



Общероссийский математический портал

Г. И. Синько, Об обобщенных резольвентах одного интегро-дифференциального оператора второго порядка на полуоси, *Дальневост. матем. журн.*, 2005, том 6, номер 1, 71–81

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.82

13 января 2025 г., 13:14:37



© Г.И. Синько*

Об обобщенных резольвентах одного интегро-дифференциального оператора второго порядка на полуоси

В работе рассматривается симметрический интегро-дифференциальный оператор второго порядка на полуоси. Исходя из общей формулы обобщенных резольвент А.В. Штрауса, описано при помощи краевых условий квазисамосопряженное расширение симметрического интегро-дифференциального оператора, построена формула всех обобщенных резольвент этого оператора в пространстве $L^2(0, +\infty)$. Доказано, что всякая обобщенная резольвента R_λ при любом не вещественном λ является интегральным оператором.

Ключевые слова: *интегро-дифференциальный оператор, обобщенная резольвента.*

1. Пусть $a[y]$ — интегро-дифференциальное (и.-д.) выражение вида

$$a[y] = l[y] + k[y], \quad (1)$$

где $l[y] = -y'' + q(x)y$ — самосопряженное дифференциальное выражение с вещественным и суммируемым коэффициентом $q(x)$ таким, что для любого $b > 0$ $\int_0^b |q(x)| dx < +\infty$, а $k[y] = \int_0^{+\infty} K(x, s)y(s)ds$ — интегральное выражение с ненулевым вещественным симметрическим ядром Гильберта-Шмидта $K(x, s)$, удовлетворяющее условиям:

а) для любых решений $u(x, \lambda)$ уравнения $l[y] - \lambda y = 0$

$$\int_0^{+\infty} |K(x, s)u(s, \lambda)| ds < +\infty;$$

б) в окрестности вещественной оси существует и регулярно по λ решение однородного и.-д. уравнения $a[y] - \lambda y = 0$.

Как известно [1, с. 482], операцией l в гильбертовом пространстве $L^2(0, +\infty)$ порождается квазидифференциальный оператор L с минимальной областью определения D_L . Оператор L может иметь индекс дефекта либо (1.1), либо (2.2) [1, с. 483, теорема 2]. В настоящей работе рассматривается случай индекса дефекта (1.1).

Обозначим через $A = L + K$ и.-д. оператор, порождаемый и.-д. выражением (1) с минимальной областью определения $D_A = D_L$, где $Ky = k[y]$. Оператор K , порождаемый выражением $k[y]$, является симметричным вполне непрерывным оператором в $L^2(0, +\infty)$. Применяя теорему о возмущении симметрического оператора [1, с. 352] к операторам A и L , заключаем, что оператор A имеет индекс дефекта (1.1).

* УГПИ, 692500, Уссурийск, Некрасова 35.. Электронная почта: sgi@uspi.ru

2. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$l[y] - \lambda y = 0, \quad (2)$$

где l — квазидифференциальная операция, определенная выше, а λ — произвольное не вещественное число. Пусть $u_1(x, \lambda)$, $u_2(x, \lambda)$ — решения уравнения (2), удовлетворяющие соответственно начальным условиям:

$$u_1(0, \lambda) = 1, \quad u_1'(0, \lambda) = 0; \quad (3)$$

$$u_2(0, \lambda) = 0, \quad u_2'(0, \lambda) = -1. \quad (4)$$

Доказано (см., например, [6]), что для любого не вещественного λ существует единственное, притом не вещественное число $m(\lambda)$ такое, что

$$\psi(x, \lambda) = u_2(x, \lambda) + m(\lambda)u_1(x, \lambda) \in L^2(0, +\infty). \quad (5)$$

Функция $m(\lambda)$, определенная соотношением (5), регулярна в верхней полуплоскости и имеет там положительную мнимую часть, причем при любом не вещественном λ

$$m(\bar{\lambda}) = \overline{m(\lambda)}.$$

Для любой $f(x) \in L^2(0, +\infty)$ рассмотрим функцию

$$\Phi(x, \lambda; f) = \psi(x, \lambda) \int_0^x u_1(s, \lambda) f(s) ds + u_1(x, \lambda) \int_x^{+\infty} \psi(s, \lambda) f(s) ds \quad (\text{Im} \lambda > 0). \quad (6)$$

Как показано в работе [6], функция $\Phi(x, \lambda; f)$, определенная равенством (6), является значением резольвенты некоторого самосопряженного расширения оператора L на элементе f .

3. Для построения формулы всех обобщенных резольвент оператора A нам необходимо знать решение однородного и.-д. уравнения

$$a[y] - \lambda y = 0 \quad (7)$$

и решение неоднородного и.-д. уравнения

$$a[y] - \lambda y = f(x). \quad (8)$$

Для построения решения однородного и.-д. уравнения (7) преобразуем это уравнение к следующему виду:

$$l[y] - \lambda y = F(x), \quad (9)$$

где

$$F(x) = - \int_0^{+\infty} K(x, s) y(s) ds. \quad (10)$$

Пусть $u_1(x, \lambda)$, $u_2(x, \lambda)$ — фундаментальная система решений уравнения (2), удовлетворяющая соответственно начальным условиям (3) и (4). Тогда общее решение уравнения (9) можно представить в виде

$$y = c_1 u_1(x, \lambda) + c_2 u_2(x, \lambda) + \Phi(x, \lambda; F), \quad (11)$$

где c_1 , c_2 — произвольные постоянные.

Подставляя (11) в соотношение (10) и учитывая, что

$$\int_0^{+\infty} K(x, s)\Phi(s, \lambda; F)ds = \int_0^{+\infty} F(s)\Phi(s, \lambda; K(x, \circ))ds, \quad (12)$$

приходим к следующему интегральному уравнению:

$$F(x) = \varphi(x, \lambda) + \int_0^{+\infty} k(x, s, \lambda)F(s)ds, \quad (13)$$

где

$$\varphi(x, \lambda) = - \int_0^{+\infty} K(x, s)[c_1 u_1(s, \lambda) + c_2 u_2(s, \lambda)]ds, \quad k(x, s, \lambda) = -\Phi(s, \lambda; K(x, \circ)),$$

а

$$\Phi(s, \lambda; K(x, \circ)) = \psi(s, \lambda) \int_0^s K(x, t)u_1(t, \lambda) dt + u_1(s, \lambda) \int_s^{+\infty} K(x, t)\psi(t, \lambda) dt. \quad (14)$$

Итак, задача решения однородного и.-д. уравнения (7) свелась к решению интегрального уравнения (13). В силу предположения о ядре и.-д. уравнения $K(x, s)$ (см. п. 1) решение уравнения (13) существует и может быть представлено в виде

$$F(x) = \varphi(x, \lambda) + \int_0^{+\infty} r(x, s, \lambda)\varphi(s, \lambda)ds, \quad (15)$$

где

$$r(x, s, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} k_{n+1}(x, s, \lambda) -$$

резольвента интегрального уравнения с ядром $k(x, s, \lambda) = k_1(x, s, \lambda)$, а

$$k_n(x, s, \lambda) = \int_0^{+\infty} k_{n-1}(x, t, \lambda)k_1(t, s, \lambda)dt \quad (n = 2, 3, \dots)$$

— итерированные ядра уравнения (13) и $r(x, s, \lambda) \in L^2(0, +\infty)$.

Подставляя (15) в соотношение (11), получим общее решение однородного и.-д. уравнения в виде

$$\begin{aligned} y(x, \lambda) &= c_1 U_1(x, \lambda) + c_2 U_2(x, \lambda) = \\ &= c_1 u_1(x, \lambda) + c_2 u_2(x, \lambda) + \Phi \left(x, \lambda; \varphi(\circ, \lambda) + \int_0^{+\infty} r(\circ, s, \lambda)\varphi(s, \lambda)ds \right), \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$U_i(x, \lambda) = u_i(x, \lambda) + \Phi(x, \lambda; G_i(\circ, \lambda)) \quad (i = 1, 2), \quad (17)$$

а

$$G_i(s, \lambda) = - \int_0^{+\infty} K(s, t)u_i(t, \lambda)dt - \int_0^{+\infty} r(s, \tau, \lambda) \left(\int_0^{+\infty} K(\tau, t)u_i(t, \lambda)dt \right) d\tau \quad (i = 1, 2). \quad (18)$$

Нетрудно убедиться подстановкой (17) в уравнение (7), что $U_i(x, \lambda)$ ($i = 1, 2$) являются решениями однородного и.-д. уравнения (7). При проверке используется следующее известное соотношение:

$$r(s, \tau, \lambda) = k(s, \tau, \lambda) + \int_0^{+\infty} r(s, t, \lambda)k(t, \tau, \lambda)dt.$$

Таким образом, при условии, наложенном на ядро $K(x, s)$, однородное и.-д. уравнение (7) имеет решение, представимое в виде (16).

Для нахождения решения неоднородного и.-д. уравнения (8) преобразуем это уравнение к следующему виду:

$$l[y] - \lambda y = f(x) + F(x), \quad (19)$$

где $F(x)$ по-прежнему определяется формулой (10). Решая дифференциальное уравнение (19), получим

$$y = c_1 u_1(x, \lambda) + c_2 u_2(x, \lambda) + \Phi(x, \lambda; f + F)$$

или

$$y = c_1 u_1(x, \lambda) + c_2 u_2(x, \lambda) + \Phi(x, \lambda; f) + \Phi(x, \lambda; F), \quad (20)$$

где $u_1(x, \lambda)$, $u_2(x, \lambda)$ — фундаментальные решения дифференциального уравнения, удовлетворяющие условиям (3) и (4), $\Phi(x, \lambda, f)$ — резольвента некоторого самосопряженного оператора L на элементе f , определяемая формулой (6), а c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Подставляя (20) в соотношение (10), с учетом (12) приходим к следующему интегральному уравнению:

$$F(x) = \varphi_0(x, \lambda) + \int_0^{+\infty} k(x, s, \lambda)F(s)ds, \quad (21)$$

где

$$\varphi_0(x, \lambda) = - \int_0^{+\infty} K(x, s)[c_1 u_1(s, \lambda) + c_2 u_2(s, \lambda)]ds - \int_0^{+\infty} f(s)\Phi(s, \lambda; K(x, \circ))ds. \quad (22)$$

Решая интегральное уравнение (21), находим, что

$$F(x) = \varphi_0(x, \lambda) + \int_0^{+\infty} r(x, s, \lambda)\varphi_0(s, \lambda)ds, \quad (23)$$

где $r(x, s, \lambda)$ — по-прежнему резольвента интегрального уравнения (21).

Подставляя формулу (23) в соотношение (20), окончательно получаем общее решение неоднородного и.-д. уравнения (8) в виде

$$y(x, \lambda, f) = c_1 u_1(x, \lambda) + c_2 u_2(x, \lambda) + \Phi \left(x, \lambda; \varphi_0(\circ, \lambda) + \int_0^{+\infty} r(\circ, s, \lambda)\varphi_0(s, \lambda)ds \right) + \Phi(x, \lambda; f)$$

или

$$y(x, \lambda; f) = c_1 U_1(x, \lambda) + c_2 U_2(x, \lambda) + \Phi(x, \lambda; f) + \Phi(x, \lambda; g), \quad (24)$$

где функции $U_1(x, \lambda)$, $U_2(x, \lambda)$, определенные формулой (17), являются решениями однородного и.-д. уравнения (7), а

$$g = g(s; f) = - \int_0^{+\infty} K(s, t)\Phi(t, \lambda; f)dt - \int_0^{+\infty} r(s, t, \lambda) \left(\int_0^{+\infty} K(t, \tau)\Phi(\tau, \lambda; f)d\tau \right) dt.$$

Последнее соотношение с учетом (12) можно записать в следующем виде:

$$g(s; f) = - \int_0^{+\infty} f(t) \Phi(t, \lambda; K(s, \circ)) dt - \int_0^{+\infty} r(s, t, \lambda) \left(\int_0^{+\infty} f(\tau) \Phi(\tau, \lambda; K(t, \circ)) d\tau \right) dt \quad (25)$$

или

$$g(s; f) = \int_0^{+\infty} g(t, s, \lambda) f(t) dt, \quad (26)$$

$$g(t, s, \lambda) = -\Phi(t, \lambda, K(s, \circ)) - \int_0^{+\infty} r(s, \tau, \lambda) \Phi(t, \lambda, K(\tau, \circ)) d\tau.$$

Пусть $U_1(x, \lambda)$, $U_2(x, \lambda)$ — решения однородного и.-д. уравнения (7). Тогда (см. [6]) очевидно (оператор A имеет индекс дефекта (1.1)), что для любого не вещественного λ

$$\Psi(x, \lambda) \equiv U_2(x, \lambda) + m(\lambda)U_1(x, \lambda) \in L^2(0, +\infty), \quad (27)$$

при этом $\overline{\Psi(x, \lambda)} = \Psi(x, \bar{\lambda})$.

Легко подсчитать, что

$$\Psi(x, \lambda) = \psi(x, \lambda) + \psi(x, \lambda) \int_0^x u_1(s, \lambda) G(s, \lambda) ds + u_1(x, \lambda) \int_x^{+\infty} \psi(s, \lambda) G(s, \lambda) ds, \quad (28)$$

где

$$G(s, \lambda) = - \int_0^{+\infty} K(s, t) \psi(t, \lambda) dt - \int_0^{+\infty} r(s, \tau, \lambda) \left(\int_0^{+\infty} K(t, \tau) \psi(t, \lambda) dt \right) d\tau. \quad (29)$$

4. В соответствии с установленной формулой в работе [7] совокупность всех обобщенных резольвент R_λ оператора A определяется равенством

$$R_\lambda = (A_{F(\lambda)} - \lambda E)^{-1} \quad (\text{Im} \lambda \cdot \text{Im} \lambda_0 > 0), \quad (30)$$

где λ_0 — какое-либо фиксированное не вещественное число, $F(\lambda)$ — произвольная регулярная в полуплоскости операторная функция из дефектного подпространства \mathcal{N}_{λ_0} оператора A в $\mathcal{N}_{\bar{\lambda}_0}$, не превосходящая единицы по норме, а $A_{F(\lambda)}$ — квазисамосопряженное расширение оператора A , определяемое оператором $F(\lambda)$.

Для значений $\bar{\lambda}$ из другой полуплоскости ($\text{Im} \bar{\lambda} \cdot \text{Im} \lambda_0 < 0$) резольвенту $R_{\bar{\lambda}}$ можно определить, используя равенство

$$R_{\bar{\lambda}} = R_\lambda^*,$$

откуда согласно (30)

$$R_{\bar{\lambda}} = (A_{F^*(\lambda)} - \bar{\lambda} E)^{-1}, \quad (31)$$

где $F^*(\lambda)$ — операторная функция из $\mathcal{N}_{\bar{\lambda}_0}$ в \mathcal{N}_{λ_0} , сопряженная с $F(\lambda)$, а A_{F^*} — соответствующее квазисамосопряженное расширение оператора A . В работе [7] показано, что $A_{F^*} = (A_F)^*$.

Отметим, что различным операторным функциям $F(\lambda)$ соответствуют различные обобщенные резольвенты R_λ .

Напомним [7], что \mathcal{N}_λ ($\text{Im} \lambda \neq 0$) есть ортогональное дополнение в $L^2(0, +\infty)$ к линейному многообразию элементов вида $(A - \lambda E)f$ ($f \in D_A$), т. е. \mathcal{N}_λ состоит из всевозможных решений уравнения $(A^* - \bar{\lambda} E)g = 0$.

Пусть λ_0 — произвольное фиксированное не вещественное число, F — линейный оператор, действующий из \mathcal{N}_{λ_0} в $\overline{\mathcal{N}_{\lambda_0}}$. Известно, что квазисамосопряженным расширением оператора A , определяемым оператором F , называется оператор A_F , заданный на множестве

$$D_{A_F} = D_A + [F - I]\mathcal{N}_{\lambda_0}$$

равенством

$$A_F f = A f_0 - \overline{\lambda_0} \varphi + \lambda_0 F \varphi \quad (f_0 \in D_A, \varphi \in \mathcal{N}_{\lambda_0}).$$

Выясним, какова область определения $A_{F(\lambda)}$. Заметим, что при любом не вещественном λ ($\text{Im} \lambda \cdot \text{Im} \lambda_0 > 0$) оператор $A_{F(\lambda)}$ является частью оператора A^* , сопряженного с A . Введем обозначение $\Psi_\lambda = \Psi(x, \lambda)$ и заметим, что при любом не вещественном λ

$$\|\Psi_\lambda\| = \|\Psi_{\bar{\lambda}}\|.$$

Положим $\lambda_0 = i$. Тогда из определения квазисамосопряженного расширения оператора A вытекает, что операторную функцию $F(\lambda)$ можно задать формулой

$$F(\lambda)\Psi_i = \omega(\lambda)\Psi_i \quad (\text{Im} \lambda > 0), \quad (32)$$

где $\omega(\lambda)$ — произвольная регулярная в верхней полуплоскости функция, не превосходящая по модулю единицы.

Полагая

$$V_\lambda = V(x, \lambda) = \overline{\omega(\lambda)}\Psi_{-i} - \Psi_i \quad (33)$$

и используя результаты работы [6], заключаем, что многообразие $D_{A_{F(\lambda)}}$ есть совокупность всех тех элементов $y = y(x) \in D_{A^*}$, для которых имеет место равенство

$$(A^* y, V_\lambda) - (y, A^* V_\lambda) = 0.$$

В силу тождества Лагранжа это последнее равенство равносильно следующему:

$$[y(0)\overline{V'(0, \lambda)} - y'(0)\overline{V(0, \lambda)}] = 0. \quad (34)$$

Поскольку оператор A имеет индекс дефекта (1.1), то (см. [6]) для любых $y(x)$ и $V(x, \lambda)$ из D_{A^*} , справедливо соотношение

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [y(x)\overline{V'(x, \lambda)} - y'(x)\overline{V(x, \lambda)}] = 0.$$

Согласно (3), (4), (17) и (27) имеют место равенства

$$\Psi(0, \lambda) = U_2(0, \lambda) + m(\lambda)U_1(0, \lambda) = M(\lambda), \quad \Psi'(0, \lambda) = -1, \quad (35)$$

где

$$M(\lambda) = m(\lambda) + \int_0^{+\infty} \psi(s, \lambda)G(s, \lambda)ds, \quad (36)$$

а функция $G(s, \lambda)$ определена формулой (29). Тогда соотношению (34) можно придать вид

$$y(0)[1 - \omega(\lambda)] - [\omega(\lambda)M(i) - M(-i)]y'(0) = 0. \quad (37)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\vartheta(\lambda) = \frac{\omega(\lambda)M(i) - M(-i)}{1 - \omega(\lambda)} \quad (\text{Im} \lambda > 0), \quad (38)$$

причем полагаем $\vartheta(\lambda) = \infty$, если $\omega(\lambda) = 1$. Рассмотрим соотношение $\tilde{R}_\lambda f$ формулы (24). При $c_1 = c_2 = 0$ получим

$$\tilde{R}_\lambda f = \Phi(x, \lambda; f + g) = \Phi(x, \lambda; f) + \Phi(x, \lambda; g), \quad (39)$$

где $\Phi(x, \lambda; f + g)$ — последние слагаемые в этой формуле.

Так как соотношение $\Phi(x, \lambda; f)$, определяемое равенством (6), есть резольвента некоторого сопряженного расширения оператора L на элементе $f(x) \in L^2(0, +\infty)$, то $\tilde{R}_\lambda f = \Phi(x, \lambda; f + g)$ является также резольventой некоторого самосопряженного расширения дифференциального оператора L на элементе $f + g \in L^2(0, +\infty)$. Напомним, что $g = g(s; f)$ (формула (25)).

Опираясь на последние рассуждения, докажем лемму, которая в дальнейшем будет применена при построении формулы всех обобщенных резольvent. При доказательстве леммы будет использована методика А.В. Штрауса (см. [6]).

Лемма 1. *Определенная соотношением (36) комплексная функция $M(\lambda)$ регулярна в верхней полуплоскости и имеет там положительную мнимую часть.*

Доказательство. Для любого $f(x) \in L^2(0, +\infty)$ имеем

$$\tilde{R}_\lambda f = \Phi(x, \lambda; f + g) = \int_0^{+\infty} \tilde{K}(x, s, \lambda) f(s) ds \quad (\text{Im} \lambda \neq 0), \quad (40)$$

где ядро $\tilde{K}(x, s, \lambda)$ резольventы $\tilde{R}_\lambda f$ может быть представлено в виде

$$\tilde{K}(x, s, \lambda) = \begin{cases} \psi(x, \lambda) \left(u_1(s, \lambda) + \int_0^{+\infty} G(s, \lambda) u_1(s, \lambda) ds \right) & (s \leq x), \\ u_1(x, \lambda) \left(\psi(s, \lambda) + \int_0^{+\infty} G(s, \lambda) \psi(s, \lambda) ds \right) & (s > x) \end{cases}$$

или

$$\tilde{K}(x, s, \lambda) = \begin{cases} \psi(x, \lambda) U_1(s, \lambda) & (s \leq x), \\ u_1(x, \lambda) \Psi(s, \lambda) & (s > x), \end{cases} \quad (41)$$

где $\psi(x, \lambda)$ определяется формулой (5), а $U_1(s, \lambda)$, $\Psi(s, \lambda)$ определяются формулами соответственно (17) и (28).

В силу (3), (4) и соотношения (41) имеем

$$\tilde{K}(0, 0, \lambda) = M(\lambda) \quad (\text{Im} \lambda \neq 0). \quad (42)$$

Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \left(0 \leq x \leq \frac{1}{n} \right) \\ 0 & \left(x > \frac{1}{n} \right) \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Тогда согласно (42) получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\tilde{R}_\lambda f_n, f_n) = M(\lambda). \quad (43)$$

С другой стороны, при любом n ($n = 1, 2, \dots$) $(\tilde{R}_\lambda f_n, f_n)$ является регулярной в верхней полуплоскости функцией от λ , причем мнимая часть этой функции положительна, так как

$$\text{Im}(\tilde{R}_\lambda f_n, f_n) = \text{Im} \lambda \cdot \|\tilde{R}_\lambda f_n\|^2. \quad (44)$$

Из соотношений (43) и (44) следует, что $M(\lambda)$ является регулярной в верхней полуплоскости функцией, причем $\text{Im} M(\lambda) \geq 0$. Заметим, что при любом не вещественном λ $M(\bar{\lambda}) = \overline{M(\lambda)}$.

Покажем, что $\text{Im}M(\lambda) \neq 0$ для $\text{Im}\lambda > 0$. Предположим противное, что $\text{Im}M(\lambda) = 0$ при некотором λ ($\text{Im}\lambda > 0$). Тогда с учетом (43) и (44) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Im}(\tilde{R}_\lambda f_n, f_n) = \text{Im}\tilde{K}(0, 0, \lambda) = \text{Im}M(\lambda). \quad (45)$$

Из предположения в формуле (45), что $\text{Im}M(\lambda) = 0$, из формулы (46) вытекает

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{R}_\lambda f_n\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \left| \int_0^{\frac{1}{n}} \tilde{K}(x, s, \lambda) nds \right|^2 dx \quad (\text{Im}\lambda > 0). \quad (46)$$

Используя теорему Лебега, легко установить возможность предельного перехода под знаком несобственного интеграла в формуле (46).

Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \tilde{K}(x, s, \lambda) nds = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{K}(x, \xi, \lambda) = \tilde{K}(x, 0, \lambda) \quad \left(0 < \xi < \frac{1}{n}\right),$$

то равенство (46) можно записать в виде

$$\int_0^{+\infty} \left| \tilde{K}(x, 0, \lambda) \right|^2 dx = 0.$$

Отсюда вытекает: $\tilde{K}(x, 0, \lambda) = 0$ для всех $x \in [0, +\infty]$. Последнее противоречит тому, что $\tilde{K}'_x(+0, 0, \lambda) \neq 0$, и поэтому $\text{Im}M(\lambda) \neq 0$ ($\text{Im}\lambda > 0$). Таким образом, лемма доказана.

Обратимся к формуле (38). Принимая во внимание, что $M(-i) = \overline{M(i)}$ и $\text{Im}M(i) > 0$, легко заключить, что равенством (38) определяется взаимно однозначное соответствие между классом функций $\omega(\lambda)$, регулярных в верхней полуплоскости и не превосходящих по модулю единицы, и классом регулярных в этой полуплоскости функций $\vartheta(\lambda)$ с неотрицательной мнимой частью, причем последний класс пополнен несобственной функцией, равной бесконечности.

Согласно (37) можно, наконец, область определения $D_{A_{F(\lambda)}}$ оператора $A_{F(\lambda)}$ ($\text{Im}\lambda > 0$) описать следующим образом: $D_{A_{F(\lambda)}}$ есть совокупность всех тех функций $y(x) \in D_{A^*}$, которые удовлетворяют граничному условию

$$y(0) = \vartheta(\lambda)y'(0) \quad (\text{Im}\lambda > 0); \quad (47)$$

при $\vartheta(\lambda) = \infty$ это условие заменяется следующим:

$$y'(0) = 0.$$

Поскольку $F(\lambda)$ может быть произвольной операторной функцией из \mathcal{N}_i в \mathcal{N}_{-i} , регулярной в верхней полуплоскости и не превосходящей по норме единицы, то согласно формулам (32) и (38) $\vartheta(\lambda)$ может быть любой регулярной в верхней полуплоскости функцией с неотрицательной мнимой частью или тождественно обращается в бесконечность.

Из предыдущего изложения ясно, что соответствие между классом операторных функций $F(\lambda)$ и классом функций $\vartheta(\lambda)$ взаимно однозначно. Попутно заметим, что самосопряженные расширения оператора A мы получаем тогда и только тогда, когда $\vartheta(\lambda)$ есть вещественная постоянная или бесконечность.

Резюмируя, приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *Область определения $D_{A_{F(\lambda)}}$ квазисамосопряженного расширения $A_{F(\lambda)}$ и.д. оператора A есть совокупность всех тех функций $y(x) \in D_{A^*}$, которые удовлетворяют граничному условию (47), где $\vartheta(\lambda)$ — произвольная регулярная в верхней полуплоскости*

функция с неотрицательной мнимой частью, или обращается в бесконечность. При этом формулой (47) определяются самосопряженные расширения и.-д. оператора A в пространстве $L^2(0, +\infty)$ тогда и только тогда, когда $\vartheta(\lambda)$ есть вещественная постоянная или обращается в бесконечность. Соответствие между классом операторных функций $F(\lambda)$ и классом функций $\vartheta(\lambda)$ взаимно однозначно.

5. Пусть $f(x)$ — произвольная функция из $L^2(0, +\infty)$, обращающаяся в нуль вне конечного интервала. Положим

$$y(x, \lambda; f) = R_\lambda f \quad (\text{Im}\lambda \neq 0),$$

где R_λ — какая-либо обобщенная резольвента оператора A , определяемая операторной функцией $F(\lambda)$ согласно формуле (30). На основании формулы (30) заключаем, что $y(x, \lambda; f)$ является решением уравнения (8), причем это решение принадлежит области определения оператора $A_{F(\lambda)}$.

Для построения формулы всех обобщенных резольвент решение неоднородного и.-д. уравнения запишем в следующем виде:

$$y(x, \lambda; f) = c_1 U_1(x, \lambda) + c_2 \Psi(x, \lambda) + \Phi(x, \lambda; f) + \Phi(x, \lambda; g(\circ; f)), \quad (48)$$

где $U_1(x, \lambda)$, $\Psi(x, \lambda)$ — фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения (7), определяемая условиями (3), (4) и (35), а постоянные c_1 и c_2 еще подлежат определению. Так как $\Phi(x, \lambda; f)$ и $\Phi(x, \lambda; g(\circ; f)) \in L^2(0, +\infty)$ как значения резольвент некоторого самосопряженного расширения оператора L (см. п. 1) на элементах f и g , то из условия принадлежности $y(x, \lambda; f) \in L^2(0, +\infty)$ следует, что

$$c_1 = 0. \quad (49)$$

Так как $y(x, \lambda; f) \in D_{A_{F(\lambda)}}$, то она должна удовлетворять граничному условию (47), где функция $\vartheta(\lambda)$ связана с $F(\lambda)$ соотношениями (32) и (38). Принимая во внимание (3), (4) и (35), получим

$$c_2 M(\lambda) + \int_0^{+\infty} \Psi(t, \lambda) f(t) dt = -c_2 \vartheta(\lambda). \quad (50)$$

Таким образом, равенство (50) позволяет определить c_2 :

$$c_2 = -\frac{1}{M(\lambda) + \vartheta(\lambda)} \int_0^{+\infty} \Psi(t, \lambda) f(t) dt. \quad (51)$$

В силу равенств (49) и (51) формула (48) принимает вид

$$R_\lambda f = -\frac{1}{M(\lambda) + \vartheta(\lambda)} \Psi(x, \lambda) \int_0^{+\infty} \Psi(t, \lambda) f(t) dt + \Phi(x, \lambda; f) + \Phi(x, \lambda; g(\circ; f)),$$

или с учетом (41) имеем

$$\begin{aligned} R_\lambda f &= \psi(x, \lambda) \int_0^x U_1(t, \lambda) f(t) dt + u_1(x, \lambda) \int_x^{+\infty} \Psi(t, \lambda) f(t) dt - \\ &- \frac{1}{M(\lambda) + \vartheta(\lambda)} \Psi(x, \lambda) \int_0^{+\infty} \Psi(t, \lambda) f(t) dt \quad (\text{Im}\lambda > 0). \end{aligned} \quad (52)$$

Принимая во внимание соотношение $R_{\bar{\lambda}} = R_{\lambda}^*$, легко получить из формулы (52) следующее равенство:

$$R_{\bar{\lambda}}f = \overline{\psi(x, \lambda)} \int_0^x \overline{U_1(t, \lambda)} f(t) dt + \overline{u_1(x, \lambda)} \int_x^{+\infty} \overline{\Psi(t, \lambda)} f(t) dt - \\ - \frac{1}{\overline{M(\lambda) + \vartheta(\lambda)}} \overline{\Psi(x, \lambda)} \int_0^{+\infty} \overline{\Psi(t, \lambda)} f(t) dt \quad (Im \lambda > 0). \quad (53)$$

Формулу (53) можно было бы получить аналогично формуле (52), если учесть, что

$$u_j(x, \bar{\lambda}) = \overline{u_j(x, \lambda)} \quad (j = 1, 2), \quad \Psi(x, \bar{\lambda}) = \overline{\Psi(x, \lambda)}, \quad M(\bar{\lambda}) = \overline{M(\lambda)}$$

и что имеет место формула (31).

Формула (52) была нами выведена в предположении, что $f(x)$ есть функция из $L^2(0, +\infty)$, обращающаяся в нуль вне конечного интервала. Однако несобственные интегралы в правой части (52) сходятся для любой $f \in L^2(0, +\infty)$. Принимая во внимание ограниченность оператора R_{λ} , легко отсюда заключить, что равенство (52) имеет место для любой функции $f \in L^2(0, +\infty)$.

Итак, приходим к следующей теореме.

Теорема 2. *Совокупность всех обобщенных резольвент R_{λ} и.-д. оператора A при любом не вещественном λ является интегральным оператором (52), где $\vartheta(\lambda)$ — произвольная регулярная в верхней полуплоскости функция с неотрицательной мнимой частью или обращается в бесконечность. При этом различным функциям $\vartheta(\lambda)$ соответствуют различные обобщенные резольвенты. Формулой (52) определяется резольвента самосопряженного расширения в пространстве $L^2(0, +\infty)$ и.-д. оператора A тогда и только тогда, когда $\vartheta(\lambda)$ есть вещественная постоянная или обращается в бесконечность.*

В заключение отметим, что аналогичные вопросы конечномерного возмущения дифференциальных операторов рассматривались ранее в работах [2–5].

Список литературы

1. Ахиезер Н.И., Глазман И.Н. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966. 543 с.
2. Кругликова О.П. Обобщенные резольвенты и спектральные функции одного интегро-дифференциального оператора первого порядка в пространстве векторзначных функций // Функциональный анализ: межвуз. сб. Ульяновск, 1997. С. 24–30.
3. Синько Г.И. Об обобщенной резольвенте одного интегро-дифференциального оператора // Дальневосточный математический сборник. Владивосток: Дальнаука, 1998. №6. С. 57–63.
4. Синько Г.И. Спектральная теория интегро-дифференциальных операторов в гильбертовом пространстве. Уссурийск: Изд-во УГПИ, 1999. 151 с.
5. Цыганов А.В. О спектральных разложениях операторов дифференцирования // Функциональный анализ: межвуз. сб. Ульяновск, 1999. С. 53–63.
6. Штраус А.В. О спектральных функциях дифференциальных операторов // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1955. Т. 19, №4. С. 201–220.

7. Штраус А.В. Обобщенные резольвенты симметрических операторов // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954. Т. 18, №1. С. 51–86.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 2 мая 2005 г.

Sinکو G.I. About generalized resolvent of one integro-diferential operator of the second order on semiaxis. Far Eastern Mathematical Journal. 2005. V. 6. № 1–2. P. 71–81.

ABSTRACT

In this article a symmetrical integro-differential operator of the second order on semiaxis is considered. Its quasiselfadjoint extension is described, and the formula for all generalized resolvents of this operator in $L^2(0, +\infty)$ is constructed. It also proves that any generalized resolvent R_λ is an integral operator for any nonreal λ .

Key words: *integro-differential operator, generalized resolvents.*