Доклады Академии наук СССР
1989. Том 309, № 1

УДК 533.6.12 АЭРОДИНАМИКА

© В.И. ЖУК, О.С. РЫЖОВ

О ТРЕХМЕРНЫХ НЕВЯЗКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ, ИНДУЦИРУЮЩИХ СОБСТВЕННЫЙ ГРАДИЕНТ ДАВЛЕНИЯ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

(Представлено академиком А.А. Дородницыным 30 III 1988)

Предположим, что на расстоянии L от передней кромки плоской пластины в пограничный слой внесено возмущение скорости амплитуды ΔU_∞ и длины волны λL. Пусть безразмерные время t, декартовы координаты x, y, z, компоненты скорости u, v, w, плотность ρ и избыточное давление p введены посредством величин LU_∞^{-1}, L, U_∞, ρ_∞, $\rho_\infty U_\infty^2$ соответственно, плоскость xz совпадает с поверхностью пластины, а набегающий поток с плотностью ρ_∞, скоростью U_∞, первым коэффициентом вязкости μ_∞ и числом Маха M_∞ направлен вдоль оси x. Определим число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \rho_\infty U_\infty L/\mu_\infty$ и будем считать $\Delta \to 0$, $\mathrm{Re} \to \infty$, $\lambda = \Delta^{-1}\mathrm{Re}^{-1/2}$. Поскольку продольная компонента скорости U_0 и плотность R_0 в невозмущенном пограничном слое зависят от вертикальной координаты $Y_m = \mathrm{Re}^{1/2} y$, причем

$$U_0 = \lambda_1 Y_m + \ldots, \quad R_0 = r_1 + \ldots, \tag{1}$$

для малых значений Y_m, возмущения в пристеночном подслое $Y_m = O(\Delta)$ подчиняются нелинейным уравнениям. Образуем переменные

$$T = \Delta^2 \mathrm{Re}^{1/2} t, \quad X = \Delta \mathrm{Re}^{1/2} x, \quad Y_a = \Delta^{-1}\mathrm{Re}^{1/2} y, \quad Z = \Delta \mathrm{Re}^{1/2} z$$

и запишем решение уравнений Навье–Стокса в указанном подслое следующим образом:

$$\begin{aligned} &u = \Delta u_a(T, X, Y_a, Z) + \ldots, \quad v = \Delta^3 v_a(T, X, Y_a, Z) + \ldots, \\ &w = \Delta w_a(T, X, Y_a, Z) + \ldots, \quad \rho = \rho_a(T, X, Y_a, Z) + \ldots, \\ &p = \Delta^2 p_a(T, X, Y_a, Z) + \ldots \end{aligned} \tag{2}$$

Из представления (2) вытекает система уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho_a}{\partial T} + \frac{\partial u_a \rho_a}{\partial X} + \frac{\partial v_a \rho_a}{\partial Y_a} + \frac{\partial w_a \rho_a}{\partial Z} = 0, \quad \frac{\partial p_a}{\partial Y_a} = 0, \\ &\rho_a \frac{\partial u_a}{\partial T} + \rho_a u_a \frac{\partial u_a}{\partial X} + \rho_a v_a \frac{\partial u_a}{\partial Y_a} + \rho_a w_a \frac{\partial u_a}{\partial Z} = -\frac{\partial p_a}{\partial X} + \Delta^{-4}\mathrm{Re}^{-1/2}\frac{\partial}{\partial Y_a}\left(\mu \frac{\partial u_a}{\partial Y_a}\right), \\ &\rho_a \frac{\partial w_a}{\partial T} + \rho_a u_a \frac{\partial w_a}{\partial X} + \rho_a v_a \frac{\partial w_a}{\partial Y_a} + \rho_a w_a \frac{\partial w_a}{\partial Z} = -\frac{\partial p_a}{\partial Z} + \Delta^{-4}\mathrm{Re}^{-1/2}\frac{\partial}{\partial Y_a}\left(\mu \frac{\partial w_a}{\partial Y_a}\right), \\ &\frac{\partial \rho_a}{\partial T} + u_a \frac{\partial \rho_a}{\partial X} + v_a \frac{\partial \rho_a}{\partial Y_a} + w_a \frac{\partial \rho_a}{\partial Z} = -\rho_a \Delta^{-4}\mathrm{Re}^{-1/2}\frac{\partial}{\partial Y_a}\left(\frac{\mu}{\mathrm{Pr}} \frac{\partial}{\partial Y_a} \frac{1}{\rho_a}\right); \end{aligned} \tag{3}$$

здесь μ, Pr – первый коэффициент вязкости и число Прандтля.

Таким образом, при $\Delta = O(\mathrm{Re}^{-1/8})$ возмущения в нелинейном пристеночном подслое описываются уравнениями Прандтля, а нормировка независимых переменных t, x, y, z в точности совпадает с принятой в теории свободного взаимодействия [1–5]. Случай $\mathrm{Re}^{-1/8} \ll \Delta \ll 1$ характеризуется тем, что влияние вязкости в области $Y_a = O(1)$ становится малым, а длина волны и временной масштаб возмущений короче, чем соответствующие величины порядка $\mathrm{Re}^{-3/8}$ и $\mathrm{Re}^{-1/4}$, фигурирующие в трехслойной теории [1–5].

Решение в основной толще пограничного слоя $Y_m = O(1)$ очевидно из (2), а именно:

$$
\begin{aligned}
&u = U_0(Y_m) + \Delta u_{1m} + \Delta^2 u_{2m} + \ldots, \qquad v = \Delta^2 v_{1m} + \Delta^3 v_{2m} + \ldots,\\
(4)\qquad &w = \Delta^2 w_{1m} + \Delta^3 w_{2m} + \ldots, \qquad \rho = R_0(Y_m) + \Delta \rho_{1m} + \Delta^2 \rho_{2m} + \ldots,\\
&p = \Delta^2 p_{1m} + \Delta^3 p_{2m} + \ldots
\end{aligned}
$$

Возмущающие функции с индексами $1m$, $2m$, ..., зависящие от T, X, Y_m, Z, в результате подстановки (4) в уравнения Навье–Стокса могут быть найдены в виде явных выражений [1–5]

$$
\begin{aligned}
&u_{1m} = A(T, X, Z)\frac{dU_0}{dY_m}, \qquad v_{1m} = -\frac{\partial A}{\partial X} U_0(Y_m),\\
(5)\qquad &w_{1m} = -\frac{1}{U_0(Y_m)R_0(Y_m)} \int_{-\infty}^{X} \frac{\partial p_{1m}}{\partial Z}\, dX_1,\\
&\rho_{1m} = A(T, X, Z)\frac{dR_0}{dY_m}, \qquad p_{1m} = p_{1m}(T, X, Z),
\end{aligned}
$$

где функция $A(T, X, Z)$ остается произвольной. Предел разложения (4) при $Y_m \to 0$ служит асимптотическим краевым условием на верхнем краю нелинейного подслоя для системы уравнений (3). С учетом выписанных в [4] членов второго приближения $u_{2m}, v_{2m}, w_{2m}, \rho_{2m}, p_{2m}$ имеем при $Y_a \to \infty$:

$$
\begin{aligned}
&u_a = \lambda_1(Y_a + A) + \frac{1}{\lambda_1 r_1 Y_a} \int_{-\infty}^{X} dX_1 \int_{-\infty}^{X_1} \frac{\partial^2 p_a}{\partial Z^2}\, dX_2,\\
&v_a = -\lambda_1 \frac{\partial A}{\partial X} Y_a - \frac{\partial A}{\partial T} - \lambda_1 A \frac{\partial A}{\partial X} - \frac{1}{\lambda_1 r_1}\left(\frac{\partial p_a}{\partial X} + \int_{-\infty}^{X} \frac{\partial^2 p_a}{\partial Z^2}\, dX_1\right),\\
(6)\qquad &w_a = -\frac{1}{\lambda_1 r_1 Y_a} \int_{-\infty}^{X} \frac{\partial p_a}{\partial Z}\, dX_1 - \frac{1}{\lambda_1 r_1 Y_a^2} \int_{-\infty}^{X}\left(A \frac{\partial p_a}{\partial Z} + \frac{\partial A}{\partial X_1} \int_{-\infty}^{X_1} \frac{\partial p_a}{\partial Z}\, dX_2 +\right.\\
&\left. + \frac{1}{\lambda_1} \int_{-\infty}^{X_1} \frac{\partial^2 p_a}{\partial T \partial Z}\, dX_2\right) dX_1, \qquad \rho_a = r_1.
\end{aligned}
$$

Формулы (6) относятся к случаю теплоизолированной поверхности, причем равенство $dR_0(0)/dY_m = 0$ позволяет принять $\rho = \rho_a + O(\Delta^2)$, $\rho_a = r_1$ всюду в нелинейной области.

Возмущение давления во внешнем потенциальном течении, индуцированное ростом толщины вытеснения пограничного слоя, описывается уравнением Лапласа ($\mathrm{M}_\infty < 1$) либо волновым уравнением ($\mathrm{M}_\infty > 1$). Решение указанных уравнений с получаемыми предельным переходом $Y_m \to \infty$ в разложении (4) граничными условиями устанавливает связь между искомыми функциями p_a и A [4, 5]:

$$
(7) \qquad p_a = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\partial^2 A/\partial \xi^2}{[(X-\xi)^2 + (1-\mathrm{M}_\infty^2)(Z-\zeta)^2]^{1/2}}\, d\xi d\zeta \text{ при } \mathrm{M}_\infty < 1, \\ -\dfrac{1}{\pi} \displaystyle\iint\limits_{S(X,Z)} \dfrac{\partial^2 A/\partial \xi^2}{[(X-\xi)^2 - (\mathrm{M}_\infty^2 - 1)(Z-\zeta)^2]^{1/2}}\, d\xi d\zeta \text{ при } \mathrm{M}_\infty > 1, \end{cases}
$$

где через $S(X, Z)$ обозначена область интегрирования $|\zeta - Z| < (X-\xi)(\mathrm{M}_\infty^2 - 1)^{1/2}$, $\xi < X$ на плоскости ξ, ζ.

Неравенство $\Delta \gg \mathrm{Re}^{-1/8}$ означает, что нелинейный подслой разделяется на основную невязкую часть $Y_a = O(1)$, в которой членами с μ в уравнениях (3) можно пренебречь, и вязкую пристеночную область толщины $Y_a = O(\Delta^{-2}\mathrm{Re}^{-1/4})$. Сращивание решений на верхней границе вязкой области в первом приближении дает условие непротекания

$$
(8) \qquad v_a = 0 \text{ при } Y_a = 0.
$$

В качестве граничного условия вверх по потоку естественно принять

$$
(9) \qquad u_a \to \lambda_1 Y_a, \quad w_a \to 0, \quad p_a \to 0 \text{ при } X \to -\infty.
$$

Заметим, что специальное преобразование переменных [1–5] позволяет исключить постоянные λ_1 и r_1, поэтому в (6), (9) можно положить $\lambda_1 = r_1 = 1$.

Эволюция трехмерных возмущений рассматриваемого класса при выполнении амплитудного условия $\Delta \gg \mathrm{Re}^{-1/8}$ сводится, как следует из вышеизложенного, к интегрированию нелинейных уравнений

$$
(10) \qquad \begin{gathered} \frac{\partial u_a}{\partial X} + \frac{\partial v_a}{\partial Y_a} + \frac{\partial w_a}{\partial Z} = 0, \quad \frac{\partial p_a}{\partial Y_a} = 0, \\ \frac{\partial u_a}{\partial T} + u_a \frac{\partial u_a}{\partial X} + v_a \frac{\partial u_a}{\partial Y_a} + w_a \frac{\partial u_a}{\partial Z} = -\frac{\partial p_a}{\partial X}, \\ \frac{\partial w_a}{\partial T} + u_a \frac{\partial w_a}{\partial X} + v_a \frac{\partial w_a}{\partial Y_a} + w_a \frac{\partial w_a}{\partial Z} = -\frac{\partial p_a}{\partial Z} \end{gathered}
$$

с граничными условиями (6)–(9). Поскольку в процессе решения сформулированной задачи наряду с давлением p_a находится функция A, то в соответствии с (5) полностью определяется решение в основной толще пограничного слоя $Y_m = O(1)$. Что касается вязкой пристеночной области, то она играет пассивную роль, так как решение в ней может быть получено интегрированием уравнений Прандтля по известному p_a.

В качестве примера рассмотрим возмущение потока волнистой поверхностью, задаваемой уравнением

$$
Y_a = G(T, X, Z) = \chi G_0 e^{i\omega T + ikX + ilZ}.
$$

Условие $\Delta^{-2}\mathrm{Re}^{-1/4} \ll \chi \ll 1$ позволяет линеаризовать систему уравнений (10), не нарушая предположений, положенных в основу ее вывода. Граничное условие непротекания вместо (8), очевидно, принимает вид $v_a = \partial G/\partial T$ при $Y_a = 0$, а (9) может быть заменено на требование периодичности. Полагая

$$
(11) \qquad [u_a - Y_a, v_a, w_a, p_a] = \chi[f(Y_a), g(Y_a), h(Y_a), q] e^{i\omega T + ikX + ilZ},
$$

нетрудно получить

$$(12)\quad f=\frac{q}{k}\left[\frac{l^2}{\omega+kY_a}-\frac{k^2+l^2}{\omega}\right]-G_0,\ g=-ikq-i(\omega+kY_a)f,\ \ h=-\frac{lq}{\omega+kY_a}.$$

Асимптотическое краевое условие (6) и условие взаимодействия (7) определяют входящую в выражения (12) амплитуду давления q. При $M_\infty < 1$ имеем

$$q=\frac{\omega k^2 G_0}{\omega\theta+k(k^2+l^2)},\qquad \theta=\left(k^2+\frac{l^2}{1-M_\infty^2}\right)^{1/2}.$$

В случае действительных ω и k, соответствующих возмущениям типа бегущей с фазовой скоростью $c=-\omega/k$ волны, компоненты скорости u_a и w_a содержат особенность при критическом значении координаты $Y_a = c$. Такая же особенность присуща собственным колебаниям ($G_0 = 0$) в линейном приближении, поскольку действительные ω и k являются решениями дисперсионного уравнения

$$(13)\quad \omega=-k\,\frac{k^2+l^2}{[k^2+l^2(1-M_\infty^2)^{-1}]^{1/2}}.$$

Соотношение вида (13), возникающее при отыскании собственных функций однородной линеаризованной задачи (10), (6)–(8) (совместо с (9) либо условием периодичности), может быть получено также из дисперсионного уравнения [6] вязкой теории свободного взаимодействия в пределе больших частот и волновых чисел.

Особенность в решении (11) с действительными ω и k указывает на существование критического слоя в окрестности $Y_a = c$, где отбрасывание вязких членов при $\chi \to 0$ незаконно. Отличительной чертой трехмерной задачи является появление такой особенности уже в первом приближении по параметру Δ. В двумерном варианте рассматриваемой теории [7] первые члены разложения (2), отыскание которых сводится к интегрированию уравнения Бюргерса

$$\frac{\partial A}{\partial T}+A\frac{\partial A}{\partial X}=\frac{\partial^2 A}{\partial X^2},\qquad M_\infty>1,$$

либо уравнения Бенджамина – Оно

$$\frac{\partial A}{\partial T}+A\frac{\partial A}{\partial X}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 A/\partial\xi^2}{\xi-X}\,d\xi,\qquad M_\infty<1,$$

указанную особенность при линеаризации задачи не содержат. Критический слой для двумерных линейных волн возникает лишь в следующих членах разложения (2) по параметру Δ.

С возрастанием значений χ толщина критического слоя и структура решения в нем определяются нелинейными членами. Если в линейном приближении единственный способ устранения особенности связан с учетом сил вязкости, то для возмущений конечной амплитуды нелинейные эффекты дают другую возможность продолжения решения через критический слой [8]. В общем случае возмущений типа бегущих волн с пространственным периодом $x = O(\Delta^{-1}\mathrm{Re}^{-1/2})$ и амплитудой продольной скорости $u = O(\Delta)$ вся невязкая область $Y_a = O(1)$, которая описывается уравнениями (10), может быть интерпретирована как нелинейный критический слой, расположенный вблизи обтекаемой поверхности. Толщина такого нелинейного образования много больше толщины отделяющего его от стенки вязкого подслоя.

В заключение отметим, что к приведенным в данной работе нелинейным невязким уравнениям сводится анализ ряда других течений при больших числах Рейнольдса. Например, для возмущений с амплитудами, превышающими рассмотренные в [9, 10], система уравнений (10) справедлива в пристеночных слоях течения Пуазейля и в донной части плоской струи, ограниченной снизу твердой стенкой. При формулировке соответствующих краевых задач необходимо изменить лишь условие взаимодействия (7), связывающее давление p_a и функцию смещения линий тока A.

Вычислительный центр
Академии наук СССР
Москва

Поступило
31 III 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нейланд В.Я.* Тр. Центр. аэрогидродинамич. ин-та. 1974, вып. 1529. 125 с. 2. *Stewartson K.* In: Advances of Applied Mechanics. N.Y.: Acad. Press, 1974, vol. 14, p. 145–239. 3. *Рубан А.И., Сычев В.В.* – Усп. механ., 1979, т. 2, вып. 4, с. 57–95. 4. *Рыжов О.С.* – ПММ, 1980, т. 44, вып. 6, с. 1035–1052. 5. *Smith F.T.* – IMA J. Appl. Math., 1982, vol. 28, № 3, p. 207–281. 6. *Ryzhov O.S., Zhuk V.I.* In: Current Problems in Computational Fluid Dynamics. Moscow, 1986, p. 286–307. 7. *Жук В.И., Рыжов О.С.* – ДАН, 1982, т. 263, № 1, с. 56–58. 8. *Maslowe S.A.* – Ann. Rev. Fluid Mech., 1986, vol. 18, p. 405–432. 9. *Жук В.И., Рыжов О.С.* – ДАН, 1981, т. 257, № 1, с. 55–59. 10. *Рыжов О.С.* – ПМТФ, 1982, № 2, с. 26–33.