А. И. Кошелев, Квазилинейные эллиптические вырождающиеся уравнения и сходимость одного итерационного процесса, II, *Изв. вузов. Матем.*, 1981, номер 11, 21–28

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1981 МАТЕМАТИКА № 11 (234)

А. И. Кошелев УДК 517.2

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ВЫРОЖДАЮЩИЕСЯ УРАВНЕНИЯ И СХОДИМОСТЬ ОДНОГО ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА, II

Данная статья является непосредственным продолжением статьи того же названия [1]. Как и в [1], будем рассматривать квазилинейное эллиптическое дифференциальное уравнение

$$L(u) \equiv \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial a_i(x;\ p)}{\partial x_i} - a_0(x;\ p) = 0 \tag{1}$$

с краевым условием

$$u|_{\Gamma} = 0. \tag{2}$$

Уравнение (1) рассматривается внутри конечной области $\Omega \subset R^m$, граница которой Γ достаточно гладкая.

Для задачи (1) — (2) рассматривается итерационный процесс

$$\Delta u^{(n+1)} - u^{(n+1)} = \Delta u^{(n)} - u^{(n)} - \varepsilon L(u^{(n)}). \tag{3}$$

В данной статье получим некоторые условия, при выполнении которых первые производные итераций оказываются ограниченными во внутренней области $\Omega' \subset \Omega$. Для дальнейшего нам потребуется следующая

Лемма 1. *Пусть даны произвольные положительные числа $A_1 \geqslant A_2 \geqslant \ldots \geqslant A_m > 0$ и выполняется условие*

$$d(A_i) \equiv d_A \equiv d_A(m) = \Big(\sum_{i=1}^{m} A_i\Big)^2 - (m-1)\sum_{i=1}^{m} A_i^2 > 0. \tag{4}$$

Тогда при любых вещественных числах $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} A_i\lambda_i \sum_{i=1}^{m}\lambda_i - \sigma\,\frac{S_A - \sqrt{S_A^2 - md}}{m}\Big(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\Big)^2 - \frac{S_A - \sigma(S_A - \sqrt{S_A^2 - md})}{m-1}\sum_{i<k}\lambda_i\lambda_k > 0, \tag{5}$$

где σ — произвольная неотрицательная величина, меньшая единицы, и

$$S_A \equiv S_A(m) = \sum_{i=1}^{m} A_i. \tag{6}$$

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму

$$F(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} A_i\lambda_i \sum_{i=1}^{m}\lambda_i - \mu\Big(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\Big)^2 - \nu\sum_{i<k}\lambda_i\lambda_k,$$

которую запишем в виде

$$F(\lambda) = \sum_{i=1}^{m}(A_i - \mu)\lambda_i \sum_{i=1}^{m}\lambda_i - \nu\sum_{i<k}\lambda_i\lambda_k.$$

В заметке [2] было показано, что если $0 < \mu < A_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ и

$$\nu = (S_A - m\mu)/(m-1), \tag{7}$$

то форма $F(\lambda)$ будет положительно определенной.

Легко видеть, что неравенство $d(A_i - \mu) > 0$ будет выполняться при $\mu < \frac{(S_A - \sqrt{S_A^2 - md_A})}{m}$. Остается показать, что для таких μ будет справедливо $\mu < A_i$ $(i = 1, \ldots, m)$. Достаточно показать, что $\mu < A_m$, т. е. $S_A - mA_m < \sqrt{S_A^2 - md}$. Поскольку A_i не возрастают, то $S_A(m) - mA_m \leqslant 0$. Возведем обе части в квадрат и рассмотрим равносильное неравенство $S_A^2 - 2mA_mS_A + mA_m^2 < S_A^2 - md_A$. Подставляя $S_A(m) = S_A(m-1) + A_m$, получим после элементарных вычислений очевидное неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{m-1} A_i\right)^2 - (m-1)\sum_{i=1}^{m-1} A_i^2 \leqslant 0.$$

Итак, для справедливости неравенства (5) в качестве μ достаточно взять

$$\mu = \sigma\left(S_A(m) - \sqrt{S_A^2(m) - md_A(m)}\right)/m, \tag{8}$$

а в качестве ν — выражение (7).

Рассмотрим теперь дифференциальный оператор второго порядка

$$L_0(u) = \sum_{i,\,k=1}^{m} a_{ik}u_{ik}, \tag{9}$$

и пусть A — симметричная матрица коэффициентов a_{ik}, а U — матрица вторых производных u_{ik}.

Лемма 2. *Если положительные собственные числа матрицы A удовлетворяют условию* (4), *то имеет место неравенство*

$$L_0(u)\Delta u \geqslant \sigma\frac{S - \sqrt{S^2 - md}}{m}(\Delta u)^2 + \frac{S - \sigma(S - \sqrt{S^2 - md})}{m-1}\sum_{i<k}(u_{ii}u_{kk} - u_{ik}^2), \tag{10}$$

где S — след матрицы A и d — выражение, определяемое по формуле (4).

Неравенство (10) непосредственно вытекает из неравенства (5), поскольку след матрицы U равен Δu;

$$\sum_{i<k}\lambda_i\lambda_k = \sum_{i<k}(u_{ii}u_{kk} - u_{ik}^2),$$

и справедливо равенство

$$L_0(u) = S_pAU = \sum_{i=1}^{m} A_i\lambda_i,$$

где A_i и λ_i — соответственно собственные числа матриц A и U.

Обозначим через $H_{k,\,\alpha}$ пространство функций, заданных на Ω, норма в которых определяется по формуле

$$\|u\|_{k,\,\alpha}^2 = \sup_{x\in\overline{\Omega}}\int_{\Omega}|D^ku|^2 r^{\alpha}\,dy + \|u\|^2, \tag{11}$$

где $\alpha = 2 - m - 2\gamma$ $(1 > \gamma > 0)$ и $|x - y| = r$ — расстояние между x и y. Как обычно, через $\|u\|$ обозначается норма в L_2, а через $\|u\|_k$ — норма в $W_2^{(k)}$.

Впервые в двумерном случае такие пространства были введены Л. Ниренбергом [3], затем Х. Кордес [4] применил эти пространства в случае любого m для исследования квазилинейных эллиптических уравнений. В дальнейшем С. Г. Крейном и его учениками (см., напр., [5]) эти и более общие пространства были подробно изучены и была построена общая теория таких пространств. Рассмотрим только случай $k = 2$. В этом случае имеет место неравенство

$$\sup_{\overline{\Omega}} (|Du| + |u|) \leqslant \eta \|u\|_{2,\,\alpha} + C(\eta)\|u\|_2, \tag{12}$$

где η — произвольная достаточно малая положительная постоянная и $C = \mathrm{const} > 0$[1]. Это неравенство было, по-видимому, впервые установлено Кордесом [4].

В пространстве $H_{k,\,\alpha}$ для области Ω с достаточно гладкой границей может быть введена эквивалентная норма по формуле

$$\|u\|^2_{k,\,\alpha} = \sup_{x \in \overline{\Omega}} \int_{\Omega \cap B_\delta} |D^k u|^2 r^\alpha \, dy + \|u\|^2_k, \tag{13}$$

где B_δ — шар радиуса δ с центром в точке x.

Возьмем теперь точку $x \in \Omega$ и окружим ее шарами $B_{2\delta}$ и B_δ соответственно радиусов 2δ и δ. Фиксируем некоторое достаточно малое $h > 0$ и рассмотрим внутреннюю для Ω область Ω_h, граница которой отстоит от границы Ω на h. Обозначим пересечение шара B_δ с областью Ω_h через D_δ, $\delta < h/2$.

Пусть $\psi(t)$ — трижды непрерывно дифференцируемая функция, определенная на полубесконечной прямой $t \geqslant 0$, которая при $0 \leqslant t \leqslant \delta$ совпадает с t^α, при $t = 2\delta$ обращается в нуль вместе со своими производными до третьего порядка включительно и равна нулю при $t \geqslant 2\delta$. Возведем обе части первого из равенств (3) в квадрат, умножим на $\psi(r)$ и проинтегрируем по области Ω. Тогда получим

$$\int_{D_\delta} [|\Delta^{(n+1)}|^2 - 2u^{(n+1)}\Delta u^{(n+1)} + |u^{(n+1)}|^2]\psi(r)\,dy =$$

$$= \int_{D_\delta} [|\Delta u^{(n)}|^2 - 2u^{(n)}\Delta u^{(n)} + |u^{(n)}|^2]\psi(r)\,dy -$$

$$- 2\varepsilon \int_{D_\delta} L(u^{(n)})\Delta u^{(n)}\psi(r)\,dy + 2\varepsilon \int_{D_\delta} L(u^{(n)})u^{(n)}\psi(r)\,dy + \varepsilon^2 \int_{D_\delta} [L(u^{(n)})]^2\psi(r)\,dy. \tag{14}$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$I_1 = \int_{D_\delta} L(u^{(n)})\Delta u^{(n)}\psi(r)\,dy = \int_{D_\delta} \sum_{i,\,j=1}^{m} \frac{\partial a_i}{\partial p_j} u_{ij}^{(n)}\Delta u^{(n)}\psi(r)\,dy +$$

$$+ \int_{D_\delta} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial a_i}{\partial u} u_i^{(n)}\Delta u^{(n)}\psi(r)\,dy - \int_{D_\delta} a_0\Delta u^{(n)}\psi(r)\,dy + \int_{D_\delta} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial a_i}{\partial x_i'}\Delta u^{(n)}\psi(r)\,dy.$$

Обозначим через A матрицу, составленную из элементов $(1/2)(\partial a_i/\partial p_j + \partial a_j/\partial p_i)$ $(i, j = 1, \ldots, m)$, и применим неравенство (10). Это приведет к следующей оценке:

$$I_1 \geqslant \int_{D_\delta} \Big[\sigma \frac{S - \sqrt{S^2 - md}}{m} |\Delta u^{(n)}|^2 + \frac{S - \sigma(S - \sqrt{S^2 - md})}{2(m-1)} \sum_{i=1}^{m} (u_{ii}^{(n)} u_{kk}^{(n)} - |u_{ik}^{(n)}|^2)\psi\Big]dy -$$

$$- \sum_{i=1}^{m} \int_{D_\delta} \frac{\partial a_i}{\partial u} |u_i^{(n)}|\,|\Delta u^{(n)}|\psi dy - \int_{D_\delta} |a_0|\,|\Delta u^{(n)}|\psi dy - \int_{D_\delta} \Big|\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial a_i}{\partial x_i'}\Big|\,|\Delta u^{(n)}|\psi dy.$$

[1] В дальнейшем через C будем обозначать произвольную положительную постоянную, а через η — произвольную достаточно малую положительную постоянную.

Применяя неравенства (3), (22) статьи [1] и (12) при достаточно малом η, получим

$$I_1 \geqslant \int_{D_\delta} \left\{ S\left[\sigma \frac{m-2}{2m(m-1)} + \frac{1}{2(m-1)}\right] - \sigma\sqrt{S^2 - md}\, \frac{m-2}{2m(m-1)} \right\} |\Delta u^{(n)}|^2 \psi dy -$$

$$- \int_{D_\delta} \frac{S(1-\sigma) + \sigma\sqrt{S^2-md}}{2(m-1)} \sum_{i,k=1}^{m} |u_{ik}^{(n)}|^2 \psi dy - \eta \int_{D_\delta} \frac{|\Delta u^{(n)}|^2}{(1+|p^{(n)}|^2)^{s/2}} \psi dy -$$

$$- C(\eta) \int_{D_\delta} (1+|p^{(n)}|^2)^{s/2} \sum_{i=1}^{m} \left[\left|\frac{\partial a_i}{\partial u}\right|^2 |u_i^{(n)}|^2 + |a_0|^2 \right] \psi dy.$$

Из неравенств (3) статьи [1] следует

$$\int_{D_\delta} (1+|p^{(n)}|^2)^{s/2} \left[\sum_{i=1}^{m} \left|\frac{\partial a_i}{\partial u}\right|^2 |u_i^{(n)}|^2 + |a_0|^2 \right] \psi dy \leqslant$$

$$\leqslant C \int_{D_\delta} (1+|p^{(n)}|^2)^{1-s/2} \psi dy \leqslant C \int_{D_\delta} (1+|p^{(n)}|^2) \psi dy \leqslant C\, [1 + \max_{\overline{\Omega}_{2\delta}} |p^{(n)}|^2].$$

Применяя неравенство (12), получим

$$\int_{D_\delta} (1+|p^{(n)}|^2)^{s/2} \left[\sum_{i=1}^{m} \left|\frac{\partial a_i}{\partial u}\right|^2 |u_i^{(n)}|^2 + |a_0|^2 \right] \psi dy \leqslant C\,[1 + \eta \|u^{(n)}\|_{2,\alpha}^2 + C(\eta)\|u^{(n)}\|_2^2],$$

где $\|u^{(n)}\|_{2,\alpha}$ берется по области $\Omega_{2\delta}$ и $\|u\|_2$ — по области Ω_δ. В результате получим оценку

$$I_1 \geqslant \int_{D_\delta} \left\{ S\left[\sigma \frac{m-2}{2m(m-1)} + \frac{1}{2(m-1)}\right] - \sigma\sqrt{S^2 - md}\, \frac{m-2}{2m(m-1)} \right\} |\Delta u^{(n)}|^2 \psi dy -$$

$$- \int_{D_\delta} \frac{S(1-\sigma) + \sqrt{S^2-md}\,\sigma}{2(m-1)} \sum_{i,k=1}^{m} |u_{ik}^{(n)}|^2 \psi dy -$$

$$- \eta \int_{D_\delta} \frac{|\Delta u^{(n)}|^2}{(1+|p^{(n)}|^2)^{s/2}} \psi dy - \eta \|u^{(n)}\|_{2,\alpha}^2 - C\|u^{(n)}\|_2^2. \tag{15}$$

Теперь рассмотрим интеграл

$$I_2 = \int_{D_\delta} [L(u^{(n)})]^2 \psi(r)\, dy \leqslant C \int_{D_\delta} \left[\sum_{i,j=1}^{m} \left(\frac{\partial a_i}{\partial p_j}\right)^2 |u_{ij}^{(n)}|^2 + \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial a_i}{\partial u}\right)^2 |u_i^{(n)}|^2 + a_0^2 \right] \psi dy \leqslant$$

$$\leqslant C \int_{D_\delta} \left[\sum_{i,j=1}^{m} \left(\frac{\partial a_i}{\partial p_j}\right)^2 |u_{ij}^{(n)}|^2 + \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial a_i}{\partial u}\right)^2 |u_i^{(n)}|^2 + a_0^2 \right] \psi dy + \ldots,$$

где в многоточие мы включили выражения, содержащие производные a_i непосредственно по x. Используя свойства коэффициентов (неравенства (3) статьи [1]), придем к оценке

$$I_2 \leqslant C \left[\int_{D_\delta} \frac{1}{(1+|p^{(n)}|^2)^{s/2}} \sum_{i,j=1}^{m} |u_{ij}^{(n)}|^2 \psi dy + \int_{D_\delta} \left(\sum_{i=1}^{m} |u_i^{(n)}|^2 + a_0^2 \right) \psi dy \right]. \tag{16}$$

С помощью аналогичных методов получается также следующая оценка:

$$\int\limits_{D_\delta} L[u^{(n)}]\, u^{(n)} \psi dy \geqslant -\eta \| u^{(n)} \|^2_{2,\alpha} - C(\eta) \| u^{(n)} \|^2_2 . \tag{17}$$

Осталось в формуле (14) рассмотреть интеграл

$$I_3 = \int\limits_{D_\delta} [\,|\Delta u^{(n)}|^2 - 2u^{(n)} \Delta u^{(n)} + |u^{(n)}|^2] \psi(r)\, dy. \tag{18}$$

Среднее слагаемое в I_3 может быть оценено следующим образом:

$$\Big| \int\limits_{D_\delta} u^{(n)} \Delta u^{(n)} \psi dy \Big| \leqslant \eta \int\limits_{D_\delta} |\Delta u^{(n)}|^2 \psi dy + C(\eta) \int\limits_{D_\delta} |u^{(n)}|^2 \psi dy.$$

Отсюда с помощью неравенства (12) получается соотношение

$$\Big| \int\limits_{D_\delta} u^{(n)} \Delta u^{(n)} \psi dy \Big| \leqslant \eta \| u^{(n)} \|^2_{\alpha, 2} + C(\eta) \| u^{(n)} \|^2_2 .$$

Тогда для интеграла I_3 получим

$$I_3 \geqslant \int\limits_{D_\delta} (\,|\Delta u^{(n)}|^2 + |u^{(n)}|^2) \psi dy - \eta \| u^{(n)} \|^2_{\alpha, 2} - C(\eta) \| u^{(n)} \|^2_2 \tag{19}$$

и

$$I_3 \leqslant \int\limits_{D_\delta} (\,|\Delta u^{(n)}|^2 + |u^{(n)}|^2) \psi dy + \eta \| u^{(n)} \|^2_{\alpha, 2} + C(\eta) \| u^{(n)} \|^2_2 . \tag{20}$$

Понадобится еще одно неравенство, которое является следствием соотношения, установленного Кордесом, и которое для шара $B_{2\delta}$ может быть записано в виде

$$\int\limits_{B_{2\delta}} \sum_{i,k=1}^{m} |u_{ik}|^2 \psi(r)\, dy \leqslant \left[1 + \frac{m-2}{m+1} + O(\gamma)\right] \int\limits_{B_{2\delta}} |\Delta u|^2 \psi(r)\, dy + C \| u \|^2_2 .$$

Это неравенство доказано тогда, когда $u_{\partial B_{2\delta}} = u_i |_{\partial B_{2\delta}} = 0$ в статье Кордеса [4] (с. 296).

Нетрудно получить аналогичную оценку в том случае, когда интегрирование распространяется по области $D_{2\delta} = B_{2\delta} \cap \Omega_h$. Для этого продолжим Δu на область $B_{2\delta} \setminus (B_{2\delta} \cap \Omega_h)$ так, чтобы

$$\int\limits_{B_{2\delta} \setminus (B_{2\delta} \cap \Omega_h)} |\Delta u|^2 \psi dy \leqslant C \Big(\int\limits_{D_{2\delta}} |\Delta u|^2 \psi dy + \int\limits_{B_{2\delta}} |\Delta u|^2 dy \Big) .$$

Затем в интеграле $\sum\limits_{i,k=1}^{m} \int\limits_{B_{2\delta}} u_{ik}^2 \psi dy$ после перебрасывания два раза производных получившиеся интегралы надо разбить на интегралы по области B_δ и по области $B_{2\delta} \setminus B_\delta$. Первый интеграл оценивается так же, как и при получении оценки Кордеса, а во втором интеграле производные функции ψ как производные гладкой функции оцениваются константами. В результате получим неравенство

$$\int\limits_{D_\delta} \sum_{i,k=1}^{m} |u_{ik}^{(n)}|^2 \psi dy \leqslant C \Big[\int\limits_{D_\delta} |\Delta u^{(n)}|^2 \psi dy + \| u^{(n)} \|^2_2 \Big] . \tag{21}$$

Лемма 3. *Если разброс собственных чисел матрицы $A=\{(1/2)(\partial a_i/\partial p_j+\partial a_j/\partial p_i)\}$ ограничен, т. е. при всех x, u, p имеет место неравенство*

$$S^2-md\leqslant\eta_0 S^2, \tag{22}$$

где η_0 — достаточно малое положительное число, то для последовательных приближений процесса (3) *при достаточно малых $\varepsilon>0$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_{D_\delta}(|\Delta u^{(n+1)}|^2+|u^{(n+1)}|^2)\psi dy\leqslant\int\limits_{D_\delta}(|\Delta u^{(n)}|^2+|u^{(n)}|^2)\psi dy-$$

$$-\varepsilon_0\int\limits_{D_\delta}(|\Delta u^{(n)}|^2+|u^{(n)}|^2)\psi dy\Big[1+\int\limits_{D_\delta}(|\Delta u^{(n)}|^2+|u^{(n)}|^2)\psi dy\Big]^{-s/2}+$$

$$+\eta(\|u^{(n+1)}\|^2_{2,\alpha}+\|u^{(n)}\|^2_{2,\alpha})+C(\|u^{(n)}\|^2_2+\|u^{(n+1)}\|^2_2), \tag{23}$$

где $\varepsilon_0=\mathrm{const}>0$, которая при малом ε и малом η_0 может быть сделана произвольно малой.

Для доказательства возьмем в неравенстве (15) σ достаточно близкой к единице. Тогда в силу предположения получим

$$\int\limits_{D_\delta}L[u^{(n)}]\,\Delta u^{(n)}\psi dy\geqslant\left(\frac{1}{m}-\eta\right)\int\limits_{D_\delta}(|\Delta u^{(n)}|^2+|u^{(n)}|^2)\times$$

$$\times(1+|p^{(n)}|^2)^{-s/2}\psi dy-\eta\int\limits_{D_\delta}\sum_{i,k=1}^{m}|u^{(n)}_{ik}|^2\psi dy-\eta\|u^{(n)}\|^2_{2,\alpha}-C\|u^{(n)}\|^2_2.$$

Используя неравенства (12) и (21), а также произвольность $\eta>0$, получим

$$\int\limits_{D_\delta}L[u^{(n)}]\,\Delta u^{(n)}\psi dy\geqslant\left(\frac{1}{m}-\eta\right)\int\limits_{D_\delta}(|\Delta u^{(n)}|^2+|u^{(n)}|^2)\psi dy\times$$

$$\times\Big[\int\limits_{D_\delta}(1+|\Delta u^{(n)}|^2+|u^{(n)}|^2)\psi dy\Big]^{-s/2}-\eta\int\limits_{D_\delta}(|\Delta u^{(n)}|^2+|u^{(n)}|^2)\psi dy-\eta\|u^{(n)}\|^2_{2,\alpha}-C\|u^{(n)}\|^2_2.$$

Тогда из равенства (14), используя оценки (16), (17), (19) и (20), получим требуемое неравенство (22).

Выберем теперь в качестве нормы $\|u^{(n)}\|_{2,\alpha}$ выражение, определяемое равенством (13). Тогда найдется такая фиксированная точка $x_n\in\Omega_h$ и соответствующая ей область $D_\delta^{(n)}$, для которых выполнено неравенство

$$\sum_{i,k=1}^{n}\int\limits_{D_\delta^{(n)}}|u^{(n)}_{ik}|^2\psi dy\geqslant\|u^{(n)}\|^2_{2,\alpha}-\varepsilon,$$

где ε — произвольно малая положительная величина. Тогда из неравенства (21) следует

$$\int\limits_{D_\delta^{(n)}}|\Delta u^{(n)}|^2\psi dy\geqslant C\|u^{(n)}\|^2_{2,\alpha}-\varepsilon. \tag{24}$$

Запишем неравенство (23) для шара $D_\delta^{(n+1)}$:

$$\int\limits_{D_\delta^{(n+1)}} (|\Delta u^{(n+1)}|^2 + |u^{(n+1)}|^2)\psi dy \leqslant \int\limits_{D_\delta^{(n+1)}} (|\Delta u^{(n)}|^2 + |u^{(n)}|^2)\psi dy -$$

$$- \varepsilon_0 \int\limits_{D_\delta^{(n+1)}} (|\Delta u^{(n)}|^2 + |u^{(n)}|^2)\psi dy \Big[1 + \int\limits_{D_\delta^{(n+1)}} (1 + |\Delta u^{(n)}|^2 + |u^{(n)}|^2)\psi dy\Big]^{-s/2} +$$

$$+ \eta(\|u^{(n+1)}\|_{2,\alpha}^2 + \|u^{(n)}\|_{2,\alpha}^2) + CK_n, \tag{25}$$

где

$$K_n = \|u^{(n)}\|_2. \tag{26}$$

Поскольку функция $\varphi(x) = x - \varepsilon_0 x/(1+x)^s$ при достаточно малом ε_0 является при $x \geqslant 0$ возрастающей функцией, то неравенство (25) может быть усилено, если мы справа будем интегрировать по области $D_\delta^{(n)}$. В этом случае придем к неравенству

$$\int\limits_{D_\delta^{(n+1)}} (|\Delta u^{(n+1)}|^2 + |u^{(n+1)}|^2)\psi dy \leqslant \int\limits_{D_\delta^{(n)}} (|\Delta u^{(n)}|^2 + |u^{(n)}|^2)\psi dy -$$

$$- \varepsilon_0 \int\limits_{D_\delta^{(n)}} (|\Delta u^{(n)}|^2 + |u^{(n)}|^2)\psi dy \Big[\int\limits_{D_\delta^{(n)}} (1 + |\Delta u^{(n)}|^2 + |u^{(n)}|^2)\psi dy\Big]^{-s/2} +$$

$$+ \eta(\|u^{(n+1)}\|_{2,\alpha}^2 + \|u^{(n)}\|_{2,\alpha}^2) + CK_n.$$

Воспользуемся теперь неравенством (24) и произвольностью η. Тогда предыдущее неравенство примет вид

$$\int\limits_{D_\delta^{(n+1)}} (|\Delta u^{(n+1)}|^2 + |u^{(n+1)}|^2)\psi dy \leqslant (1+\eta) \int\limits_{D_\delta^{(n)}} (|\Delta u^{(n)}|^2 + |u^{(n)}|^2)\psi dy -$$

$$- \varepsilon_0 \int\limits_{D_\delta^{(n)}} (|\Delta u^{(n)}|^2 + |u^{(n)}|^2)\psi dy \Big[\int\limits_{D_\delta^{(n)}} (1 + |\Delta u^{(n)}|^2 + |u^{(n)}|^2)\psi dy\Big]^{-s/2} + CK_n.$$

Введем обозначение

$$y_n = \int\limits_{D_\delta^{(n)}} (|\Delta u^{(n)}|^2 + |u^{(n)}|^2)\psi dy. \tag{27}$$

Тогда y_n удовлетворяет неравенству

$$y_{n+1} \leqslant (1+\eta) y_n - \varepsilon_0 y_n/(1+y_n)^{s/2} + CK_n.$$

Если начальное приближение y_0 выбрано в определенных пределах и величина K_n ограничена достаточно малым числом, то y_n будут ограничены. Очевидно, что y_0 должно быть выбрано в области, где функция

$$\Psi(y) = \eta y - \varepsilon_0 y/(1+y)^{s/2} + CK \qquad (K = \sup_n K_n)$$

будет неположительной. Легко проверить, что при $y = (\varepsilon_0/\eta)^{2/(s+2)} - 1$ функция Ψ будет неположительной при достаточно малом K. При этом параметры η и ε_0 должны быть подобраны так, чтобы выполнялось неравенство $\eta < \varepsilon_0$.

Пусть коэффициенты a_i уравнения (1) удовлетворяют условиям 1 и 2 статьи [1], матрица A имеет достаточно малый разброс собственных чисел (γ_0 достаточно мало), ε — достаточно малое число, и пусть существует трижды непрерывно дифференцируемое внутри Ω решение задачи (1) — (2).

Мы показали в статье [1], что при сделанных предположениях, величины K_n ограничены, т. е. имеет место оценка $\|u^{(n)}\|_2 \leqslant K$.

Таким образом, справедлива

Теорема. *Если начальное приближение $u^{(0)}$ итерационного процесса* (3), *являющееся достаточно гладким, лежит в смысле нормы $H_{2,\alpha}$ в определенных пределах и величина K достаточно мала, то строго внутри области имеет место неравенство $|p^{(n)}| < C$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Кошелев А. И. Квазилинейные эллиптические вырождающиеся уравнения и сходимость одного итерационного процесса, I.— Изв. вузов. Матем., 1981, № 10, с. 31—40.

2. Кошелев А. И. Об одном неравенстве для эллиптических операторов второго порядка с ограниченными коэффициентами.— Изв. вузов. Матем., 1971, № 12, с. 75—80.

3. Nirenberg L. On nonlinear elliptic partial differential equations and Hölder continuity.— Communs Pure and Appl. Math., 1953, v. 6, № 1, p. 103—156.

4. Cordes H. O. Über die erste Randwertaufgabe bei quasilinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in mehr als zwei Variablen.— Math. Ann., 1956, Bd. 131, № 3, S. 278—312.

5. Глушко В. П., Крейн С. Г. Неравенства для норм производных в пространствах L_p с весом.— Сиб. матем. журн., 1960, т. I, № 3, с. 343—382.

г. Ленинград

Поступила
11 XI 1980