равно либо* $(q-1)^2(q^2-1)$, *либо* $(q+1)^2(q^2-1)$, *либо* $(q-1)^2(q^2+1)$, *либо* $(q+1)^2(q^2+1)$. *Более того, для любого из приведённых выше чисел существует тор соответствующего порядка.*

(3) *Для каждого максимального тора T группы $G = E_6^{\varepsilon}(q)$ число $(3, q-\varepsilon 1)|T|$ равно одному из следующих чисел*: $(q-\varepsilon 1)^k \cdot (q+\varepsilon 1)^{6-k}$, $2 \leqslant k \leqslant 6$; $(q^k - (\varepsilon 1)^k) \cdot (q^{6-k} - (\varepsilon 1)^{6-k})$, $1 \leqslant k \leqslant 5$; $(q^k - (\varepsilon 1)^k) \cdot (q-\varepsilon 1)^{6-k}$, $3 \leqslant k \leqslant 6$; $(q^3-\varepsilon 1)(q^2-1)(q\pm 1)$; $(q^5-\varepsilon 1)(q+\varepsilon 1)$; $(q^3+\varepsilon 1)(q^2\pm 1)(q-\varepsilon 1)$; $(q^4+1)(q^2-1)$; $(q^2+1)^2(q-\varepsilon 1)^2$; $(q^2+\varepsilon q+1)^3$; $(q^2+\varepsilon q+1)^2(q^2-1)$; $(q^4-1)(q+\varepsilon 1)^2$; $(q^3+\varepsilon 1)(q^2+\varepsilon q+1)(q+\varepsilon 1)$; $(q^4-q^2+1)(q^2+\varepsilon q+1)$; $q^6+\varepsilon q^3+1$; $(q^2+\varepsilon q+1)(q^2-\varepsilon q+1)^2$. *Более того, для каждого числа n из приведённых выше существует такой тор T, что $(3, q-\varepsilon 1)|T| = n$.*

(4) *Для каждого максимального тора T группы $G = E_7(q)$ число $(2, q-1)|T|$ равно одному из следующих чисел*: $(q^{n_1}\pm 1)\cdot\ldots\cdot(q^{n_k}\pm 1)$, $n_1 + \ldots + n_k = 7$ и $(2,q-1)|T| \neq (q\pm 1)(q^6+1)$; $(q-\epsilon 1)\cdot(q^2+\epsilon q+1)^3$; $(q^5-\epsilon 1)\cdot(q^2+\epsilon q+1)$; $(q^3\pm 1)\cdot(q^4-q^2+1)$; $(q-\epsilon 1)\cdot(q^6+\epsilon q^3+1)$; $(q^3-\epsilon 1)\cdot(q^2-\epsilon q+1)^2$, где $\epsilon = \pm$. *Более того, для каждого числа n из приведённых выше существует такой тор T, что $(2, q-1)|T| = n$.*

(5) *Каждый максимальный тор T группы $G = E_8(q)$ имеет один из следующих порядков*: $(q^{n_1}\pm 1)\cdot\ldots\cdot(q^{n_k}\pm 1)$, $n_1+\ldots+n_k = 8$ и $|T| \neq q^8+1$; $(q-\epsilon 1)\cdot(q^2+\epsilon q+1)^3\cdot(q\pm 1)$; $(q^5-\epsilon 1)\cdot(q^2+\epsilon q+1)\cdot(q\pm 1)$; $(q^3\pm 1)\cdot(q^4-q^2+1)\cdot(q\pm 1)$; $(q-\epsilon 1)\cdot(q^6+\epsilon q^3+1)\cdot(q\pm 1)$; $(q^3-\epsilon 1)\cdot(q^2-\epsilon q+1)^2\cdot(q\pm 1)$; q^8-q^4+1; $q^8+q^7-q^5-q^4-q^3+q+1$; $q^8-q^6+q^4-q^2+1$; $(q^4-q^2+1)^2$; $(q^6+\epsilon q^3+1)(q^2+\epsilon q+1)$; $q^8-q^7+q^5-q^4+q^3-q+1$; $(q^4+\epsilon q^3+q^2+\epsilon q+1)^2$; $(q^4-q^2+1)(q^2\pm q+1)^2$; $(q^2-q+1)^2\cdot(q^2+q+1)^2$; $(q^2\pm q+1)^4$, где $\epsilon = \pm$. *Более того, для любого из приведённых выше чисел существует тор соответствующего порядка.*

(6) *Каждый максимальный тор T группы $G = {}^3D_4(q)$ имеет один из следующих порядков*: $(q^3\pm 1)(q\pm 1)$; $(q^2\pm q+1)^2$; q^4-q^2+1. *Более того, для любого из приведённых выше чисел существует тор соответствующего порядка.*

(7) *Каждый максимальный тор T группы $G = {}^2B_2(2^{2n+1})$ имеет один из следующих порядков*: $q-1$; $q\pm\sqrt{2q}+1$; *где* $q = 2^{2n+1}$. *Более того, для любого из приведённых выше чисел существует тор соответствующего порядка.*

(8) *Каждый максимальный тор T группы $G = {}^2G_2(3^{2n+1})$ имеет*

один из следующих порядков: $q \pm 1$; $q \pm \sqrt{3q} + 1$; *где* $q = 3^{2n+1}$. *Более того, для любого из приведённых выше чисел существует тор соответствующего порядка.*

(9) *Каждый максимальный тор* T *группы* $G = {}^2F_4(2^{2n+1})$, *где* $n \geqslant 1$, *имеет один из следующих порядков*: $(q \pm 1)^2$; $q^2 \pm 1$; $q^2 - q + 1$; $(q \pm \sqrt{2q} + 1)^2$; $q^2 - \epsilon q\sqrt{2q} + \epsilon\sqrt{2q} - 1$; $q^2 + \epsilon q\sqrt{2q} + q + \epsilon\sqrt{2q} + 1$; *где* $q = 2^{2n+1}$ *и* $\epsilon = \pm$. *Более того, для любого из приведённых выше чисел существует тор соответствующего порядка.*

Если q — натуральное число, r — нечётное простое число и $(r, q) = 1$, то через $e(r, q)$ обозначим наименьшее натуральное число n, удовлетворяющее условию $q^n \equiv 1 (\operatorname{mod} r)$. Если q нечётно, положим $e(2, q) = 1$ при $q \equiv 1 (\operatorname{mod} 4)$ и $e(2, q) = 2$ при $q \equiv -1 (\operatorname{mod} 4)$.

Основным техническим средством в § 6 является следующая

ЛЕММА 1.4 (следствие теоремы Жигмонди [16]). *Пусть* q — *натуральное число, большее* 1. *Тогда для каждого* $n \in \mathbb{N}$ *найдётся простое число* r *такое, что* $e(r, q) = n$, *исключая случай* $n = 6$, $q = 2$.

Простое число r, удовлетворяющее условию $e(r, q) = n$, называется *примитивным простым делителем* числа $q^n - 1$. По лемме 1.4 оно существует, исключая указанный выше случай. Если q фиксировано, обозначим через r_n некоторый примитивный простой делитель числа $q^n - 1$ (очевидно, $q^n - 1$ может иметь более одного такого делителя). Заметим, что в соответствии с нашим определением каждый простой делитель числа $q - 1$ является примитивным простым делителем числа $q - 1$ за единственным исключением: 2 не является примитивным делителем числа $q - 1$ при $e(2, q) = 2$. В последнем случае 2 — примитивный делитель числа $q^2 - 1$.

В силу [7, теор. 9.4.10 и 14.3.1] порядок любой конечной простой группы лиева типа G ранга n над полем $GF(q)$ характеристики p равен

$$|G| = \frac{1}{d} q^N (q^{m_1} \pm 1) \cdot \ldots \cdot (q^{m_n} \pm 1).$$

Поэтому любой простой делитель r числа $|G|$, отличный от характеристики p, является примитивным делителем числа $q^m - 1$ для некоторого натурального числа m. Таким образом, лемма 1.4 позволяет „находить“

простые делители числа $|G|$. Более того, если G не является группой Сузуки или группой Ри, из лемм 1.2 и 1.3 следует, что для фиксированного m каждые два примитивных делителя числа q^m-1 смежны в $GK(G)$.

Для групп Сузуки и Ри будет использоваться следующая

ЛЕММА 1.5. *Пусть n — натуральное число.*

(1) *Пусть $m_1(B,n) = 2^{2n+1}-1$, $m_2(B,n) = 2^{2n+1}-2^{n+1}+1$, $m_3(B,n)=2^{2n+1}+2^{n+1}+1$. Тогда $(m_i(B,n),m_j(B,n))=1$, если $i\neq j$.*

(2) *Пусть $m_1(G,n) = 3^{2n+1}-1$, $m_2(G,n) = 3^{2n+1}+1$, $m_3(G,n) = 3^{2n+1}-3^{n+1}+1$, $m_4(G,n)=3^{2n+1}+3^{n+1}+1$. Тогда $(m_1(G,n),m_2(G,n)) = 2$ и $(m_i(G,n),m_j(G,n))=1$ в остальных случаях.*

(3) *Пусть $m_1(F,n) = 2^{4n+2}-1$, $m_2(F,n) = 2^{4n+2}+1$, $m_3(F,n) = 2^{4n+2}-2^{2n+1}+1$, $m_5(F,n) = 2^{4n+2}-2^{3n+2}+2^{2n+1}-2^{n+1}+1$, $m_6(F,n)=2^{4n+2}+2^{3n+2}+2^{2n+1}+2^{n+1}+1$. Тогда $(m_1(F,n),m_3(F,n))=3$ и $(m_i(F,n),m_j(F,n))=1$ в остальных случаях.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится прямым вычислением. □

По лемме 1.3 каждый отличный от характеристики простой делитель s порядка группы Сузуки ${}^2B_2(2^{2n+1})$ делит одно из чисел $m_i(B,n)$, определённых в лемме 1.5. То же самое верно для групп Ри ${}^2G_2(3^{2n+1})$, ${}^2F_2(2^{2n+1})$ и всех делителей чисел $m_i(G,n)$, $m_i(F,n)$, соответственно. Таким образом, лемма 1.5 позволяет находить простые делители порядков групп Сузуки и Ри. Более того, из леммы 1.3 следует, что для фиксированного числа k каждые два простых делителя числа $m_k(B,n)$ смежны в $GK({}^2B_2(2^{2n+1}))$. То же верно для групп Ри и всех простых делителей чисел $m_k(G,n)$ и $m_k(F,n)$.

§ 2. Смежность нечётных простых чисел

В этом параграфе рассматривается, смежны ли в графе Грюнберга–Кегеля конечной группы лиева типа два нечётных простых числа, отличных от характеристики.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Пусть $G=A_{n-1}(q)$ — конечная простая группа лиева типа над полем характеристики p. Пусть r,s — нечётные* *простые числа и* $r, s \in \pi(G) \setminus \{p\}$. *Обозначим* $k = e(r, q)$, $l = e(s, q)$ *и предположим, что* $2 \leqslant k \leqslant l$. *Тогда* r *и* s *несмежны в том и только том случае, если* $k + l > n$ *и* k *не делит* l.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, заметим, что для любого нечётного простого числа $c \neq p$ выполняется условие

$$\text{число } c \text{ делит } q^x - 1 \text{ тогда и только тогда, когда } e(c, q) \text{ делит } x. \tag{1}$$

Действительно, по определению c делит $q^{e(c,q)} - 1$ и не делит $q^y - 1$ для любого $y < e(c, q)$, т. е. $e(c, q)$ — это порядок q в мультипликативной группе $GF(c)^*$ конечного поля $GF(c)$. Следовательно, если c делит $q^z - 1$, то $q^z = 1$ в $GF(c)^*$, откуда $e(c, q)$ делит z. Предположим теперь, что $e(c, q)$ делит z. Тогда $q^z - 1 = (q^{e(c,q)} - 1)f(q)$ для некоторого $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$, откуда c делит $q^z - 1$.

Предположим, что $k + l \leqslant n$. Рассмотрим максимальный тор T группы G порядка

$$\frac{1}{(n, q-1)(q-1)}(q^k - 1) \cdot (q^l - 1) \cdot (q - 1)^{n-k-l}.$$

Тор T — абелева подгруппа группы G, и $r, s \in \pi(T)$. Следовательно, T содержит элемент порядка rs, а значит, числа r, s смежны. Если k делит l, то оба числа r и s делят $q^l - 1$, следовательно, максимальный тор порядка $\frac{1}{(n,q-1)}(q^l - 1)(q - 1)^{n-l-1}$ содержит элемент порядка rs.

Предположим теперь, что $k + l > n$, k не делит l, и пусть g — элемент группы G порядка rs. Тогда $(|g|, p) = 1$, и значит, g — полупростой элемент. Следовательно, найдётся максимальный тор T такой, что $g \in T$. По лемме 1.2 порядок тора T равен

$$\frac{1}{(n, q-1)(q-1)}(q^{n_1} - 1) \cdot (q^{n_2} - 1) \cdot \ldots \cdot (q^{n_x} - 1)$$

для подходящего разбиения $n_1 + n_2 + \ldots + n_x = n$ числа n. Поскольку r, s просты, существуют числа n_i, n_j такие, что r делит $q^{n_i} - 1$ и s делит $q^{n_j} - 1$. В силу (1) имеем $n_i = a \cdot k$, $n_j = b \cdot l$ для некоторых чисел $a, b \geqslant 1$. Более того, поскольку $k + l > n$ и $k \leqslant l$, то $b = 1$, иначе $n_j \geqslant l + l \geqslant k + l > n$, что противоречит равенству $n_1 + \ldots + n_x = n$. Поскольку k не делит l, имеем $n_i \neq n_j$. Значит, $n_1 + n_2 + \ldots + n_x \geqslant n_i + n_j = a \cdot k + l > n$; противоречие. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Пусть $G = {}^2A_{n-1}(q)$ — конечная простая группа лиева типа над полем характеристики p. Определим функцию*

$$\nu(m) = \begin{cases} m, & \text{если } m \equiv 0 (\bmod 4), \\ \frac{m}{2}, & \text{если } m \equiv 2 (\bmod 4), \\ 2m, & \text{если } m \equiv 1 (\bmod 2). \end{cases}$$

Пусть r, s — нечётные простые числа, $r, s \in \pi(G) \setminus \{p\}$. Обозначим $k = e(r, q)$, $l = e(s, q)$ и допустим, что $2 \leqslant \nu(k) \leqslant \nu(l)$. Тогда r и s несмежны в том и только том случае, если $\nu(k) + \nu(l) > n$ и $\nu(k)$ не делит $\nu(l)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, заметим, что для любого нечётного простого числа $c \neq p$ выполняется условие

$$\begin{gathered} \text{число } c \text{ делит } q^x - (-1)^x \text{ тогда и только тогда,} \\ \text{когда } \nu(e(c, q)) \text{ делит } x. \end{gathered} \tag{2}$$

Сначала предположим, что $e(c, q)$ нечётно. Если c делит $q^z - (-1)^z$, то c делит $q^{2z} - 1$, значит, в силу (1) число $e(c, q)$ делит $2z$. Поскольку $e(c, q)$ нечётно, оно делит z и, вновь в силу (1), c делит $q^z - 1$. Число c нечётно, поэтому $q^z + 1$ не делится на c, значит, $q^z - (-1)^z = q^z - 1$, т. е. z чётно. Однако $e(c, q)$ нечётно, откуда $2e(c, q) = \nu(e(c, q))$ делит z. Предположим, что $\nu(e(c, q))$ делит z. Тогда z чётно, значит, $q^z - (-1)^z = q^z - 1$ и c делит $q^z - (-1)^z$ в силу (1). Поэтому (2) верно в этом случае.

Предположим, что $e(c, q) \equiv 2 (\bmod 4)$. Если c делит $q^z - (-1)^z$, то c делит $q^{2z} - 1$, откуда $e(c, q)$ делит $2z$. В силу $\nu(e(c, q)) = \frac{e(c,q)}{2}$ число $\nu(e(c, q))$ делит z. Если $\nu(e(c, q))$ делит z и z нечётно, то $q^z - (-1)^z = q^z + 1$. Поскольку $e(c, q)$ делит $2z$, число c делит $q^{2z} - 1$. Имеем $q^{2z} - 1 = (q^z - 1) \cdot (q^z + 1)$. В силу того, что z нечётно, $e(c, q)$ не делит z, следовательно, по (1) число c не делит $q^z - 1$, откуда c делит $q^z + 1 = q^z - (-1)^z$. Если $\nu(e(c, q))$ делит z и z чётно, то $2\nu(e(c, q)) = e(c, q)$ делит z, значит, по (1) число c делит $q^z - (-1)^z = q^z - 1$. Таким образом, (2) верно и в этом случае.

Наконец, предположим, что $e(c, q) \equiv 0 (\bmod 4)$. Если c делит $q^z - (-1)^z$, то, как и выше, c делит $q^{2z} - 1$, откуда $e(c, q)$ делит $2z$ и $\frac{e(c,q)}{2}$

делит z. Число $\frac{e(c,q)}{2}$ чётно, значит, z чётно и $q^z-(-1)^z=q^z-1$. Отсюда $e(c,q)=\nu(e(c,q))$ делит z. Если $\nu(e(c,q))=e(c,q)$ делит z, то z чётно и в силу (1) число c делит $q^z-(-1)^z=q^z-1$.

Предположим, что $\nu(k)+\nu(l)\leqslant n$. Рассмотрим максимальный тор T группы G порядка

$$\frac{1}{(n,q+1)(q+1)}(q^{\nu(k)}-(-1)^{\nu(k)})\cdot(q^{\nu(l)}-(-1)^{\nu(l)})\cdot(q+1)^{n-\nu(k)-\nu(l)}.$$

Тор T — абелева подгруппа группы G, и $r,s\in\pi(T)$. Следовательно, T содержит элемент порядка rs, а числа r,s смежны. Если $\nu(k)$ делит $\nu(l)$, то оба числа r и s делят $q^{\nu(l)}-(-1)^{\nu(l)}$, следовательно, максимальный тор порядка $\frac{1}{(n,q+1)}(q^{\nu(l)}-(-1)^{\nu(l)})(q+1)^{n-\nu(l)-1}$ содержит элемент порядка rs.

Предположим теперь, что $\nu(k)+\nu(l)>n$, $\nu(k)$ не делит $\nu(l)$, и пусть $g\in{}^2A_{n-1}(q)$ имеет порядок rs. Тогда $(|g|,p)=1$, откуда g — полупростой элемент. Следовательно, найдётся максимальный тор T такой, что $g\in T$. Используя (2) и лемму 1.2, приходим к противоречию как при доказательстве предложения 2.1. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Пусть G — одна из конечных простых групп лиева типа $B_n(q)$ или $C_n(q)$ над полем характеристики p. Определим функцию*

$$\eta(m)=\begin{cases} m, & \text{если } m \text{ нечётно},\\ \frac{m}{2} & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Пусть r,s — нечётные простые числа и $r,s\in\pi(G)\setminus\{p\}$. Обозначим $k=e(r,q)$, $l=e(s,q)$ и предположим, что $1\leqslant\eta(k)\leqslant\eta(l)$. Тогда r и s несмежны в том и только том случае, если $\eta(k)+\eta(l)>n$, а $\eta(k)$, $\eta(l)$ удовлетворяют следующему условию:

$$\begin{gathered}\text{либо } \tfrac{\eta(l)}{\eta(k)} \text{ не является нечётным целым числом,}\\ \text{либо } \eta(k)=\eta(l) \text{и } k\neq l.\end{gathered}\tag{3}$$

Заметим, что (3) выполняется в следующих случаях:

(1) оба числа k и l чётны, и либо $\eta(k)$ не делит $\eta(l)$, либо $\frac{\eta(l)}{\eta(k)}$ чётно; тогда $q^{\eta(k)}+(-1)^k=q^{\eta(k)}+1$ не делит $q^{\eta(l)}+(-1)^l=q^{\eta(l)}+1$;

(2) оба числа k и l нечётны, и $\eta(k)$ не делит $\eta(l)$; тогда $q^{\eta(k)}+(-1)^k = q^k-1$ не делит $q^{\eta(l)}+(-1)^l = q^l-1$;

(3) число k нечётно и l чётно; тогда $q^{\eta(k)}+(-1)^k = q^k-1$ не делит $q^{\eta(l)}+(-1)^l = q^{\eta(l)}+1$;

(4) число k чётно, l нечётно, и либо $\eta(k)$ не делит $\eta(l)$, либо $\frac{\eta(l)}{\eta(k)}$ является чётным числом или $\frac{\eta(l)}{\eta(k)}$ равно 1; тогда $q^{\eta(k)}+(-1)^k = q^{\eta(k)}+1$ не делит $q^{\eta(l)}+(-1)^l = q^l-1$.

Вышесказанное означает, что $\eta(k)$, $\eta(l)$ удовлетворяют условию (3) тогда и только тогда, когда $q^{\eta(k)}+(-1)^k$ не делит $q^{\eta(l)}+(-1)^l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для начала докажем, что для любого нечётного простого числа $c \neq p$ выполняется условие

$$\text{если } c \text{ делит } q^x \pm 1, \text{ то } \eta(e(c,q)) \text{ делит } x. \tag{4}$$

Пусть $e(c,q)$ нечётно и c делит $q^z \pm 1$. В силу (1) число $e(c,q)$ делит $2z$. Число $e(c,q)$ нечётно, откуда $e(c,q) = \eta(e(c,q))$ делит z. Пусть теперь $e(c,q)$ чётно и c делит $q^z \pm 1$. Тогда c делит $q^{2z}-1$, откуда $e(c,q)$ делит $2z$ и $\frac{e(c,q)}{2} = \eta(e(c,q))$ делит z.

Если $\eta(k)+\eta(l) \leqslant n$, то можно рассмотреть максимальный тор T порядка $\frac{1}{(2,q-1)}(q^{\eta(k)}+(-1)^k)\cdot(q^{\eta(l)}+(-1)^l)\cdot(q-1)^{n-\eta(k)-\eta(l)}$. Он является абелевой группой и $r,s \in \pi(T)$. Значит, T содержит элемент порядка rs. Если $\eta(k)$, $\eta(l)$ не удовлетворяют условию (3), то $q^{\eta(k)}+(-1)^k$ делит $q^{\eta(l)}+(-1)^l$, а следовательно, оба числа r и s делят $q^{\eta(l)}+(-1)^l$. Таким образом, максимальный тор порядка $\frac{1}{(2,q-1)}(q^{\eta(l)}+(-1)^l)(q-1)^{n-\eta(l)}$ содержит элемент порядка rs.

Предположим, что $\eta(k)+\eta(l) > n$, $\eta(k)$ и $\eta(l)$ удовлетворяют условию (3) и существует элемент $g \in G$ порядка rs. Поскольку $(|g|,p)=1$, элемент g полупрост. Поэтому найдётся максимальный тор T, содержащий g. В силу леммы 1.2 порядок $|T|$ равен

$$\frac{1}{(2,q-1)}(q^{n_1}\pm 1)\cdot(q^{n_2}\pm 1)\cdot\ldots\cdot(q^{n_x}\pm 1)$$

для подходящего разбиения $n_1+n_2+\ldots+n_x = n$ числа n. Используя (4), приходим к противоречию как при доказательстве предложения 2.1. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Пусть $G = D_n^\varepsilon(q)$ — конечная простая группа лиева типа над полем характеристики p, функция $\eta(m)$ определена в предложении 2.3. Пусть r, s — нечётные простые числа, $r, s \in \in \pi(D_n^\varepsilon(q)) \setminus \{p\}$. Положим $k = e(r, q)$, $l = e(s, q)$, $1 \leqslant \eta(k) \leqslant \eta(l)$. Тогда r и s несмежны в том и только том случае, если $2 \cdot \eta(k) + 2 \cdot \eta(l) > > 2n - (1 - \varepsilon(-1)^{k+l})$ и $\eta(k)$, $\eta(l)$ удовлетворяют условию (3).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично предыдущим. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Пусть G — конечная простая исключительная группа лиева типа над полем характеристики p. Пусть числа r, s — нечётные простые и $r, s \in \pi(G) \setminus \{p\}$. Обозначим $k = e(r, q)$, $l = e(s, q)$ и предположим, что $1 \leqslant k \leqslant l$. Тогда r и s несмежны в том и только том случае, если $k \neq l$ и выполняется одно из следующих условий:*

(1) $G = G_2(q)$ и либо $r \neq 3$ и $l \in \{3, 6\}$, либо $r = 3$ и $l = 9 - 3k$;

(2) $G = F_4(q)$ и либо $l \in \{8, 12\}$, либо $k \in \{3, 4\}$ и $l = 6$, либо $k = 3$ и $l = 4$;

(3) $G = E_6(q)$ и либо $l = 5$ и $k \geqslant 3$, либо $l = 6$ и $k = 5$, либо $l = 8$, $k \geqslant 3$, либо $l = 8$ и $r = 3$ при $(q-1)_3 = 3$, либо $l = 9$, либо $l = 12$, $k \neq 3$ и $r \neq 3$;

(4) $G = {}^2E_6(q)$ и либо $l = 8$, $k \geqslant 3$, либо $l = 8$ и $r = 3$ при $(q+1)_3 = 3$, либо $l = 10$ и $k \geqslant 3$, либо $l = 12$, $k \neq 6$ и $r \neq 3$, либо $l = 18$;

(5) $G = E_7(q)$ и либо $l \in \{14, 18\}$ и $k \neq 2$, либо $l \in \{7, 9\}$ и $k \geqslant 2$, либо $l = 8$ и $k = 7$, либо $l = 10$ и $k \geqslant 3, k \neq 4, 6$, либо $l = 12$ и $k \geqslant 4, k \neq 6$;

(6) $G = E_8(q)$ и либо $l \in \{7, 14\}$ и $k \geqslant 3$, либо $l = 9$ и $k \geqslant 4$, либо $l \in \{8, 10, 12\}$ и $k \geqslant 5, k \neq 6$, либо $l = 18$ и $k \neq 1, 2, 6$, либо $l = 20$ и $r \cdot k \neq 20$, либо $l \in \{15, 24, 30\}$;

(7) $G = {}^3D_4(q)$ и либо $l = 6$ и $k = 3$, либо $l = 12$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и для классических групп лиева типа, простые делители $r, s \in \pi(G)$, удовлетворяющие условиям предложения, смежны тогда и только тогда, когда rs делит порядок некоторого максимального тора группы G. Поэтому предложение 2.5 доказывается как предыдущие с использованием леммы 1.3 вместо леммы 1.2. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. *Пусть G — конечная простая группа Сузуки или группа Ри над полем характеристики p. Пусть числа r, s — нечётные простые и $r, s \in \pi(G) \setminus \{p\}$. Тогда r и s несмежны в том и только том случае, если выполняется одно из условий:*

(1) $G = {}^2B_2(2^{2n+1})$, *r делит $m_k(B,n)$, s делит $m_l(B,n)$ и $k \neq l$;*

(2) $G = {}^2G_2(3^{2n+1})$, *r делит $m_k(G,n)$, s делит $m_l(G,n)$ и $k \neq l$;*

(3) $G = {}^2F_4(2^{2n+1})$, *r делит $m_k(F,n)$, s делит $m_l(F,n)$, $k \neq l$ и если $\{k,l\} = \{1,3\}$, то $r \neq 3 \neq s$.*

Числа $m_i(B,n)$, $m_i(G,n)$ и $m_i(F,n)$ определены в лемме 1.5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично предыдущим. □

§ 3. Смежность с характеристикой

В этом параграфе исследуется, смежны ли простое число r и характеристика p основного поля конечной группы лиева типа.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Пусть $G = O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$ — конечная простая классическая группа лиева типа над полем характеристики p, $r \in \pi(G)$ и $r \neq p$. Тогда r и p несмежны в том и только том случае, если выполняется одно из следующих условий:*

(1) $G = A_{n-1}(q)$, *r нечётно и $e(r,q) > n-2$;*

(2) $G = {}^2A_{n-1}(q)$, *r нечётно и $\nu(e(r,q)) > n-2$ (функция $\nu(m)$ определена в предлож.* 2.2);

(3) $G = C_n(q)$, $\eta(e(r,q)) > n-1$ *(функция $\eta(m)$ определена в предлож.* 2.3);

(4) $G = B_n(q)$, $\eta(e(r,q)) > n-1$;

(5) $G = D_n^\varepsilon(q)$, $\eta(e(r,q)) > n-2$;

(6) $G = A_1(q)$, $r = 2$;

(7) $G = A_2^\varepsilon(q)$, $r = 3$ *и* $(q - \varepsilon 1)_3 = 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что 2 и p смежны во всех классических группах, кроме групп $A_1(q)$, и можно полагать, что r нечётно.

Вначале кратко изложим общую идею доказательства. Будем использовать обозначения из [13]. Для того, чтобы доказать, что r и p смежны, найдём связную редуктивную подгруппу R максимального ранга группы G такую, что $R = T(G_1 * G_2)$, где T — максимальный тор, G_1 и G_2 — нетривиальные группы лиева типа такие, что $r \in \pi(G_1)$. Тогда G_1 содержит элемент порядка r, который централизует G_2. Поскольку G_2 нетривиальна, она содержит элемент порядка p, и, следовательно, $G \geq R$ содержит элемент порядка rp.

Для проверки того, что r и p несмежны, рассматривается произвольный элемент g порядка r и его связный централизатор $G \cap C_{\overline{G}}(g)^0$. Напомним, что $C_{\overline{G}}(g)^0 = \overline{S} * \overline{L}$, где $\overline{S} = Z(C_{\overline{G}}(g)^0)$ — центральный тор, а $\overline{L}$ — полупростая часть. Ясно, что $g \in \overline{S} \cap G \leq \overline{S}_\sigma$, откуда r делит $|\overline{S}_\sigma|$. Это влечёт тривиальность $\overline{L}_\sigma$, а значит, $C_{\overline{G}}(g)^0$ не содержит унипотентных элементов. Каждый унипотентный элемент централизатора $C_{\overline{G}}(g)$ содержится в $C_{\overline{G}}(g)^0 \leq N_{\overline{G}}(\overline{T})^0 = \overline{T}$. Поэтому ни один из унипотентных элементов группы G не централизует g. Теперь рассмотрим все классические группы поочерёдно.

$A_1(q)$. Известно: если g — элемент порядка $r \neq p$, то $(|C_{A_1(q)}(g)|, p) = 1$ (см. [13, предлож. 7]). Поэтому r, p несмежны для каждого $r \in \pi(A_1(q)) \setminus \{p\}$.

$A_2(q)$. Используя [13, предлож. 7], получим, что только простые делители числа $\frac{q-1}{(3,q-1)}$ смежны с p, и предложение верно в этом случае.

$A_{n-1}(q)$ и $n \geqslant 4$. Тогда T — подгруппа Картана, $G_1 = A_{n-3}(q)$ и $G_2 = A_1(q)$. Существование такой подгруппы доказывается с использованием [13, предлож. 7]. Таким образом, каждое простое число r, удовлетворяющее условию $e(r, q) \leqslant n-2$, делит $|G_1|$, а значит, смежно с p.

Пусть теперь $e(r, q) = n-1$ и g — элемент порядка r. В силу (1) число $q^{n-1} - 1$ должно делить $|\overline{S}_\sigma| \cdot (q-1)$. Из [13, предлож. 7] следует, что $G \cap C_{\overline{G}}(g)^0$ — максимальный тор порядка $\frac{1}{(n,q-1)}(q^{n-1}-1)$. Значит, $|\overline{L}_\sigma| = 1$ и r, p несмежны. Если $e(r, q) = n$ и g имеет порядок r, то в силу (1) число $q^n - 1$ должно делить $|\overline{S}_\sigma| \cdot (q-1)$. Снова используя [13, предлож. 7], получаем, что $G \cap C_{\overline{G}}(g)^0$ — максимальный тор порядка $\frac{1}{(n,q-1)}\frac{q^n-1}{q-1}$. Поэтому $|\overline{L}_\sigma| = 1$ и каждое простое число r, удовлетворяющее условию $e(r, q) > n-2$, несмежно с p.

${}^2A_2(q)$. Используя [13, предлож. 8], получаем, что только простые делители числа $\frac{q+1}{(3,q+1)}$ смежны с p и предложение верно в этом случае.

${}^2A_{n-1}(q)$ и $n \geqslant 4$. Вновь T — подгруппа Картана, $G_1 = {}^2A_{n-3}(q)$ и $G_2 = A_1(q)$. Существование такой подгруппы доказывается с использованием [13, предлож. 8]. Таким образом, каждое простое число r, удовлетворяющее условию $\nu(e(r,q)) \leqslant n-2$, делит $|G_1|$, а значит, смежно с p. Пусть теперь $\nu(e(r,q)) = n-1$ и g — элемент порядка r. В силу (2) число $q^{n-1} - (-1)^{n-1}$ делит $|\overline{S}| \cdot (q+1)$. Из [13, предлож. 8] следует, что $G \cap C_{\overline{G}}(g)^0$ — максимальный тор порядка $\frac{1}{(n,q+1)}(q^{n-1} - (-1)^{n-1})$. Отсюда $|\overline{L}_\sigma| = 1$, а r, p несмежны. Если $\nu(e(r,q)) = n$ и g — элемент порядка r, то в силу (2) число $q^n - (-1)^n$ делит $|\overline{S}_\sigma| \cdot (q+1)$. Используя [13, предлож. 8], получаем, что $G \cap C_{\overline{G}}(g)^0$ — максимальный тор порядка $\frac{1}{(n,q+1)}\frac{q^n-(-1)^n}{q+1}$. Следовательно, $|\overline{L}_\sigma| = 1$ и каждое простое число r, удовлетворяющее условию $\nu(e(r,q)) > n-2$, несмежно с p.

$C_n(q)$. Выберем R так, чтобы T была подгруппой Картана, $G_1 = C_{n-1}(q)$, $G_2 = A_1(q)$. Такая подгруппа R существует в силу [13, предлож. 9 и 12]. Вновь каждое простое число r, удовлетворяющее условию $\eta(e(r,q)) \leqslant n-1$, делит $|G_1|$, а значит, смежно с p. Если $\eta(e(r,q)) = n$ и g — элемент порядка r, то из (4) следует, что либо $q^n - 1$, либо $q^n + 1$ делит $|\overline{S}_\sigma|$. Из [13, предлож. 9 и 12] получаем, что $G \cap C_{\overline{G}}(g)^0$ — максимальный тор порядка $\frac{1}{(2,q-1)}(q^n \pm 1)$, откуда $|\overline{L}_\sigma| = 1$, а r, p несмежны.

$B_n(q)$. Поскольку $B_2(q) \simeq C_2(q)$ и $B_n(2^t) \simeq C_n(2^t)$, можно полагать, что p нечётно и $n \geqslant 3$. Можно выбрать в качестве T подгруппу Картана, $G_1 = B_{n-2}(q)$ и $G_2 = D_2(q)$. Такая подгруппа R существует в силу [13, предлож. 11]. Поскольку каждое простое число r, удовлетворяющее условию $\eta(e(r,q)) \leqslant n-2$, делит порядок G_1, получаем, что r и p несмежны, если $\eta(e(r,q)) \leqslant n-2$. Если $\eta(e(r,q)) = n-1$, то вновь по [13, предлож. 11], существует редуктивная подгруппа R такая, что $|\overline{S}_\sigma| = q^{\eta(e(r,q))} + (-1)^{e(r,q)}$ и $\overline{L}_\sigma = B_1(q) \simeq A_1(q)$. Значит, r, p смежны в G. Предположим теперь, что $\eta(e(r,q)) = n$ и g — элемент порядка r в G. Порядок $|\overline{S}_\sigma|$ приведён в [13, предлож. 11], он равен $\prod\limits_i (q^{n_i} \pm 1)$, где $\sum\limits_i n_i \leqslant n$. Используя (4), получаем, что $\eta(e(r,q)) = n$ делит n_i для некоторого i. Значит, либо $q^n - 1$, либо $q^n + 1$

делит $|S_\sigma|$. В силу [13, предлож. 11] имеем $|\overline{L}_\sigma| = 1$, откуда r, p несмежны.

$D_n^\varepsilon(q)$. Пусть T — подгруппа Картана, $G_1 = D_{n-2}^\varepsilon(q)$, $G_2 = A_1(q)$. Существование такой подгруппы R доказывается с использованием [13, предлож. 10]. Поэтому r, p смежны для всех r, удовлетворяющих условию $\eta(e(r,q)) \leqslant n-2$, исключая случай, когда $\eta(e(r,q)) = n-2$ и r делит $q^{n-2}+\varepsilon 1$. В последнем случае существует редуктивная подгруппа R такая, что $|\overline{S}_\sigma| = q^{n-2}+\varepsilon 1$ и $\overline{L}_\sigma \simeq D_2^\varepsilon(q)$. Значит, и в этом исключительном случае r, p также смежны. Если теперь $\eta(e(r,q)) \geqslant n-1$ и g — элемент группы G порядка r, то снова $q^{\eta(e(r,q))} + (-1)^{e(r,q)}$ делит $|\overline{S}_\sigma|$, и из [13, предлож. 10] вытекает, что $\overline{L}_\sigma$ тривиальна. Следовательно, r и p несмежны в этом случае. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Пусть G — конечная простая исключительная группа лиева типа над полем характеристики p. Пусть $r \in \pi(G)$, $k = e(r,q)$ и $r \neq p$. Тогда r и p несмежны в том и только том случае, если выполняется одно из условий*:

(1) $G = G_2(q),\ k \in \{3,6\}$; (2) $G = F_4(q),\ k \in \{8,12\}$;
(3) $G = E_6(q),\ k \in \{8,9,12\}$; (4) $G = {}^2E_6(q),\ k \in \{8,12,18\}$;
(5) $G = E_7(q),\ k \in \{7,9,14,18\}$; (6) $G = E_8(q),\ k \in \{15,20,24,30\}$;
(7) $G = {}^3D_4(q),\ k = 12$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое получается с использованием информации о централизаторах полупростых элементов из [15, 17]. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Пусть G — конечная простая группа Сузуки или Ри над полем характеристики p. Пусть $r \in \pi(G) \setminus \{p\}$. Тогда r и p несмежны в том и только том случае, если выполняется одно из условий*:

(1) $G = {}^2B_2(2^{2n+1})$, *r делит $m_k(B,n)$*;

(2) $G = {}^2G_2(3^{2n+1})$, *r делит $m_k(G,n)$ и $r \neq 2$*;

(3) $G = {}^2F_4(2^{2n+1})$, *r делит $m_k(F,n)$, $r \neq 3$ и $k > 2$*.

Числа $m_i(B,n)$, $m_i(G,n)$ и $m_i(F,n)$ определены в лемме 1.5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно воспользоваться информацией о централизаторах полупростых элементов из [15]. $\square$

§ 4. Смежность с числом 2

В этом параграфе рассматривается вопрос о том, смежны ли число 2 и нечётное простое число r, если оба они не равны характеристике p основного поля. Начнем с групп $A_n^\varepsilon(q)$. Напомним, что в § 2 для них не рассматривался критерий смежности для простых делителей числа $q-\varepsilon 1$. Причина в том, что его естественнее рассмотреть вместе с критерием для 2, что и делается в двух следующих предложениях.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Пусть $G = A_{n-1}(q)$ — конечная простая группа лиева типа. Пусть r — простой делитель числа $q-1$ и s — нечётное простое число, отличное от характеристики. Положим $k = e(s,q)$. Тогда s и r несмежны в том и только том случае, если выполняется одно из следующих условий*:

(1) $k = n$, $n_r \leqslant (q-1)_r$, *а если* $n_r = (q-1)_r$, *то и* $2 < (q-1)_r$;

(2) $k = n-1$ *и* $(q-1)_r \leqslant n_r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что верно следующее утверждение:

$$\begin{aligned} &\left(\tfrac{q^n-1}{q-1}\right)_r = n_r, \quad \text{если } (q-1)_r \geqslant n_r \text{ и } (q-1)_r > 2,\\ &\left(\tfrac{q^n-1}{q-1}\right)_2 > 2, \qquad \text{если } (q-1)_2 = n_2 = 2. \end{aligned} \tag{5}$$

Предположим, что r нечётно. Тогда $n = r^k \cdot l$, где $(l,r) = 1$ и $q = r^k \cdot m + 1$. Имеем $q^n - 1 = (q^{r^k} - 1)\cdot(q^{n-r^k} + q^{n-2r^k} + \ldots + q^{r^k} + 1)$. Второй сомножитель является суммой l чисел вида q^i, и $q^i \equiv 1 (\operatorname{mod} r)$ для всех i. Поскольку $(l,r) = 1$, второй сомножитель взаимно прост с r. Таким образом, $\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)_r = \left(\frac{q^{r^k}-1}{q-1}\right)_r$. Вспоминая, что $q = r^k\cdot m + 1$, получаем

$$\frac{q^{r^k}-1}{q-1} = (r^k\cdot m)^{r^k-1} + r^k\cdot(r^k\cdot m)^{r^k-2} + \ldots + \frac{1}{2}r^k(r^k-1)(r^k\cdot m) + r^k.$$

Поскольку r^{k+1} делит все слагаемые, за исключением последнего, и r^{k+1} не делит r^k, то r^k делит $\left(\frac{q^{r^k}-1}{q-1}\right)_r$, а r^{k+1} не делит $\left(\frac{q^{r^k}-1}{q-1}\right)_r$. Следовательно, в этом случае $\left(\frac{q^{r^k}-1}{q-1}\right)_r = n_r$.

Пусть теперь $r = 2$, $n = 2^k\cdot l$, где l нечётно, и $q = 2^k\cdot m + 1$. Тогда

$$\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)_2 = \left(\frac{q^l-1}{q-1}\right)_2 \cdot (q^l+1)\cdot(q^{2l}+1)\cdot\ldots\cdot(q^{2^{k-1}l}+1).$$

Поскольку l нечётно, выполняется $\left(\frac{q^l-1}{q-1}\right)_2 = 1$. Если $(q-1)_2 > 2$, то $(q^i+1)_2 = 2$ для всех i. Следовательно,

$$\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)_2 = (q^l+1)_2 \cdot (q^{2l}+1)_2 \cdot \ldots \cdot (q^{2^{k-1}l}+1)_2 = 2^k = n_2.$$

Случай $(q-1)_2 = n_2 = 2$ очевиден.

Предположим, что $k \leqslant n-2$. Из леммы 1.2 следует существование максимального тора T группы G порядка $\frac{1}{(n,q-1)}(q^k-1)(q-1)^{n-k-1}$. Тор T — абелева подгруппа группы G, и оба числа r, s делят $|T|$. Следовательно, T содержит элемент порядка rs.

Предположим, что $k = n$. В силу (1) и леммы 1.2 каждый элемент порядка s содержится в максимальном торе T порядка $\frac{1}{(n,q-1)}\frac{q^n-1}{q-1}$. В силу (5) число r не делит $|T|$ тогда и только тогда, когда имеет место условие (1) предложения.

Предположим, что $k = n-1$. В силу (1) и леммы 1.2 каждый элемент порядка s содержится в максимальном торе T порядка $\frac{1}{(n,q-1)}(q^{n-1}-1)$. Имеем $(q^{n-1}-1) = (q-1)(q^{n-2}+q^{n-3}+\ldots+q+1)$ и $(q^{n-2}+q^{n-3}+\ldots+q+1)_r = 1$. Следовательно, r не делит $|T|$ тогда и только тогда, когда $(q-1)_r \leqslant n_r$, что соответствует условию (2) предложения. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Пусть $G = {}^2A_{n-1}(q)$ — конечная простая группа лиева типа. Пусть r — простой делитель числа $q+1$, s — нечётное простое число, отличное от характеристики. Положим $k = e(s,q)$. Тогда s и r несмежны в том и только том случае, если выполняется одно из следующих условий*:

(1) $\nu(k) = n$, $n_r \leqslant (q+1)_r$, *а если* $n_r = (q+1)_r$, *то и* $2 < (q+1)_r$;

(2) $\nu(k) = n-1$ и $(q+1)_r \leqslant n_r$.

Функция $\nu(m)$ определена в предложении 2.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в предыдущем предложении, покажем, что

$$\begin{aligned} &\left(\tfrac{q^n-(-1)^n}{q+1}\right)_r = n_r, \quad \text{если } (q+1)_r \geqslant n_r \text{ и } (q+1)_r > 2, \\ &\left(\tfrac{q^n-(-1)^n}{q+1}\right)_2 > 2, \quad \text{если } (q+1)_2 = n_2 = 2. \end{aligned} \tag{6}$$

Пусть r нечётно. Тогда $n = r^k \cdot l$, где $(l,r) = 1$, и $q = r^k \cdot m - 1$. Имеем

$q^n-(-1)^n=(q^{r^k}+1)\cdot(q^{n-r^k}-q^{n-2r^k}+\ldots+(-1)^{l-1}q^{r^k}+(-1)^l)$. Второй сомножитель является суммой l чисел вида $(-1)^t q^{n-(t+1)r^k}$ и $q^{n-(t+1)r^k}\equiv$ $\equiv(-1)^{n+t-1}(\operatorname{mod} r)$ для всех t. Значит, второй множитель сравним с $(-1)^{n-1}l$ по модулю r. Поскольку $(l,r)=1$, второй сомножитель взаимно прост с r. Таким образом, $\left(\frac{q^n-(-1)^n}{q+1}\right)_r=\left(\frac{q^{r^k}+1}{q+1}\right)_r$. В то же время $q=r^k\cdot m-1$, откуда

$$\frac{q^{r^k}+1}{q+1}=(r^k\cdot m)^{r^k-1}-r^k\cdot(r^k\cdot m)^{r^k-2}+\ldots$$
$$+(-1)^{k-2}\tfrac{1}{2}r^k(r^k-1)(r^k\cdot m)+(-1)^{k-1}r^k.$$

Поскольку r^{k+1} делит все слагаемые, исключая последнее, и r^{k+1} не делит r^k, получаем, что r^k делит $\left(\frac{q^{r^k}+1}{q+1}\right)_r$, а r^{k+1} не делит $\left(\frac{q^{r^k}+1}{q+1}\right)_r$. Следовательно, в этом случае $\left(\frac{q^{r^k}+1}{q+1}\right)_r=n_r$.

Предположим теперь, что $r=2$, $n=2^k\cdot l$, где l нечётно, и $q=2^k\cdot m-1$. Тогда

$$\left(\frac{q^n-(-1)^n}{q+1}\right)_2=\left(\frac{q^l+1}{q+1}\right)_2\cdot(q^l-1)\cdot(q^{2l}+1)\cdot\ldots\cdot(q^{2^{k-1}l}+1).$$

Поскольку l нечётно, выполняется $\left(\frac{q^l+1}{q+1}\right)_2=1$. Если $(q+1)_2>2$, то $(q^{2i}+1)_2=2$ для всех $i\geqslant1$ и $(q^l-1)_2=2$. Следовательно,

$$\left(\frac{q^n-(-1)^n}{q+1}\right)_2=(q^l-1)_2\cdot(q^{2l}+1)_2\cdot\ldots\cdot(q^{2^{k-1}l}+1)_2=2^k=n_2.$$

Случай $(q+1)_2=n_2=2$ очевиден.

Предположим, что $\nu(k)\leqslant n-2$. Из леммы 1.2 вытекает существование максимального тора T группы G порядка $\frac{1}{(n,q+1)}(q^{\eta(k)}-(-1)^{\eta(k)})(q+$ $+1)^{n-k-1}$. Тор T — абелева подгруппа группы G, а числа r,s делят $|T|$. Следовательно, T содержит элемент порядка rs.

Предположим, что $\nu(k)=n$. В силу (2) и леммы 1.2 каждый элемент порядка s содержится в максимальном торе T порядка $\frac{1}{(n,q+1)}\frac{q^n-(-1)^n}{q+1}$. В силу (6) число r не делит $|T|$ тогда и только тогда, когда выполняется условие (1) предложения.

Предположим теперь, что $\nu(k)=n-1$. В силу (2) и леммы 1.2 каждый элемент порядка s содержится в максимальном торе T порядка $\frac{1}{(n,q+1)}(q^{n-1}-(-1)^{n-1})$. Имеем $(q^{n-1}-(-1)^{n-1})=(q+1)(q^{n-2}-q^{n-3}+$

$+\ldots+(-1)^{n-3}q+(-1)^{n-2})$ и $(q^{n-2}-q^{n-3}+\ldots+(-1)^{n-3}q+(-1)^{n-2})_r=1$. Следовательно, r не делит $|T|$ тогда и только тогда, когда $(q+1)_r\leqslant n_r$, что соответствует условию (2) предложения. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *Пусть G, равная $B_n(q)$ или $C_n(q)$, — конечная простая группа лиева типа над полем нечётной характеристики p. Пусть r — нечётный простой делитель числа $|G|$, $r\neq p$ и $k=e(r,q)$. Тогда числа 2 и r несмежны в том и только том случае, если $\eta(k)=n$ и выполняется одно из следующих условий*:

(1) *n нечётно и* $k=(3-e(2,q))n$;

(2) *n чётно и* $k=2n$.

Функция $\eta(m)$ определена в предложении 2.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\eta(k)\leqslant n-1$, то по лемме 1.2 найдётся максимальный тор T порядка $\frac{1}{2}(q^{\eta(k)}+(-1)^k)(q-1)^{n-\eta(k)}$. Тор T — абелева подгруппа группы G, а числа 2, r делят $|T|$. Значит, T содержит элемент порядка $2r$ и числа $2,r$ смежны.

Таким образом, можно полагать, что $\eta(k)=n$. В силу (4) и леммы 1.2 каждый элемент g порядка r содержится в максимальном торе T порядка $\frac{1}{2}(q^n+(-1)^k)$. Следовательно, 2 и r несмежны тогда и только тогда, когда 2 не делит $|T|$. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. *Пусть $G=D_n^{\varepsilon}(q)$ — конечная простая группа лиева типа над полем нечётной характеристики p. Пусть r — нечётный простой делитель числа $|G|$, $r\neq p$ и $k=e(r,q)$. Тогда числа 2 и r несмежны в том и только том случае, если выполняется одно из следующих условий*:

(1) $\eta(k)=n$ *и* $(4,q^n-\varepsilon 1)=(q^n-\varepsilon 1)_2$;

(2) $\eta(k)=k=n-1$, *n чётно*, $\varepsilon=+$, *и* $e(2,q)=2$;

(3) $\eta(k)=\frac{k}{2}=n-1$, $\varepsilon=+$ *и* $e(2,q)=1$;

(4) $\eta(k)=\frac{k}{2}=n-1$, *n нечётно*, $\varepsilon=-$, *и* $e(2,q)=2$.

Функция $\eta(m)$ определена в предложении 2.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим: если $\eta(k)\leqslant n-2$, то по лемме 1.2 найдётся максимальный тор T порядка $\frac{1}{(4,q^n-\varepsilon 1)}(q^{\eta(k)}+(-1)^k)(q+$

$+(-\varepsilon 1)^k)(q-1)^{n-\eta(k)-1}$. Числа $2, r$ делят $|T|$, откуда $2, r$ смежны.

Теперь рассмотрим случай $G = {}^2D_n(q)$ (т. е. $\varepsilon = -$). Если $\eta(k) = n-1$, то в силу (4) и леммы 1.2 каждый элемент порядка r содержится в максимальном торе T порядка $\frac{1}{(4,q^n+1)}(q^{n-1}+(-1)^k)(q-(-1)^k)$. Число 2 не делит $|T|$ тогда и только тогда, когда выполняется условие (4) предложения. Если $\eta(k) = n$, то в силу (4) и леммы 1.2 каждый элемент порядка r содержится в максимальном торе T порядка $\frac{1}{(4,q^n+1)}(q^n+1)$ (в частности, $k = 2\eta(k)$). Число 2 не делит $|T|$ тогда и только тогда, когда $(4, q^n+1) = (q^n+1)_2$, и предложение для скрученных групп доказано.

Предположим, что $G = D_n(q)$. Если $\eta(k) = n-1$, то в силу (4) и леммы 1.2 каждый элемент порядка r содержится в максимальном торе T порядка $\frac{1}{(4,q^n-1)}(q^{n-1}+(-1)^k)(q+(-1)^k)$ и $k = n-1$, если k нечётно. Число 2 не делит $|T|$ тогда и только тогда, когда выполняются условия (2) или (3) предложения. Если $\eta(k) = n$, то n нечётно и в силу (4) и леммы 1.2 каждый элемент порядка r содержится в максимальном торе T порядка $\frac{1}{(4,q^n-1)}(q^n-1)$. Ясно, что 2 не делит $|T|$ в том и только том случае, если $(4, q^n-1) = (q^n-1)_2$. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. *Пусть G — конечная простая исключительная группа лиева типа над полем нечётной характеристики p. Пусть r — нечётный простой делитель числа $|G|$, $r \neq p$ и $k = e(r,q)$. Тогда числа 2 и r несмежны в том и только том случае, если выполняется одно из следующих условий:*

(1) $G = G_2(q)$, $k \in \{3, 6\}$;

(2) $G = F_4(q)$, $k = 12$;

(3) $G = E_6(q)$, $k \in \{9, 12\}$;

(4) $G = {}^2E_6(q)$, $k \in \{12, 18\}$;

(5) $G = E_7(q)$, *и либо* $k \in \{7, 9\}$ *и* $e(2,q) = 2$, *либо* $k \in \{14, 18\}$ *и* $e(2,q) = 1$;

(6) $G = E_8(q)$, $k \in \{15, 20, 24, 30\}$;

(7) $G = {}^3D_4(q)$, $k = 12$;

(8) $G = {}^2G_2(3^{2n+1})$, *и r делит $m_3(G,n)$ или $m_4(G,n)$, где $m_i(G,n)$ определены в лемме* 1.5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое прямо следует из лемм 1.3 и 1.5. □

§ 5. О связи между свойствами графа простых чисел $GK(G)$ и структурой группы G

Пусть $GK(G)$ — граф простых чисел конечной группы G. Очевидно, что спектр $\omega(G)$ однозначно определяет структуру $GK(G)$. Обозначим через $s(G)$ число компонент связности графа $GK(G)$, через $\pi_i(G)$, $i = 1, \ldots, s(G)$, — его i-ю связную компоненту. Если G имеет чётный порядок, то положим $2 \in \pi_1(G)$. Обозначим через $\omega_i(G)$ множество чисел $n \in \omega(G)$ таких, что каждый простой делитель числа n принадлежит $\pi_i(G)$.

ТЕОРЕМА 5.1 (Грюнберг–Кегель, см. [1]). *Если G — конечная группа с несвязным графом $GK(G)$, то выполняется одно из следующих условий*:

(a) $s(G) = 2$, *G — группа Фробениуса*;

(b) $s(G) = 2$, *G — двойная группа Фробениуса* (*т. е.* $G = ABC$, *где* A, AB — *нормальные подгруппы группы* G; AB, BC — *группы Фробениуса с ядрами* A, B *и дополнениями* B, C *соответственно*);

(c) *существует неабелева простая группа S такая, что* $S \leq \overline{G} = G/K \leq \mathrm{Aut}(S)$, *где K — максимальная нормальная разрешимая подгруппа группы G, а кроме того, K и $\overline{G}/S$ являются $\pi_1(G)$-подгруппами, граф $GK(S)$ несвязен, $s(S) \geqslant s(G)$, и для каждого i, $2 \leqslant i \leqslant s(G)$, найдётся j, $2 \leqslant j \leqslant s(S)$, такое, что $\omega_i(G) = \omega_j(S)$.*

Вместе с классификацией конечных простых групп с несвязным графом простых чисел [1, 2], теорема Грюнберга–Кегеля имела целый ряд важных следствий (см., напр., [1, теор. 3–6; 2, теор. 2, 3]). В последние годы эта теорема используется для доказательства распознаваемости конечных групп по спектру (подробнее см. [3, 4]).

Доказательство теоремы Грюнберга–Кегеля существенно использует тот факт, что в группе G (если её порядок чётен) найдётся элемент нечётного порядка, несвязанный в $GK(G)$ с простым числом 2. Оказывается, что требование несвязности графа простых чисел $GK(G)$ в большинстве случаев можно успешно заменить более слабым требованием несмежности числа 2 с хотя бы одним нечётным простым числом.

Обозначим через $t(G)$ наибольшее число простых делителей порядка группы G, попарно несмежных в $GK(G)$. Другими словами, $t(G)$ — наибольшее число вершин в независимых множествах графа $GK(G)$ (множество вершин графа называется *независимым*, если его элементы попарно несмежны). В теории графов это число принято называть *числом вершинной независимости* или *неплотностью* графа. По аналогии обозначим через $t(r, G)$ наибольшее число вершин в независимых множествах графа $GK(G)$, содержащих простое число r. Назовём это число r*-неплотностью*.

ТЕОРЕМА 5.2 [4]**.** *Пусть G — конечная группа, удовлетворяющая двум условиям*:

(а) *существует три попарно несмежных в $GK(G)$ простых числа из $\pi(G)$, т. е. $t(G) \geqslant 3$*;

(б) *существует несмежное в $GK(G)$ с числом 2 нечётное простое число из $\pi(G)$, т. е. $t(2, G) \geqslant 2$.*

Тогда существует конечная неабелева простая группа S такая, что $S \leq \overline{G} = G/K \leq \mathrm{Aut}(S)$ для максимальной нормальной разрешимой подгруппы K группы G. Кроме того, $t(S) \geqslant t(G) - 1$ и выполняется одно из следующих условий:

(1) *$S \simeq \mathrm{Alt}_7$ или $A_1(q)$ для некоторого нечётного числа q и $t(S) = t(2, S) = 3$*;

(2) *для каждого простого числа $r \in \pi(G)$, несмежного с 2 в $GK(G)$, силовская r-подгруппа группы G изоморфна силовской r-подгруппе группы S, в частности, $t(2, S) \geqslant t(2, G)$.*

Заметим, что условие (а) теоремы 5.2 влечёт неразрешимость группы G, а из теоремы Фейта–Томпсона следует, что G имеет чётный порядок. Более того, условие (а) можно заменить на более слабое условие неразрешимости группы G (см. [4, предлож. 2, 3]). Из [18, теор. 2] и теоремы 5.2 следует

ТЕОРЕМА 5.3 [4, предлож. 4]**.** *Пусть L — конечная простая группа с $t(2,L) \geqslant 2$, неизоморфная группам $A_2(3)$, ${}^2A_3(3)$, $C_2(3)$ и Alt_{10}. Пусть G — конечная группа, удовлетворяющая условию $\omega(G) = \omega(L)$. Тогда для группы G справедливо заключение теоремы 5.2. В частности, G имеет единственный неабелев композиционный фактор.*

§ 6. Неплотность

В этом разделе на основе результатов §§ 1–4 вычисляются значения неплотности и 2-неплотности для всех конечных неабелевых простых групп. Кроме того, для каждой конечной неабелевой простой группы лиева типа над полем характеристики p определяется p-неплотность $t(p,G)$.

Для конечной группы G обозначим через $\rho(G)$ (через $\rho(r,G)$) некоторое независимое множество в $GK(G)$ (содержащее r) с наибольшим числом вершин. Таким образом, $|\rho(G)| = t(G)$ и $|\rho(r,G)| = t(r,G)$. Для данной конечной неабелевой простой группы укажем некоторые множества $\rho(G)$ и $\rho(2,G)$ (очевидно, они могут быть указаны неоднозначно) и, следовательно, определим $t(G)$ и $t(2,G)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Пусть G — спорадическая группа. Тогда $\rho(G)$, $t(G)$, $\rho(2,G)$ и $t(2,G)$ перечислены в табл. 2. Кроме того, множество $\rho(2,G)$ определено однозначно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится с использованием [5 или 6]. □

Обратимся теперь к знакопеременным группам.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. *Пусть $G = \mathrm{Alt}_n$ — знакопеременная группа степени $n \geqslant 5$, s'_n — наибольшее простое число, не превосходящее $n/2$, s''_n — наименьшее простое число, большее $n/2$. Обозначим $\tau(n) = \{s \mid s$ — простое число$, n/2 < s \leqslant n\}$, $\tau(2,n) = \{s \mid s$ — простое число$, n-3 \leqslant \leqslant s \leqslant n\}$. Тогда $\rho(G)$, $t(G)$, $\rho(2,G)$ и $t(2,G)$ перечислены в табл. 3. Кроме того, множество $\rho(2,G)$ определено однозначно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое непосредственно следует из предложения 1.1. □

Рассмотрим группы лиева типа. Поскольку задача в этом случае существенно сложнее, разделим процесс её решения на несколько естественных этапов. Основными техническими средствами служат леммы 1.4, 1.5 и результаты из §§ 2–4. Напомним, что для данного натурального числа q через r_n обозначается некоторый примитивный простой делитель числа q^n-1 (если он существует). Заметим, что такой делитель r_{2m} числа $q^{2m}-1$ делит q^m+1 и не делит q^k+1 для каждого натурального числа $k<m$. Полезно также напомнить, что для простых чисел r,s равенство $r^n=s^k+1$ возможно лишь в следующих случаях: либо $r^n=9$, $s^k=8$, либо $r=2^k+1$ — простое число Ферма и $n=1$, либо $s=2^n-1$ — простое число Мерсенна и $k=1$ (как и лемма 1.4, этот факт — следствие теоремы Жигмонди [16]).

Поскольку рассуждения в ситуации, когда 2 является характеристикой поля определения, подходят для любой характеристики p, начнём с определения $t(p,G)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. *Пусть G — конечная простая группа лиева типа над полем характеристики p и порядка q. Тогда $\rho(p,G)$ и $t(p,G)$ перечислены в табл. 4 для классических групп и табл. 5 для исключительных групп.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $G=A^{\varepsilon}_{n-1}(q)$. Пусть $G=A_1(q)$. Поскольку группы $A_1(2)$ и $A_1(3)$ не просты, можно полагать, что $q>3$. По лемме 1.4 существуют примитивные простые делители r_1 и r_2 чисел $q-1$ и $q+1$, несмежные между собой в $GK(G)$. В силу предложения 3.1 они несмежны с p. Значит, $\rho(p,G)=\{p,r_1,r_2\}$.

Предположим, что $n>2$. Для того, чтобы рассматривать группы $A_{n-1}(q)$ и ${}^2A_{n-1}(q)$ одновременно, определим новую функцию:

$$\nu_\varepsilon(m)=\begin{cases} m, & \text{если либо } \varepsilon=+, \text{ либо } \varepsilon=- \text{ и } m\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4),\\ \frac{m}{2}, & \text{если } \varepsilon=- \text{ и } m\equiv 2(\mathrm{mod}\, 4),\\ 2m & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Очевидно, что $\nu_\varepsilon(m)$ — тождественное отображение, если $\varepsilon=+$, и $\nu_\varepsilon(m)=$ $=\nu(m)$, если $\varepsilon=-$. Несложно проверить, что ν_ε является биекцией на $\mathbb{N}$, т. е. функция ν_ε^{-1} корректно определена.

Пусть $n = 3$ и $G = A_2^\varepsilon(q)$. Из предложения 3.1 следует, что $r_{\nu_\varepsilon^{-1}(2)}$ и $r_{\nu_\varepsilon^{-1}(3)}$ несмежны с числом p. Более того, если $(q-\varepsilon 1)_3 = 3$, то в силу предложения 3.1 число 3 несмежно с p, а в силу предложений 4.1, 4.2 в этом случае 3 несмежно с $r_{\nu_\varepsilon^{-1}(2)}$ и $r_{\nu_\varepsilon^{-1}(3)}$. По лемме 1.4, $r_{\nu_\varepsilon^{-1}(3)}$ существует для всех q, исключая случай, когда $\varepsilon = -$ и $q = 2$. Группа ${}^2A_2(2)$ не проста и поэтому не рассматривается. Следовательно, в данном случае $r_{\nu_\varepsilon^{-1}(3)}$ существует для всех простых групп. Если существует нечётный примитивный делитель $r_{\nu_{\varepsilon^{-1}(2)}}$, он не связан с характеристикой и выполняется одна из первых двух возможностей среди четырёх, приведённых ниже. Если единственный примитивный делитель $r_{\nu_{\varepsilon^{-1}(2)}}$ равен 2, то $q+\varepsilon 1$ — это степень числа 2, т. е. простое число Мерсенна в случае $\varepsilon = +$ и простое число Ферма или число 9 в случае $\varepsilon = -$. По предложению 3.1 число 2 смежно с характеристикой, поэтому выполняется одна из последних двух возможностей среди четырех, приведённых ниже. Таким образом, имеем

$$\rho(p,G) = \begin{cases} \{p, 3, r_{\nu_\varepsilon^{-1}(2)}, r_{\nu_\varepsilon^{-1}(3)}\}, & \text{если } (q-\varepsilon 1)_3 = 3 \text{ и } q+\varepsilon \neq 2^k, \\ \{p, r_{\nu_\varepsilon^{-1}(2)}, r_{\nu_\varepsilon^{-1}(3)}\}, & \text{если } (q-\varepsilon 1)_3 \neq 3 \text{ и } q+\varepsilon \neq 2^k, \\ \{p, 3, r_{\nu_\varepsilon^{-1}(3)}\}, & \text{если } (q-\varepsilon 1)_3 = 3 \text{ и } q+\varepsilon = 2^k, \\ \{p, r_{\nu_\varepsilon^{-1}(3)}\}, & \text{если } (q-\varepsilon 1)_3 \neq 3 \text{ и } q+\varepsilon = 2^k. \end{cases}$$

Заметим, что мы избегаем использования функций $e(r,q)$ и ν_ε в таблицах из § 8.

Пусть $G = A_4(2), A_5(2)$ или ${}^2A_3(2)$. Поскольку число 2^6-1 не имеет примитивных простых делителей, то в силу предложения 3.1 выполняется $\rho(2, A_5(2)) = \{2, 31\}$, $\rho(2, A_6(2)) = \{2, 127\}$ и $\rho(2, {}^2A_3(2)) = \{2, 5\}$.

Во всех остальных случаях по лемме 1.4 найдутся примитивные простые делители $r_{\nu_\varepsilon^{-1}(n-1)}$ и $r_{\nu_\varepsilon^{-1}(n)}$. В силу леммы 1.2 имеем $r_{\nu_\varepsilon^{-1}(n-1)}$, $r_{\nu_\varepsilon^{-1}(n)} \in \pi(G)$. По предложениям 2.1 и 2.2 эти делители несмежны в $GK(G)$. В силу предложения 3.1 для группы $G = A_{n-1}^\varepsilon(q)$ выполняется $\rho(p,G) = \{p, r_{\nu_\varepsilon^{-1}(n-1)}, r_{\nu_\varepsilon^{-1}(n)}\}$.

(2) $G = C_n(q)$ или $B_n(q)$. Из предложений 2.3, 3.1 и 4.3 следует, что графы простых чисел групп $C_n(q)$ и $B_n(q)$ совпадают. Рассмотрим эти

группы одновременно и для краткости будем использовать символ $C_n(q)$ в обоих случаях.

Пусть $G = C_3(2)$. Поскольку не существует простых r, удовлетворяющих условию $e(r, 2) = 6$, только число 7, как примитивный простой делитель числа $2^3 - 1$, несмежно с 2.

Пусть $G = C_n(q)$, $n \geqslant 2$ и $(n, q) \neq (3, 2)$. Если n чётно, то по предложению 3.1 только примитивные простые делители числа $q^n + 1$ несмежны с p. Таким образом, в данном случае $\rho(G) = \{p, r_{2n}\}$. Если n нечётно, предложения 2.3 и 3.1 показывают, что $\rho(G) = \{p, r_n, r_{2n}\}$.

(3) $G = D_n^{\varepsilon}(q)$. С учётом хорошо известных изоморфизмов между группами малых лиевых рангов можно принять, что $n \geqslant 4$. Пусть $n = 4$ и $q = 2$. Поскольку $2^6 - 1$ не имеет примитивных простых делителей, только число 7, как примитивный простой делитель числа $2^3 - 1$, несмежно с 2 в случае $G = D_4(2)$, и лишь 7 и 17, как примитивные делители чисел $2^3 - 1$ и $2^8 - 1$, несмежны с 2 в случае $G = {}^2D_4(2)$. Все остальные случаи можно легко рассмотреть в прямом соответствии с предложениями 2.4 и 3.1. Результаты этого описания можно увидеть в табл. 4.

(4) Результат для исключительных групп, отличных от групп Сузуки и Ри, может быть получен с использованием предложений 2.5, 3.2 и леммы 1.4.

(5) G — конечная группа Сузуки или Ри. Пусть $G = {}^2B_2(2^{2m+1})$, s_i — простой делитель числа $m_i(B, n)$, где $i = 1, 2, 3$ (см. лемму 1.5). В силу предложения 2.6 простые числа s_i и s_j смежны тогда и только тогда, когда $i = j$. С другой стороны, каждый s_i, где $i = 1, 2, 3$, несмежен с $p = 2$. Таким образом, $\rho(p, G) = \{p, s_1, s_2, s_3\}$ и $t(p, G) = 4$ в этом случае. Аналогичные рассуждения можно применить к группам Ри и простым делителям чисел $m_i(G, n)$ и $m_i(F, n)$. $\square$

В общем случае примитивный простой делитель r_m числа $q^m - 1$ может быть выбран несколькими способами. Таким образом, для конечной простой группы G лиева типа множество $\rho(p, G)$ определяется неоднозначно. Однако, оказывается, что значения $e(r, q)$ для всех примитивных простых делителей r из $\rho(p, G)$ являются инвариантами для данной группы

G лиева типа.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4. *Пусть G — конечная простая группа лиева типа над полем характеристики p и порядка q. Предположим, что G неизоморфна группам ${}^2B_2(q)$, ${}^2G_2(q)$, ${}^2F_4(2)'$ и ${}^2F_4(q)$. Пусть $\rho(p,G) = \{p, s_1, s_2, \dots, s_m\}$ — независимое множество в $GK(G)$, содержащее p, с наибольшим числом вершин и $k_i = e(s_i, q)$. Тогда множество $\{k_1, \dots, k_m\}$ определено однозначно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое следует из результатов §§ 2–4. □

Если заменить примитивные простые делители на делители чисел, определённых в лемме 1.5, то получится аналогичное утверждение для групп Сузуки и Ри.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.5. *Пусть G — конечная простая группа Сузуки или группа Ри над полем характеристики p, $\rho(p,G) = \{p, s_1, \dots, s_k\}$.*

(1) *Если $G = {}^2B_2(2^{2n+1})$, то с точностью до перенумерации s_i делят $m_i(B,n)$. В частности, $k = 3$.*

(2) *Если $G = {}^2G_2(3^{2n+1})$, то все s_i нечётны и с точностью до перенумерации s_i делят $m_i(G,n)$. В частности, $k = 4$.*

(3) *Если $G = {}^2F_4(2^{2n+1})$, то с точностью до перенумерации s_i делят $m_{i+2}(F,n)$ и $s_1 \neq 3$. В частности, $k = 3$.*

Числа $m_i(B,n)$, $m_i(G,n)$ и $m_i(F,n)$ определены в лемме 1.5.

Определим $t(2,G)$. Очевидно, что для группы лиева типа над полем чётной характеристики p-неплотность и 2-неплотность совпадают. Таким образом, можно полагать, что G определена над полем нечётной характеристики.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.6. *Пусть G — конечная простая группа лиева типа над полем нечётной характеристики p и порядка q. Тогда $\rho(2,G)$ и $t(2,G)$ перечислены в табл.* 6 *для классических групп и в табл.* 7 *для исключительных групп.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $G = A^{\varepsilon}_{n-1}(q)$. Пусть $G = A_1(q)$ и $q > 3$. Поскольку q нечётно, каждый простой делитель $r \neq p$ числа $|G|$ делит

$(q-1)/2$ или $(q+1)/2$. Если $e(2,q)=1$, то 2 несмежно некоторому простому делителю r_2 числа $(q+1)/2$ и $\tau(G)=\{2,p,r_2\}$. Если $e(2,q)=2$, то 2 несмежно некоторому делителю r_1 числа $(q-1)/2$ и $\tau(G)=\{2,p,r_1\}$.

Пусть $G=A^{\varepsilon}_{n-1}(q)$ и $n\geqslant 3$. Если $(q-\varepsilon 1)_2<n_2$, то в силу предложений 4.1 и 4.2 только примитивный простой делитель $r_{\nu_\varepsilon^{-1}(n-1)}$ несмежен с 2. Заметим: в этом случае $n_2\geqslant 4$, поскольку для $n_2\leqslant 2$ неравенство $(q-\varepsilon 1)_2<n_2$ невозможно. По лемме 1.4 примитивный простой делитель $r_{\nu_\varepsilon^{-1}(n-1)}$ всегда существует. Таким образом, $\rho(2,G)=\{2,r_{\nu_\varepsilon^{-1}(n-1)}\}$.

Если $(q-\varepsilon 1)_2>n_2$ или $(q-\varepsilon 1)_2=n_2=2$, то в силу предложений 4.1 и 4.2 каждый примитивный простой делитель $r_{\nu_\varepsilon^{-1}(n)}$ несмежен с 2. Следовательно, $\rho(2,G)=\{2,r_{\nu_\varepsilon^{-1}(n)}\}$.

Наконец, пусть $(q-\varepsilon 1)_2=n_2>2$. В силу предложений 4.1 и 4.2 только примитивные простые делители $r_{\nu_\varepsilon^{-1}(n-1)}$ и $r_{\nu_\varepsilon^{-1}(n)}$ несмежны с 2. С другой стороны, в силу предложений 2.1 и 2.2 простые числа $r_{\nu_\varepsilon^{-1}(n-1)}$ и $r_{\nu_\varepsilon^{-1}(n)}$ несмежны между собой. Таким образом, $\rho(2,G)=\{2,r_{\nu_\varepsilon^{-1}(n-1)},r_{\nu_\varepsilon^{-1}(n)}\}$.

(2) $G=C_n(q)$ или $B_n(q)$. Результаты табл. 7 прямо следуют из предложения 4.3.

(3) $G=D^{\varepsilon}_n(q)$. Результаты являются прямым следствием предложения 4.4. Заметим, что равенство $t(2,G)=2$ имеет место для большинства групп типа D_n над полями нечётного порядка. Исключения следующие: n нечётно и $q\equiv 5 \pmod 8$ для $G=D_n(q)$ и $q\equiv 3\pmod 8$ для $G={}^2D_n(q)$.

(4) Чтобы завершить доказательство предложения, можно воспользоваться предложением 4.5, а также леммой 1.5 для групп Сузуки и Ри и леммой 1.4 для остальных исключительных групп. □

Рассмотрим теперь вопрос о единственности множества $\rho(2,G)$. Ситуация здесь очень похожа на ситуацию с $\rho(p,G)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.7. *Пусть G — конечная простая группа лиева типа над полем нечётной характеристики p и порядка q. Предположим, что G неизоморфна группам $A_1(q)$ и ${}^2G_2(q)$. Пусть $\rho(2,G)=$ $=\{2,s_1,s_2,\dots,s_m\}$ — независимое множество в $GK(G)$, содержащее 2, с наибольшим число вершин и $k_i=e(s_i,q)$. Тогда $\{k_1,\dots,k_m\}$ определены однозначно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое вытекает из результатов §§ 2–4. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.8. *Пусть G — либо группа $A_1(q)$, где q нечётно, либо группа ${}^2G_2(3^{2n+1})$, и $\rho(2, G) = \{2, s_1, s_2\}$.*

(1) *Если $G = A_1(q)$ и q нечётно, то с точностью до перенумерации $s_1 = p$ и $e(s_2, q) = 3 - e(2, q)$.*

(2) *Если $G = {}^2G_2(3^{2n+1})$, то с точностью до перенумерации $s_i = m_{i+2}(G, n)$.*

Числа $m_i(G, n)$ определены в лемме 1.5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое следует из результатов §§ 2–4. □

Нашей последней задачей является определение для каждой конечной простой группы G лиева типа некоторого независимого множества $\rho(G)$ в $GK(G)$ с наибольшим числом вершин.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.9. *Пусть G — конечная простая группа лиева типа над полем характеристики p и порядка q. Тогда $\rho(G)$ и $t(G)$ перечислены в табл.* 8 *для классических групп и табл.* 9 *для исключительных групп.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $G = A^{\varepsilon}_{n-1}(q)$. Если $G = A_1(q)$ или $G = A^{\varepsilon}_2(q)$, то рассуждая как при доказательстве предложения 6.3, получим $\rho(G) = \rho(p, G)$.

Предположим, что $n = 4$. В силу предложения 6.3 и табл. 4 имеет место $t(p, G) = 3$ во всех случаях, кроме группы ${}^2A_3(2)$. Используя предложение 6.6 и табл. 6, получаем $t(2, G) \leqslant 3$. Из предложений 4.1 и 4.2 следует, что $t(r_{\nu_\varepsilon^{-1}(1)}, G) \leqslant 3$. Кроме того, имеется не более трёх других примитивных делителей $r_{\nu_\varepsilon^{-1}(2)}$, $r_{\nu_\varepsilon^{-1}(3)}$ и $r_{\nu_\varepsilon^{-1}(4)} = r_4$. Поэтому $t(G) = t(p, G) = 3$, исключая случай $t({}^2A_3(2)) = t(2, {}^2A_3(2)) = 2$.

Пусть $G = A^{\varepsilon}_{n-1}(q)$, $n \geqslant 5$ и $q \neq 2$. По лемме 1.4 найдутся примитивные простые делители $r_{\nu_\varepsilon^{-1}(k)}$ для любого $k > 2$. Обозначим через m число $[n/2]$, т. е. целую часть числа $n/2$. В силу предложений 2.1 и 2.2 множество

$$\rho = \{r_{\nu_\varepsilon^{-1}(m+1)}, r_{\nu_\varepsilon^{-1}(m+2)}, \ldots, r_{\nu_\varepsilon^{-1}(n)}\}$$

является независимым в $GK(G)$. С другой стороны, в силу предложений 2.1, 2.2, 3.1, 4.1 и 4.2 каждые два простых делителя из

$\pi\left(q\prod\limits_{i=1}^{m}(q^i-(\varepsilon 1)^i)\right)$ смежны в $GK(G)$. Кроме того, каждый из них смежен по крайней мере с одним числом из ρ. Поскольку каждое простое число $s\in\pi(G)\setminus\left(\rho\cup\pi\left(q\prod\limits_{i=1}^{m}(q^i-(\varepsilon 1)^i)\right)\right)$ имеет вид r_i для некоторого $i>m$, то каждое независимое множество в $GK(G)$, содержащее простой делитель из $\pi\left(q\prod\limits_{i=1}^{m}(q^i-1)\right)$, содержит не более $|\rho|$ вершин. Таким образом, $\rho(G)=\rho$ и $t(G)=|\rho|=[(n+1)/2]$.

Пусть $q=2$. Поскольку $\nu_+^{-1}(6)=\nu_-^{-1}(3)=6$, результаты предыдущего абзаца верны для групп $A_{n-1}(2)$ при $n\geqslant 12$ и групп ${}^2A_{n-1}(2)$ при $n\geqslant 6$. Если $n=5$ и $\varepsilon=-$, то для ${}^2A_4(2)$ имеем $\rho(G)=\rho(2,G)=\{2,5,11\}$ и $t(G)=3$. Поэтому можно считать, что $G=A_{n-1}(2)$. Если $n=5,6$, то $\rho(G)=\{r_3,r_4,r_5\}=\{5,7,31\}$ и $t(G)=3$. Если $7\leqslant n\leqslant 11$, то необходимо исключить делители числа 2^6-1 из $\rho(G)$, а в остальном рассуждать как в предыдущем абзаце. В этом случае $\rho(G)=\{r_i\mid i\neq 6,[n/2]<i\leqslant n\}$ и $t(G)=[(n-1)/2]$.

(2) $G=C_n(q)$ или $B_n(q)$. Поскольку $GK(C_n(q))=GK(B_n(q))$, эти группы рассматриваются одновременно.

$G=C_2(q)$, $q>2$. Поскольку каждые два простых делителя числа $q(q^2-1)$ смежны, имеем $\rho(G)=\rho(p,G)=\{p,r_4\}$.

Пусть $n\geqslant 3$ при $q>2$ и $n\geqslant 7$ при $q=2$. Определим множество

$$\rho=\{r_{2i}\mid [n+1/2]<i\leqslant n\}\cup\{r_i\mid [n/2]<i\leqslant n,\ i\equiv 1(\operatorname{mod}2)\}.$$

Используя результаты §§ 1–4 и рассуждая как при доказательстве для групп $A_{n-1}^{\varepsilon}(q)$, получаем, что $\rho(G)=\rho$ и, как легко проверить, $t(G)=[(3n+5)/4]$.

Если $q=2$ и $3\leqslant n\leqslant 5$, то все рассуждения остаются такими же, требуется лишь исключить из ρ делители вида r_6. Таким образом, в этом случае $t(G)=[(3n+1)/4]$. Наконец, если $(n,q)=(6,2)$, необходимо исключить из ρ делитель типа r_6, вместо него можно добавить примитивный простой делитель 7 числа 2^3-1. Таким образом, $t(G)=[(3n+5)/4]$, как и в общем случае.

(3) $G=D_n^{\varepsilon}(q)$. Рассуждения аналогичны предыдущим частям доказательства. Используя предложение 2.4, получим множество $\rho(G)$ в общей

ситуации, а затем рассмотрим исключения, возникающие из-за исключения в лемме 1.4.

(4) Результаты для исключительных групп получаются, с использованием предложений 2.5 и 2.6, табл. 5 и 6, а также лемм 1.4 и 1.5. □

§ 7. Приложения

В этом параграфе мы применим наши результаты в духе § 5. Прежде всего, исследования показывают, что условие $t(2, G) > 1$ реализуется для очень широкого класса конечных простых групп.

ТЕОРЕМА 7.1. *Пусть G — конечная неабелева простая группа, удовлетворяющая условию $t(2, G) = 1$, тогда G — знакопеременная группа Alt_n, где n таково, что $\tau(2, n) = \{s \mid s$ — простое число, $n - 3 \leqslant s \leqslant n\} = \varnothing$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое следует из предложений 6.1–6.9 и соответствующих таблиц из § 8. □

Таким образом, можно применить результаты теорем 5.2 и 5.3 следующим образом.

СЛЕДСТВИЕ 7.2. *Пусть L — конечная неабелева простая группа, отличная от групп $A_2(3)$, ${}^2A_3(3)$, $C_2(3)$, Alt_{10} и групп Alt_n с условием $\tau(2, n) = \varnothing$. Пусть G — конечная группа, удовлетворяющая условию $\omega(G) = \omega(L)$. Тогда существует конечная неабелева простая группа S такая, что $S \leq \overline{G} = G/K \leq \mathrm{Aut}(S)$ для максимальной нормальной разрешимой подгруппы K группы G. Кроме того, $t(S) \geqslant t(G) - 1$ и выполняется одно из следующих условий:*

(1) *$S \simeq \mathrm{Alt}_7$ или $A_1(q)$ для некоторого нечётного q и $t(S) = t(2, S) = 3$;*

(2) *для каждого простого числа $r \in \pi(G)$, несмежного в $GK(G)$ с числом 2, силовская r-подгруппа группы G изоморфна силовской r-подгруппе группы S. В частности, $t(2, S) \geqslant t(2, G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое непосредственно следует из теорем 5.3 и 7.1. □

Если G является одной из групп $A_2(3)$, ${}^2A_3(3)$, $C_2(3)$, Alt_{10}, то $t(2,G) \geqslant 2$ и выполняется также

СЛЕДСТВИЕ 7.3. *Пусть L — конечная простая группа, отличная от групп Alt_n с условием $\tau(2,n) = \varnothing$. Пусть G — конечная группа, удовлетворяющая условию $\omega(G) = \omega(L)$. Тогда G имеет не более одного неабелева композиционного фактора.*

Для произвольного подмножества ω множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел обозначим через $h(\omega)$ число попарно неизоморфных конечных групп G таких, что $\omega(G) = \omega$. Будем говорить, что для конечной группы G *проблема распознаваемости решена*, если известно значение $h(\omega(G))$ (для краткости, $h(G)$). В частности, группа G называется *распознаваемой по спектру* (кратко, *распознаваемой*), если $h(G) = 1$.

В последние двадцать лет проблема распознаваемости была решена для многих конечных неабелевых простых и почти простых групп (см. обзор в [3]). Большинство таких групп имеют несвязный граф простых чисел, поскольку теорема Грюнберга–Кегеля и классификация конечных простых групп с несвязным графом простых чисел, полученная Уильямсом и Кондратьевым, являлись важной частью доказательства. Основной результат из [4] (теор. 5.2 в настоящей работе) и результаты настоящей работы дают возможность работать с группами, граф простых чисел которых связен.

Конечная неабелева простая группа L называется *квазираспознаваемой по спектру*, если каждая конечная группа с тем же спектром имеет ровно один неабелев композиционный фактор S, изоморфный L. Таким образом, исследование квазираспознаваемости является важным шагом при определении, является ли данная группа распознаваемой по спектру. В [4] дан набросок доказательства следующего результата.

ТЕОРЕМА 7.4 [4, предлож. 5]. *Пусть $L = {}^2D_n(q)$, $q = 2^k$, k, n — натуральные числа, n чётно и $n \geqslant 16$. Тогда L квазираспознаваема по спектру.*

Фактически, этот результат был доказан по модулю результатов § 6 настоящей работы. Теперь он полностью доказан.

Выделим одно упомянутое ранее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.5. *Пусть $G = B_n(q)$ и $H = C_n(q)$. Тогда графы простых чисел $GK(G)$ и $GK(H)$ совпадают.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое следует из результатов §§ 2–4. □

В заключение упомянем один недавно опубликованный результат о графах простых чисел конечных групп. Напомним, что множество вершин графа называется *кликой*, если все вершины из этого множества попарно смежны. В [18, теор. 1] дано описание всех конечных неабелевых простых групп, компоненты связности графов простых чисел которых образуют клики. При проверке списка таких групп с использованием результатов настоящей работы, к сожалению, оказалось, что в списке содержатся некоторые неточности. На самом деле для групп $G = A_2^\varepsilon(q)$, где $q = 2^k - \varepsilon 1$ и $(q - \varepsilon 1)_3 = 3$, имеет место $3, p \in \pi_1(G)$ и $3p \notin \omega(G)$. Поэтому компонента связности $\pi_1(G)$ не является кликой для этих групп, что противоречит утверждению теоремы 1 в [18]. Ниже в следствии 7.6 даётся уточненный список рассматриваемых групп.

СЛЕДСТВИЕ 7.6. *Пусть G — конечная неабелева простая группа и все связные компоненты её простого графа $GK(G)$ являются кликами. Тогда G — одна из следующего списка групп:*

(1) *спорадические группы* M_{11}, M_{22}, J_1, J_2, J_3, HiS;

(2) *знакопеременные группы* Alt_n, *где* $n = 5, 6, 7, 9, 12, 13$;

(3) *группы лиева типа* $A_1(q)$, *где* $q > 3$; $A_2(4)$; $A_2(q)$, *где* $(q-1)_3 \neq 3$, $q+1 = 2^k$; ${}^2A_3(3)$; ${}^2A_5(2)$; ${}^2A_2(q)$, *где* $(q+1)_3 \neq 3$, $q-1 = 2^k$; $C_3(2)$, $C_2(q)$, *где* $q > 2$; $D_4(2)$; ${}^3D_4(2)$; ${}^2B_2(q)$, *где* $q = 2^{2k+1}$; $G_2(q)$, *где* $q = 3^k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все связные компоненты графа простых чисел $GK(G)$ конечной группы G являются кликами тогда и только тогда, когда число $s(G)$ компонент равно неплотности $t(G)$ графа $GK(G)$. Для каждой конечной неабелевой простой группы значения $s(G)$ и $t(G)$ теперь известны. Таким образом, используя табл. 2a–2c из [3] для значений $s(G)$ и табл. 2–9 из § 8 настоящей работы для $t(G)$, получаем требуемое. □

§ 8. Таблицы

В нижеследующих таблицах предполагается, что n, k — натуральные числа. Через $[x]$ обозначается целая часть числа x. Для конечной группы G через $\rho(G)$ (через $\rho(r, G)$) обозначается некоторое независимое множество в $GK(G)$ (содержащее r) с наибольшим числом вершин и предполагается, что $t(G) = |\rho(G)|$, $t(r, G) = |\rho(r, G)|$. В табл. 3 через $\tau(n)$ обозначается множество $\{s \mid s$ — простое число, $n/2 < s \leqslant n\}$, а через $\tau(2, n)$ — множество $\{s \mid s$ — простое число, $n - 3 \leqslant s \leqslant n\}$. Через s'_n обозначается наибольшее простое число, не превосходящее $n/2$, а через s''_n — наименьшее простое число, большее $n/2$. В табл. 4–9 предполагается, что G — конечная неабелева простая группа лиева типа над полем характеристики p и порядка q. Через r_m обозначается примитивный простой делитель числа $q^m - 1$. Если p нечётно, то говорят, что 2 является примитивным простым делителем числа $q - 1$, если $q \equiv 1 (\operatorname{mod} 4)$, и примитивным делителем числа $q^2 - 1$, если $q \equiv -1 (\operatorname{mod} 4)$.

Таблица 2. Спорадические группы

G	$t(G)$	$\rho(G)$	$t(2,G)$	$\rho(2,G)$
M_{11}	3	$\{3,5,11\}$	3	$\{2,5,11\}$
M_{12}	3	$\{3,5,11\}$	2	$\{2,11\}$
M_{22}	4	$\{3,5,7,11\}$	4	$\{2,5,7,11\}$
M_{23}	4	$\{3,7,11,23\}$	4	$\{2,5,11,23\}$
M_{24}	4	$\{5,7,11,23\}$	3	$\{2,11,23\}$
J_1	4	$\{5,7,11,19\}$	4	$\{2,7,11,19\}$
J_2	2	$\{5,7\}$	2	$\{2,7\}$
J_3	3	$\{5,17,19\}$	3	$\{2,17,19\}$
J_4	7	$\{7,11,23,29,31,37,43\}$	6	$\{2,23,29,31,37,43\}$
Ru	4	$\{5,7,13,29\}$	2	$\{2,29\}$
He	3	$\{5,7,17\}$	2	$\{2,17\}$
McL	3	$\{5,7,11\}$	2	$\{2,11\}$
HN	3	$\{7,11,19\}$	2	$\{2,19\}$

Окончание таблицы 2

G	$t(G)$	$\rho(G)$	$t(2,G)$	$\rho(2,G)$
HiS	3	$\{5,7,11\}$	3	$\{2,7,11\}$
Suz	4	$\{5,7,11,13\}$	3	$\{2,11,13\}$
Co_1	4	$\{7,11,13,23\}$	2	$\{2,23\}$
Co_2	4	$\{5,7,11,23\}$	3	$\{2,11,23\}$
Co_3	4	$\{5,7,11,23\}$	2	$\{2,23\}$
Fi_{22}	4	$\{5,7,11,13\}$	2	$\{2,13\}$
Fi_{23}	5	$\{7,11,13,17,23\}$	3	$\{2,17,23\}$
Fi'_{24}	6	$\{7,11,13,17,23,29\}$	4	$\{2,17,23,29\}$
O'N	5	$\{5,7,11,19,31\}$	4	$\{2,11,19,31\}$
LyS	6	$\{5,7,11,31,37,67\}$	4	$\{2,31,37,67\}$
F_1	11	$\{11,13,17,19,23,29,$ $31,41,47,59,71\}$	5	$\{2,29,41,59,71\}$
F_2	8	$\{7,11,13,17,19,23,31,47\}$	3	$\{2,31,47\}$
F_3	5	$\{5,7,13,19,31\}$	4	$\{2,13,19,31\}$

Таблица 3. Простые знакопеременные группы

G	Условия	$t(G)$	$\rho(G)$	$t(2,G)$	$\rho(2,G)$
Alt_n	$n=5,6$	3	$\{2,3,5\}$	3	$\{2,3,5\}$
	$n=8$	3	$\{2,5,7\}$	3	$\{2,5,7\}$
	$n\geqslant 7$, $s'_n+s''_n>n$	$\lvert\tau(n)\rvert+1$	$\tau(n)\cup\{s'_n\}$	$\lvert\tau(2,n)\rvert+1$	$\tau(2,n)\cup\{2\}$
	$n\geqslant 9$, $s'_n+s''_n\leqslant n$	$\lvert\tau(n)\rvert$	$\tau(n)$	$\lvert\tau(2,n)\rvert+1$	$\tau(2,n)\cup\{2\}$

Таблица 4. p-неплотность для конечных простых классических групп

G	Условия	$t(p,G)$	$\rho(p,G)$
$A_{n-1}(q)$	$n=2$, $q>3$	3	$\{p,r_1,r_2\}$
	$n=3$, $(q-1)_3=3$ и $q+1\neq 2^k$	4	$\{p,3,r_2,r_3\}$
	$n=3$, $(q-1)_3\neq 3$ и $q+1\neq 2^k$	3	$\{p,r_2,r_3\}$
	$n=3$, $(q-1)_3=3$ и $q+1=2^k$	3	$\{p,3,r_3\}$
	$n=3$, $(q-1)_3\neq 3$ и $q+1=2^k$	2	$\{p,r_3\}$
	$n=6$, $q=2$	2	$\{2,31\}$
	$n=7$, $q=2$	2	$\{2,127\}$
	$n>3$ $(n,q)\neq(6,2),(7,2)$	3	$\{p,r_{n-1},r_n\}$

Окончание таблицы 4

G	Условия	$t(p,G)$	$\rho(p,G)$
${}^2A_{n-1}(q)$	$n=3$, $q\neq 2$, $(q+1)_3=3$ и $q-1\neq 2^k$	4	$\{p,3,r_1,r_6\}$
	$n=3$, $(q+1)_3\neq 3$ и $q-1\neq 2^k$	3	$\{p,r_1,r_6\}$
	$n=3$, $(q+1)_3=3$ и $q-1=2^k$	3	$\{p,3,r_6\}$
	$n=3$, $(q+1)_3\neq 3$ и $q-1=2^k$	2	$\{p,r_6\}$
	$n=4$, $q=2$	2	$\{2,5\}$
	$n\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$, $(n,q)\neq(4,2)$	3	$\{p,r_{2n-2},r_n\}$
	$n\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$	3	$\{p,r_{n-1},r_{2n}\}$
	$n\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$, $n\neq 2$	3	$\{p,r_{2n-2},r_{n/2}\}$
	$n\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$, $n\neq 3$	3	$\{p,r_{(n-1)/2},r_{2n}\}$
$B_n(q)$ или $C_n(q)$	$n=3$, $q=2$	2	$\{2,7\}$
	n чётно	2	$\{p,r_{2n}\}$
	$n>1$ нечётно, $(n,q)\neq(3,2)$	3	$\{p,r_n,r_{2n}\}$
$D_n(q)$	$n=4$, $q=2$	2	$\{2,7\}$
	$n\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$, $n\geqslant 4$, $(n,q)\neq(4,2)$	3	$\{p,r_{n-1},r_{2n-2}\}$
	$n\equiv 1(\mathrm{mod}\,1)$, $n>4$	3	$\{p,r_n,r_{2n-2}\}$
${}^2D_n(q)$	$n=4$, $q=2$	3	$\{2,7,17\}$
	$n\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$, $n\geqslant 4$, $(n,q)\neq(4,2)$	4	$\{p,r_{n-1},r_{2n-2},r_{2n}\}$
	$n\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$, $n>4$	3	$\{p,r_{2n-2},r_{2n}\}$

Таблица 5. p-неплотность для конечных простых исключительных групп лиева типа

G	Условия	$t(p,G)$	$\rho(p,G)$
$G_2(q)$	$q>2$	3	$\{p,r_3,r_6\}$
$F_4(q)$	нет	3	$\{p,r_8,r_{12}\}$
$E_6(q)$	нет	4	$\{p,r_8,r_9,r_{12}\}$
${}^2E_6(q)$	нет	4	$\{p,r_8,r_{12},r_{18}\}$
$E_7(q)$	нет	5	$\{p,r_7,r_9,r_{14},r_{18}\}$
$E_8(q)$	нет	5	$\{p,r_{15},r_{20},r_{24},r_{30}\}$
${}^3D_4(q)$	нет	2	$\{p,r_{12}\}$
${}^2B_2(2^{2n+1})$	$n\geqslant 1$	4	$\{2,s_1,s_2,s_3\}$, где s_1 делит $2^{2n+1}-1$, s_2 делит $2^{2n+1}-2^{n+1}+1$, s_3 делит $2^{2n+1}+2^{n+1}+1$

Окончание таблицы 5

G	Условия	$t(p,G)$	$\rho(p,G)$
${}^2G_2(3^{2n+1})$	$n \geqslant 1$	5	$\{3, s_1, s_2, s_3, s_4\}$, где $s_1 \neq 2$ делит $3^{2n+1}-1$, $s_2 \neq 2$ делит $3^{2n+1}+1$, s_3 делит $3^{2n+1}-3^{n+1}+1$, s_4 делит $3^{2n+1}+3^{n+1}+1$
${}^2F_4(2^{2n+1})$	$n \geqslant 1$	4	$\{2, s_1, s_2, s_3\}$, где $s_1 \neq 3$ и делит $2^{4n+2}-2^{2n+1}+1$, s_2 делит $2^{4n+2}+2^{3n+2}+2^{2n+1}+2^{n+1}+1$, s_3 делит $2^{4n+2}-2^{3n+2}+2^{2n+1}-2^{n+1}+1$
${}^2F_4(2)'$	нет	2	$\{2, 13\}$

Таблица 6. 2-неплотность для конечных простых классических групп характеристики $p \neq 2$

G	Условия	$t(2,G)$	$\rho(2,G)$
$A_{n-1}(q)$	$n=2$, $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$	3	$\{2, r_2, p\}$
	$n=2$, $q \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$, $q \neq 3$	3	$\{2, r_1, p\}$
	$n \geqslant 3$ и $n_2 < (q-1)_2$	2	$\{2, r_n\}$
	$n \geqslant 3$ и либо $n_2 > (q-1)_2$, либо $n_2 = (q-1)_2 = 2$	2	$\{2, r_{n-1}\}$
	$2 < n_2 = (q-1)_2$	3	$\{2, r_{n-1}, r_n\}$
${}^2A_{n-1}(q)$	$n_2 > (q+1)_2$	2	$\{2, r_{2n-2}\}$
	$n_2 = 1$	2	$\{2, r_{2n}\}$
	$2 < n_2 < (q+1)_2$	2	$\{2, r_n\}$
	$n \geqslant 3$, $2 = n_2 \leqslant (q+1)_2$	2	$\{2, r_{n/2}\}$
	$2 < n_2 = (q+1)_2$	3	$\{2, r_{2n-2}, r_n\}$
$B_n(q)$ или $C_n(q)$	$n > 1$ нечётно и $(q-1)_2 = 2$	2	$\{2, r_n\}$
	n чётно или $(q-1)_2 > 2$	2	$\{2, r_{2n}\}$
$D_n(q)$	$n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)$, $n \geqslant 4$, $q \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$	2	$\{2, r_{n-1}\}$
	$n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)$, $n \geqslant 4$, $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$	2	$\{2, r_{2n-2}\}$
	$n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)$, $n > 4$, $q \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$	2	$\{2, r_n\}$
	$n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)$, $n > 4$, $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 8)$	2	$\{2, r_{2n-2}\}$
	$n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)$, $n > 4$, $q \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 8)$	3	$\{2, r_n, r_{2n-2}\}$

Окончание таблицы 6

G	Условия	$t(2,G)$	$\rho(2,G)$
${}^2D_n(q)$	$n \equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$, $n \geqslant 4$	2	$\{2, r_{2n}\}$
	$n \equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$, $n > 4$, $q \equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$	2	$\{2, r_{2n}\}$
	$n \equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$, $n > 4$, $q \equiv 7(\mathrm{mod}\,8)$	2	$\{2, r_{2n-2}\}$
	$n \equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$, $n > 4$, $q \equiv 3(\mathrm{mod}\,8)$	3	$\{2, r_{2n-2}, r_{2n}\}$

Таблица 7. 2-неплотность для конечных простых исключительных групп лиева типа характеристики $p \neq 2$

G	Условия	$t(2,G)$	$\rho(2,G)$
$G_2(q)$	нет	3	$\{2, r_3, r_6\}$
$F_4(q)$	нет	2	$\{2, r_{12}\}$
$E_6(q)$	нет	3	$\{2, r_9, r_{12}\}$
${}^2E_6(q)$	нет	3	$\{2, r_{12}, r_{18}\}$
$E_7(q)$	$q \equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$	3	$\{2, r_{14}, r_{18}\}$
	$q \equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$	3	$\{2, r_7, r_9\}$
$E_8(q)$	нет	5	$\{2, r_{15}, r_{20}, r_{24}, r_{30}\}$
${}^3D_4(q)$	нет	2	$\{2, r_{12}\}$
${}^2G_2(3^{2n+1})$	нет	3	$\{2, s_1, s_2\}$, где
			s_1 делит $3^{2n+1} - 3^{n+1} + 1$,
			s_2 делит $3^{2n+1} + 3^{n+1} + 1$

Таблица 8. Неплотность для конечных простых классических групп

G	Условия	$t(G)$	$\rho(G)$
$A_{n-1}(q)$	$n = 2$, $q > 3$	3	$\{p, r_1, r_2\}$
	$n = 3$, $(q-1)_3 = 3$ и $q+1 \neq 2^k$	4	$\{p, 3, r_2, r_3\}$
	$n = 3$, $(q-1)_3 \neq 3$ и $q+1 \neq 2^k$	3	$\{p, r_2, r_3\}$
	$n = 3$, $(q-1)_3 = 3$ и $q+1 = 2^k$	3	$\{p, 3, r_3\}$
	$n = 3$, $(q-1)_3 \neq 3$ и $q+1 = 2^k$	2	$\{p, r_3\}$
	$n = 4$	3	$\{p, r_{n-1}, r_n\}$
	$n = 5, 6$, $q = 2$	3	$\{5, 7, 31\}$
	$7 \leqslant n \leqslant 11$, $q = 2$	$\left[\frac{n-1}{2}\right]$	$\{r_i \mid i \neq 6, \left[\frac{n}{2}\right] < i \leqslant n\}$
	$n \geqslant 5$ и $q > 2$ или $n \geqslant 12$ и $q = 2$	$\left[\frac{n+1}{2}\right]$	$\{r_i \mid \left[\frac{n}{2}\right] < i \leqslant n\}$

Продолжение таблицы 8

G	Условия	$t(G)$	$\rho(G)$
${}^2A_{n-1}(q)$	$n=3, q\neq 2, (q+1)_3=3$ и $q-1\neq 2^k$	4	$\{p,3,r_1,r_6\}$
	$n=3$, $(q+1)_3\neq 3$ и $q-1\neq 2^k$	3	$\{p,r_1,r_6\}$
	$n=3$, $(q+1)_3=3$ и $q-1=2^k$	3	$\{p,3,r_6\}$
	$n=3$, $(q+1)_3\neq 3$ и $q-1=2^k$	2	$\{p,r_6\}$
	$n=4$, $q=2$	2	$\{2,5\}$
	$n=4$, $q>2$	3	$\{p,r_4,r_6\}$
	$n=5$, $q=2$	3	$\{2,5,11\}$
	$n\geqslant 5$ и $(n,q)\neq(5,2)$	$\left[\frac{n+1}{2}\right]$	$\{r_{i/2}\mid\left[\frac{n}{2}\right]<i\leqslant n,$ $i\equiv 2(\operatorname{mod}4)\}\cup$ $\cup\{r_{2i}\mid\left[\frac{n}{2}\right]<i\leqslant n,$ $i\equiv 1(\operatorname{mod}2)\}\cup$ $\cup\{r_i\mid\left[\frac{n}{2}\right]<i\leqslant n,$ $i\equiv 0(\operatorname{mod}4)\}$
$B_n(q)$ или $C_n(q)$	$n=2$, $q>2$	2	$\{p,r_4\}$
	$n=3$ и $q=2$	2	$\{5,7\}$
	$n=4$ и $q=2$	3	$\{5,7,17\}$
	$n=5$ и $q=2$	4	$\{7,11,17,31\}$
	$n=6$ и $q=2$	5	$\{7,11,13,17,31\}$
	$n>2$, $(n,q)\neq(3,2),(4,2),$ $(5,2),(6,2)$	$\left[\frac{3n+5}{4}\right]$	$\{r_{2i}\mid\left[\frac{n+1}{2}\right]\leqslant i\leqslant n\}\cup$ $\cup\{r_i\mid\left[\frac{n}{2}\right]<i\leqslant n,$ $i\equiv 1(\operatorname{mod}2)\}$
$D_n(q)$	$n=4$ и $q=2$	2	$\{5,7\}$
	$n=5$ и $q=2$	4	$\{5,7,17,31\}$
	$n=6$ и $q=2$	4	$\{7,11,17,31\}$
	$n\geqslant 4$, $(n,q)\neq(4,2),(5,2),(6,2)$	$\left[\frac{3n+1}{4}\right]$	$\{r_{2i}\mid\left[\frac{n+1}{2}\right]\leqslant i<n\}\cup$ $\cup\{r_i\mid\left[\frac{n}{2}\right]<i\leqslant n,$ $i\equiv 1(\operatorname{mod}2)\}$

Окончание таблицы 8

G	Условия	$t(G)$	$\rho(G)$
${}^2D_n(q)$	$n = 4$ и $q = 2$	3	$\{5, 7, 17\}$
	$n = 5$ и $q = 2$	3	$\{7, 11, 17\}$
	$n = 6$ и $q = 2$	5	$\{7, 11, 13, 17, 31\}$
	$n = 7$ и $q = 2$	5	$\{11, 13, 17, 31, 43\}$
	$n \geqslant 4$, $n \not\equiv 1(\mathrm{mod}\, 4)$, $(n, q) \neq (4, 2), (6, 2), (7, 2)$	$\left[\frac{3n+4}{4}\right]$	$\{r_{2i} \mid \left[\frac{n}{2}\right] \leqslant i \leqslant n\} \cup$ $\cup \{r_i \mid \left[\frac{n}{2}\right] < i \leqslant n,$ $i \equiv 1(\mathrm{mod}\, 2)\}$
	$n > 4$, $n \equiv 1(\mathrm{mod}\, 4)$, $(n, q) \neq (5, 2)$	$\left[\frac{3n+4}{4}\right]$	$\{r_{2i} \mid \left[\frac{n}{2}\right] < i \leqslant n\} \cup$ $\cup \{r_i \mid \left[\frac{n}{2}\right] < i < n,$ $i \equiv 1(\mathrm{mod}\, 2)\}$

Таблица 9. Неплотность для конечных простых исключительных групп лиева типа

G	Условия	$t(G)$	$\rho(G)$
$G_2(q)$	$q > 2$	3	$\{p, r_3, r_6\}$
$F_4(q)$	$q = 2$	4	$\{5, 7, 13, 17\}$
	$q > 2$	5	$\{r_3, r_4, r_6, r_8, r_{12}\}$
$E_6(q)$	$q = 2$	5	$\{5, 13, 17, 19, 31\}$
	$q > 2$	6	$\{r_4, r_5, r_6, r_8, r_9, r_{12}\}$
${}^2E_6(q)$	нет	5	$\{r_4, r_8, r_{10}, r_{12}, r_{18}\}$
$E_7(q)$	нет	7	$\{r_7, r_8, r_9, r_{10}, r_{12}, r_{14}, r_{18}\}$
$E_8(q)$	нет	11	$\{r_7, r_8, r_9, r_{10}, r_{12}, r_{14}, r_{15}, r_{18}, r_{20}, r_{24}, r_{30}\}$
${}^3D_4(q)$	$q = 2$	2	$\{2, 13\}$
	$q > 2$	3	$\{r_3, r_6, r_{12}\}$
${}^2B_2(2^{2n+1})$	$n \geqslant 1$	4	$\{2, s_1, s_2, s_3\}$, где s_1 делит $2^{2n+1} - 1$, s_2 делит $2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$, s_3 делит $2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1$
${}^2G_2(3^{2n+1})$	$n \geqslant 1$	5	$\{3, s_1, s_2, s_2, s_3, s_4\}$, где $s_1 \neq 2$ делит $3^{2n+1} - 1$, $s_2 \neq 2$ делит $3^{2n+1} + 1$, s_3 делит $3^{2n+1} - 3^{n+1} + 1$, s_4 делит $3^{2n+1} + 3^{n+1} + 1$

Окончание таблицы 9

G	Условия	$t(G)$	$\rho(G)$
${}^2F_4(2^{2n+1})$	$n \geqslant 2$	5	$\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$, где $s_1 \neq 3$ и делит $2^{2n+1}+1$, s_2 делит $2^{4n+2}+1$, $s_3 \neq 3$ и делит $2^{4n+2}-2^{2n+1}+1$, s_4 делит $2^{4n+2}-2^{3n+2}+2^{2n+1}-2^{n+1}+1$, s_5 делит $2^{4n+2}+2^{3n+2}+2^{2n+1}+2^{n+1}+1$
${}^2F_4(2)'$	нет	3	$\{3, 5, 13\}$
${}^2F_4(8)$	нет	4	$\{7, 19, 37, 109\}$

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. S. Williams*, Prime graph components of finite groups, J. Algebra, **69**, No. 2 (1981), 487—513.
2. *А. С. Кондратьев*, О компонентах графа простых чисел конечных простых групп, Матем. сб., **180**, № 6 (1989), 787—797.
3. *V. D. Mazurov*, Characterization of groups by arithmetic properties, Algebra Colloc., **11**, No. 1 (2004), 129—140.
4. *А. В. Васильев*, О связи между строением конечной группы и свойствами её графа простых чисел, Сиб. матем. ж., **46**, № 3 (2005), 511—522.
5. *J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson*, Atlas of finite groups, Oxford, Clarendon Press, 1985.
6. *The GAP Group*, GAP — Groups, algorithms, and programming, Vers. 4.4 (2004); http://www.gap-system.org.
7. *R. W. Carter*, Simple groups of Lie type, London, John Wiley and Sons, 1972.
8. *J. E. Humphreys*, Linear algebraic groups, New York, Springer-Verlag, 1972.
9. *R. Steinberg*, Endomorphisms of algebraic groups (Mem. Am. Math. Soc., **80**), 1968.
10. *A. Borel, J. de Siebental*, Les-sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie clos, Comment. Math. Helv., **23** (1949), 200—221.
11. *Е. Б. Дынкин*, Полупростые подалгебры полупростых алгебр Ли, Матем. сб., **30**, № 2 (1952), 349—462.

12. *R. W. Carter*, Finite groups of Lie type, conjugacy classes and complex characters, London, John Wiley and Sons, 1985.
13. *R. W. Carter*, Centralizers of semisimple elements in the finite classical groups, Proc. Lond. Math. Soc., III. Ser., **42**, No. 1 (1981), 1—41.
14. *R. W. Carter*, Conjugacy classes in the Weyl group, Compositio Math., **25**, No. 1 (1972), 1—59.
15. *D. Deriziotis*, Conjugacy classes and centralizers of semisimple elements in finite groups of Lie type, Vorlesungen aus dem Fachbereich Mathematic der Universität Essen, 1984, Heft 11.
16. *K. Zsigmondy*, Zur Theorie Potenzreste, Monatsh. Math. Phys., **3** (1892), 265—284.
17. *D. Deriziotis*, The centralizers of semisimple elements of the Chevalley groups E_7 and E_8, Tokyo J. Math., **6**, No. 1 (1983), 191—216.
18. *M. S. Lucido, A. R. Moghaddamfar*, Groups with complete prime graph connected components, J. Group Theory, **7**, No. 3 (2004), 373—384.

Поступило 30 мая 2005 г.

Адреса авторов:

ВАСИЛЬЕВ Андрей Викторович, Ин-т матем. СО РАН, пр. Ак. Коптюга, 4, г. Новосибирск, 630090, РОССИЯ. e-mail: vdr@gorodok.net

ВДОВИН Евгений Петрович, Ин-т матем. СО РАН, пр. Ак. Коптюга, 4, г. Новосибирск, 630090, РОССИЯ. e-mail: vdovin@math.nsc.ru