A. V. Pskhu, Nakhushev extremum principle for integro-differential operators, *Itogi Nauki i Tekhniki. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz.*, 2021, Volume 198, 103–108

DOI: 10.36535/0233-6723-2021-198-103-108

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 198 (2021). С. 103–108
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-198-103-108

УДК 517.23, 517.272

ПРИНЦИП ЭКСТРЕМУМА А. М. НАХУШЕВА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 2021 г. **А. В. ПСХУ**

Посвящается памяти Адама Маремовича Нахушева

Аннотация. Доказан принцип экстремума для интегро-дифференциального оператора с ядром общего вида, обобщающий аналог теоремы Ферма об экстремуме для дробной производной Римана—Лиувилля. Как следствия сформулированы взвешенный принцип экстремума, принципы экстремума для интегро-дифференциального оператора типа свертки, а также ряда операторов дробного дифференцирования.

***Ключевые слова*:** принцип экстремума, аналог теоремы Ферма об экстремуме, интегро-дифференциальный оператор, производная Римана—Лиувилля, производная распределенного порядка, оператор свертки.

NAKHUSHEV EXTREMUM PRINCIPLE FOR INTEGRO-DIFFERENTIAL OPERATORS

© 2021 **A. V. PSKHU**

Abstract. In this paper, we prove the extremum principle for an integro-differential operator with a kernel of a general form, which generalizes an analog of Fermat's extremum theorem for the Riemann–Liouville fractional derivative. Also, we formulate the weighted extremum principle and the extremum principles for integro-differential operators of convolution type and for some fractional differentiation operators.

***Keywords and phrases*:** extremum principle, analog of Fermat's extremum theorem, integro-differential operator, Riemann–Liouville derivative, derivative of distributed order, convolution operator.

***AMS Subject Classification*:** 26A33, 26D10, 26A24

1. Введение. В 1974 году в [5] А. М. Нахушев доказал принцип экстремума для оператора дробного дифференцирования в смысле Римана—Лиувилля. Данное утверждение дает необходимые условия экстремума функции в терминах дробной производной и представляет собой аналог теоремы Ферма об экстремуме в дробном исчислении. Как известно, если непрерывно дифференцируемая функция $f(x)$ удовлетворяет неравенству $f(y) \geqslant f(x)$ ($f(y) \leqslant f(x)$) для всех x из левой полуокрестности точки y (т.е. $y - \varepsilon < x < y$), то можно утверждать, что $f'(y) \geqslant 0$ ($f'(y) \leqslant 0$). В [5] было показано, что аналогичное утверждение имеет место и в случае производной дробного порядка, меньшего единицы. Более того, в этом случае значение дробной производной в точке экстремума при определенных условиях оказывается строго знакоопределенной.

Этот принцип нашел многочисленные приложения в современном анализе, в частности, при исследовании начальных и краевых задач для уравнений смешанного типа, вырождающихся уравнений, а также дифференциальных уравнений дробного порядка (см. [2–4, 6, 7, 10, 11, 13, 16, 17]).

В данной работе мы доказываем принцип экстремума для интегро-дифференциального оператора с ядром общего вида. Как следствия сформулированы взвешенный принцип экстремума, принципы экстремума для интегро-дифференциального оператора типа свертки, а также ряда операторов дробного дифференцирования.

2. Принцип экстремума. Рассмотрим интегро-дифференциальный оператор вида

$$(\mathbf{D}u)(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x u(t)k(x,t)dt. \tag{1}$$

Далее будем использовать обозначения

$$\Omega = \{(x,t) : y-\delta < x < y,\ a < t < x\} \quad (0 < \delta < y-a)$$

и

$$\Omega^* = \overline{\Omega} \setminus \{(x,t) : x = t\}.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

(i) *справедливы включения*

$$u(t) \in C(a,y] \cap L(a,y), \quad k(y,t) \in L(a,y), \quad k(x,t) \in C(\Omega^*), \quad k_x(x,t) \in C(\Omega^*); \tag{2}$$

(ii) *существуют пределы*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{x-\varepsilon}[u(t)-u(x)]k_x(x,t)dt, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d}{dx}\int_a^{x-\varepsilon}k(x,t)dt, \tag{3}$$

и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[u(x-\varepsilon)-u(x)]k(x,x-\varepsilon) = 0, \tag{4}$$

равномерные относительно $x \in (y-\delta, y]$;

(iii) *имеют место неравенства*

$$k_x(y,t) \leqslant 0, \quad u(y) \geqslant u(t) \quad (a < t < y). \tag{5}$$

Тогда

$$(\mathbf{D}u)(y) \geqslant u(y)(\mathbf{D}\mathtt{1})(y), \tag{6}$$

где $\mathtt{1}$ *обозначает функцию, тождественно равную единице (на отрезке* $[a,y]$*). Причем*

$$(\mathbf{D}u)(y) = u(y)(\mathbf{D}\mathtt{1})(y) \tag{7}$$

тогда и только тогда, когда $u(t) \equiv \mathrm{const}$ *или* $k_x(y,t) \equiv 0$ $(a < t < y)$.

Доказательство. Введем обозначение

$$K_\varepsilon(x) = \int_a^{x-\varepsilon} u(t)k(x,t)dt \quad (\varepsilon > 0).$$

После простых преобразований найдем

$$\frac{d}{dx}K_\varepsilon(x) = u(x-\varepsilon)k(x,x-\varepsilon) + \int_a^{x-\varepsilon}u(t)k_x(x,t)dt =$$

$$= u(x-\varepsilon)k(x,x-\varepsilon) + \int_a^{x-\varepsilon}[u(t)-u(x)]k_x(x,t)dt + u(x)\int_a^{x-\varepsilon}k_x(x,t)dt. \tag{8}$$

Интеграл в третьем слагаемом правой части можно переписать в виде

$$\int_a^{x-\varepsilon}k_x(x,t)dt = \frac{d}{dx}\int_a^{x-\varepsilon}k(x,t)dt - k(x,x-\varepsilon).$$

Воспользовавшись этим, равенство (8) примет вид

$$\frac{d}{dx}K_\varepsilon(x) = [u(x-\varepsilon)-u(x)]k(x,x-\varepsilon) + \int\limits_a^{x-\varepsilon}[u(t)-u(x)]k_x(x,t)dt + +u(x)\frac{d}{dx}\int\limits_a^{x-\varepsilon}k(x,t)dt. \quad (9)$$

Из условий теоремы следует существование пределов

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_a^{y-\varepsilon}k(y,t)dt = \int\limits_a^{y}k(y,t)dt, \quad \lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_a^{y-\varepsilon}u(t)k(y,t)dt = \int\limits_a^{y}u(t)k(y,t)dt.$$

С учетом этих равенств и соотношения (9), в силу теоремы о дифференцировании функциональных последовательностей (см., например, [1, с. 90]), можем утверждать, что для любого $x\in(y-\delta,y]$ имеют место предельные соотношения

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{d}{dx}\int\limits_a^{x-\varepsilon}k(x,t)dt = \frac{d}{dx}\int\limits_a^{x}k(x,t)dt = (\mathbf{D}1)(x),$$

$$(\mathbf{D}u)(x) = \lim_{\varepsilon\to0}\frac{d}{dx}K_\varepsilon(x) = \int\limits_a^{x}[u(t)-u(x)]k_x(x,t)dt + u(x)\frac{d}{dx}\int\limits_a^{x}k(x,t)dt.$$

Таким образом,

$$(\mathbf{D}u)(y) = \int\limits_a^{y}[u(t)-u(y)]k_x(y,t)dt + u(y)(\mathbf{D}1)(y).$$

Последнее с учетом (5) доказывает (6) и (7). □

Следствие. *Пусть выполнены условия* (i)—(iii) *теоремы* 1*, а также*

$$u(t)\not\equiv\text{const}, \quad k_x(y,t)\not\equiv0, \quad a<t<y, \qquad u(y)(\mathbf{D}1)(y)\geqslant0.$$

Тогда

$$(\mathbf{D}u)(y)>0.$$

3. Взвешенный принцип экстремума. Распространим теорему 1 на случай, когда экстремальным свойством обладает не сама функция $u(t)$, а функция $v(t)=u(t)/\varphi(t)$.

Теорема 2. *Пусть* $u(x)=\varphi(x)v(x)$, $\varphi(t),v(t)\in C(a,y]\cap L(a,y)$, *справедливы включения* (2), *а также выполнены следующие условия*:

(i) *существуют пределы*

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_a^{x-\varepsilon}\varphi(t)[v(t)-v(x)]k_x(x,t)dt, \quad \lim_{\varepsilon\to0}\frac{d}{dx}\int\limits_a^{x-\varepsilon}\varphi(t)k(x,t)dt$$

и

$$\lim_{\varepsilon\to0}\big[v(x-\varepsilon)-v(x)\big]k(x,x-\varepsilon)=0,$$

равномерные относительно $x\in(y-\delta,y]$;

(ii) *выполнены неравенства*

$$\varphi(t)k_x(y,t)\leqslant0, \quad v(y)\geqslant v(t) \quad (a<t<y).$$

Тогда

$$(\mathbf{D}u)(y)\geqslant v(y)(\mathbf{D}\varphi)(y).$$

При этом $(\mathbf{D}u)(y)=v(y)(\mathbf{D}\varphi)(y)$ *тогда и только тогда, когда* $v(t)\equiv\text{const}$ *или* $\varphi(t)k_x(y,t)\equiv0$ $(a<t<y)$.

Доказательство. В силу определения (1) и представления $u(t) = \varphi(t)v(t)$ можем написать

$$(\mathbf{D}u)(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_a^x v(t)\tilde{k}(x,t)dt = (\tilde{\mathbf{D}}v)(x),$$

где $\tilde{k}(x,t) = \varphi(t)k(x,t)$. Применяя теорему 1 к $(\tilde{\mathbf{D}}v)(x)$, учитывая, что $(\tilde{\mathbf{D}}\mathtt{1})(x) = (\mathbf{D}\varphi)(x)$, приходим к утверждению теоремы. □

4. Оператор типа свертки. Рассмотрим оператор (1) с разностным ядром $k(x,t) = h(x-t)$ (далее для простоты будем считать $a = 0$):

$$(\mathbf{S}u)(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_0^x u(t)h(x-t)dt. \tag{10}$$

Сформулируем принцип экстремума для оператора (10).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия*

$$u(t) \in C(0,y] \cap L(0,y), \quad h(t) \in L(0,y) \cap C^1(0,y], \tag{11}$$

$$\omega(t)h'(t) \in L(0,y), \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\omega(\varepsilon)h(\varepsilon) = 0, \tag{12}$$

где

$$\omega(t) = \sup\big\{|u(x) - u(x-t)| : \max\{y-\delta, t\} < x \leqslant y\big\}.$$

Если

$$h'(t) \leqslant 0, \quad u(y) \geqslant u(t) \quad (0 < t < y), \tag{13}$$

то

$$(\mathbf{S}u)(y) \geqslant u(y)h(y), \tag{14}$$

причем равенство

$$(\mathbf{S}u)(y) = u(y)h(y) \tag{15}$$

имеет место тогда и только тогда, когда $u(t) \equiv \mathrm{const}$ *или* $h(t) \equiv \mathrm{const}$ $(0 < t < y)$.

Доказательство. Из (11) и (12) следует выполнение (2), (3) и (4) для $k(x,t) = h(x-t)$. Принимая во внимание равенство $(\mathbf{S}\mathtt{1})(y) = h(y)$, заключаем, что соотношения (14) и (15) вытекают из (6) и (7). □

5. Операторы дробного дифференцирования.

5.1. Производная Римана—Лиувилля. Если в определении (10) в качестве ядра $h(t)$ взята степенная функция

$$h(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad (0 < \alpha < 1),$$

то оператор $(\mathbf{S}u)(x)$ превратится в оператор дробного дифференцирования Римана—Лиувилля (см. [9]):

$$D_{0x}^{\alpha}u(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{(x-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}u(t)dt.$$

В этом случае первое из условий (13) выполнено:

$$\frac{d}{dt}h(t) = \frac{t^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} < 0,$$

так как $\Gamma(-\alpha) < 0$, когда $0 < \alpha < 1$. Для выполнения (12) достаточно потребовать, чтобы функция $u(x)$ удовлетворяла в левой полуокрестности точки y условию Гельдера с показателем, превосходящим α. Неравенство (14) (при выполнении второго из (13) условия) примет вид

$$(D_{0x}^{\alpha}u)(y) \geqslant \frac{u(y)y^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

5.2. Оператор распределенного дифференцирования. Рассмотрим оператор

$$(D_{0x}^{(\mu)}u)(x) = \int_0^1 \mu(s) D_{0x}^s u(x) ds, \tag{16}$$

Операторы вида (16) были предложены в [8]. Этот оператор можно записать в виде (10), взяв в качестве ядра функцию

$$h(t) = \int_0^1 \frac{\mu(s)t^{-s}}{\Gamma(1-s)} ds.$$

Пусть функция $\mu(s)$ интегрируема и такова, что для любого $t \in (0, y)$ выполнено неравенство

$$h'(t) = \int_0^1 \frac{\mu(s)t^{-s-1}}{\Gamma(-s)} ds \leqslant 0,$$

(для этого достаточно, например, чтобы $\mu(s)$ была неотрицательной). Если $u(y) \geqslant u(t)$ $(0 < t < y)$ и функция $u(t)$ удовлетворяет условию Липшица в левой полуокрестности точки y, то имеет место неравенство

$$(D_{0x}^{(\mu)}u)(y) \geqslant u(y) \int_0^1 \frac{\mu(s)y^{-s}}{\Gamma(1-s)} ds.$$

5.3. Дробная производная функции по функции. Рассмотрим оператор

$$(\mathcal{D}_g^\alpha u)(x) = \frac{1}{g'(x)\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{u(t)g'(t)}{[g(x)-g(t)]^\alpha} dt, \quad 0 < \alpha < 1 \tag{17}$$

(см. [12, с. 249]), который называют производной Римана—Лиувилля функции $u(x)$ по функции $g(x)$ порядка α. Оператор (17) можно представить, используя (1), в виде

$$(\mathcal{D}_g^\alpha u)(x) = \frac{1}{g'(x)} (\mathbf{D}u)(x)$$

с ядром

$$k(x,t) = \frac{g'(t)}{\Gamma(1-\alpha)} [g(x) - g(t)]^{-\alpha}.$$

Пусть $g(t) \in C^1[a, y]$, $g'(t) > 0$ $(t \in [a, y])$. Тогда для выполнения условий теоремы 1 достаточно потребовать гельдеровости функции $u(x)$ в левой полуокрестности точки y, с показателем Гельдера, превосходящим α. В этом случае, если $u(y) \geqslant u(t)$ для всех $t \in [a, y]$, будем иметь

$$(\mathcal{D}_g^\alpha u)(y) \geqslant \frac{u(y)}{\Gamma(1-\alpha)} [g(y) - g(a)]^{-\alpha}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х.* Математический анализ. Продолжение курса. — М.: Изд-во МГУ, 1987.
2. *Мамчуев М. О.* Аналог принципа Зарембы—Жиро для уравнения дробной диффузии// Докл. Адыг. (Черкес.) Междунар. акад. наук. — 2010. — *12*, № 2. — С. 32–35.
3. *Масаева О. Х.* Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лапласа с производной Капуто// Диффер. уравн. — 2014. — *48*, № 3. — С. 442–446.
4. *Масаева О. Х.* Принцип экстремума для фрактального эллиптического уравнения// Докл. Адыг. (Черкес.) Междунар. акад. наук. — 2014. — *16*, № 4. — С. 31–35.
5. *Нахушев А. М.* Обратные задачи для вырождающихся уравнений и интегральные уравнения Вольтерра третьего рода// Диффер. уравн. — 1974. — *10*, № 1. — С. 100–111.
6. *Нахушев А. М.* Об одной смешанной задаче для вырождающихся эллиптических уравнений// Диффер. уравн. — 1975. — *11*, № 1. — С. 192–195.

7. *Нахушев А. М.* Задача Штурма—Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах// Докл. АН СССР. — 1977. — *234*, № 2. — С. 308–311.
8. *Нахушев А. М.* К теории дробного исчисления// Диффер. уравн. — 1988. — *24*, № 2. — С. 313–324.
9. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003.
10. *Нахушев А. М.* К теории краевых задач для нагруженных интегральных уравнений// Докл. Адыг. (Черкес.) Междунар. акад. наук. — 2014. — *16*, № 3. — С. 30–34.
11. *Псху А. В.* О краевой задаче для уравнения в частных производных дробного порядка в области с криволинейной границей// Диффер. уравн. — 2015. — *51*, № 8. — С. 1076–1082.
12. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
13. *Хубиев К. У.* О принципе экстремума для нагруженных уравнений// Докл. Адыг. (Черкес.) Междунар. акад. наук. — 2014. — *16*, № 3. — С. 47–50.
14. *Эфендиев Б. И.* Задача Дирихле для обыкновенного непрерывного дифференциального уравнения второго порядка// Мат. заметки. — 2018. — *103*, № 2. — С. 295–302.
15. *Al-Refai M., Luchko Yu.* Maximum principle for the fractional diffusion equations with the Riemann–Liouville fractional derivative and its applications// Fract. Calculus Appl. Anal. — 2014. — *17*, № 2. — С. 483–498.
16. *Эфендиев Б. И.* Задача Дирихле для обыкновенного непрерывного дифференциального уравнения второго порядка// Мат. заметки. — 2018. — *103*, № 2. — С. 295–302.
17. *Al-Refai M., Luchko Yu.* Maximum principle for the fractional diffusion equations with the Riemann–Liouville fractional derivative and its applications// Fract. Calculus Appl. Anal. — 2014. — *17*, № 2. — С. 483–498.

Псху Арсен Владимирович
Институт прикладной математики и автоматизации,
Кабардино-Балкарский научный центр РАН, Нальчик
E-mail: pskhu@list.ru