

Общероссийский математический портал

С. С. Кумков, В. С. Пацко, С. Ле Менек, Два слабых преследователя в игре против одного убегающего, *Автомат. и телемех.*, 2014, выпуск 10, 73–96

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.90

22 марта 2025 г., 00:22:04



© 2014 г. С.С. КУМКОВ, канд. физ.-мат. наук (sskumk@gmail.com),  
В.С. ПАЦКО, канд. физ.-мат. наук (patsko@imm.uran.ru)  
(Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург,  
Уральский Федеральный университет, Екатеринбург),  
С. ЛЕ МЕНЕК, д-р философии (stephane.le-menes@mbda-systems.com)  
(Airbus Group / MBDA France, Париж, Франция)

## ДВА СЛАБЫХ ПРЕСЛЕДОВАТЕЛЯ В ИГРЕ ПРОТИВ ОДНОГО УБЕГАЮЩЕГО<sup>1</sup>

Рассматривается антагонистическая дифференциальная игра, в которой первый игрок управляет действием двух догоняющих, цель которых — минимизация в заданный момент времени промаха относительно убегающего. Второй (максимизирующий) игрок отождествляется с убегающим. Исследуется случай, когда динамические возможности догоняющих уступают возможностям убегающего. Предложен квазиоптимальный способ управления первого игрока при помощи линий переключения. Приведены результаты моделирования.

### 1. Введение

В [1–3] рассмотрена модельная линейная задача преследования двумя догоняющими одного убегающего. Три инерционных объекта передвигаются по прямой. Управление каждого из них является скалярным и ограниченным по модулю. В назначенный заранее момент  $T_1$  замеряется расстояние между первым преследователем и убегающим, в момент  $T_2$  — между вторым преследователем и убегающим. Преследователи действуют координированно, их цель — минимизация платы, представляющей собой минимум из этих двух расстояний. Преследователей можно объединить в одного игрока, назовем его первым. Второго игрока отождествим с убегающим, он максимизирует значение платы. Содержательный прообраз задачи связан [1, 4] с задачей космического преследования, в которой момент  $T_1$  ( $T_2$ ) является моментом встречи первого (второго) преследователя с убегающим на номинальных траекториях. Авторами в [2, 3] выделены и численно исследованы качественно различные варианты решения.

Наиболее простым является случай «сильных» преследователей, когда оба преследователя превосходят убегающего по своим динамическим возможностям. Наиболее сложными являются случаи, когда динамическое преимущество по ходу процесса переходит от убегающего к преследователям или наоборот. Здесь, в частности, появляются множества уровня функции цены,

<sup>1</sup> Работа поддержана программой Президиума РАН «Динамические системы и теория управления» при финансовой поддержке Уральского отделения РАН (грант № 12-П-1-1002), а также Российским фондом фундаментальных исследований (проекты №№ 12-01-00537 и 13-01-96055).

сечения по времени которых теряют односвязность, а с ростом обратного времени снова ее получают.

Принципиальным является вопрос о построении оптимальных (или квазиоптимальных) способов управления игроков по принципу обратной связи. Сложившаяся идеология теории дифференциальных игр предусматривает на этот счет либо хранение всей функции цены, либо ее быстрое вычисление в окрестности текущей позиции. При этом оптимальное управление строится с использованием того или иного варианта обобщенного градиента функции цены [5–10].

В линейных дифференциальных играх с выпуклой функцией платы возможен [11–13] более простой способ построения оптимального управления: при помощи линий и поверхностей переключения. Говоря о линиях или поверхностях переключения, подразумеваем разбиение фазового пространства в каждый момент времени на области, в каждой из которых управляющее воздействие принимает одно из своих крайних значений. При этом в памяти хранятся только границы этих областей без запоминания значений функции цены. В задаче с двумя преследователями и одним убегающим функция платы не является выпуклой, но авторы попытались в [2, 3] и здесь построить оптимальные (квазиоптимальные) стратегии игроков при помощи линий переключения. Для случая сильных преследователей соответствующие утверждения, связанные с обоснованием оптимальности, приведены в [2].

В данной статье рассматривается случай «слабых» преследователей. Считаем, что  $T_1 = T_2$ . Для этого случая формулируются и доказываются утверждения о квазиоптимальном способе управления первого игрока при помощи линий переключения. Способ устойчив по отношению к погрешностям численных построений и ошибкам измерения текущего фазового состояния системы. Случай слабых преследователей при  $T_1 \neq T_2$  является несколько более сложным, и он не рассматривается.

Отметим, что к настоящему времени имеется много публикаций, посвященных исследованию задач группового преследования [14–25]. Эти задачи являются трудными в первую очередь из-за большой размерности фазового вектора и невыпуклости функции платы. Поэтому, как правило, в таких работах делаются весьма сильные предположения относительно динамики объектов (например, рассматриваются объекты с простыми движениями), их начальных состояний и т.д. В данной работе, где число объектов мало, авторы стараются получить точное решение без введения каких-либо существенных упрощений.

## 2. Постановка задачи

Преследователи  $P_1$ ,  $P_2$  и убегающий  $E$  передвигаются по прямой линии. Динамика преследователей описывается соотношениями:

$$(1) \quad \begin{aligned} \ddot{z}_{P_1} &= a_{P_1}, & |u_1| &\leq \mu_1, & \ddot{z}_{P_2} &= a_{P_2}, & |u_2| &\leq \mu_2, \\ \dot{a}_{P_1} &= (u_1 - a_{P_1})/l_{P_1}, & a_{P_1}(t_0) &= 0; & \dot{a}_{P_2} &= (u_2 - a_{P_2})/l_{P_2}, & a_{P_2}(t_0) &= 0. \end{aligned}$$

Здесь  $z_{P_1}$  и  $z_{P_2}$  — геометрические координаты преследователей;  $a_{P_1}$  и  $a_{P_2}$  — их ускорения, вызванные управлениями  $u_1$  и  $u_2$ . Постоянные времени  $l_{P_1}$  и  $l_{P_2}$

определяют, насколько быстро обрабатывается управление. Динамика убегающего  $E$  аналогична:

$$(2) \quad \ddot{z}_E = a_E, \quad \dot{a}_E = (v - a_E)/l_E, \quad |v| \leq \nu, \quad a_E(t_0) = 0.$$

Для сравнения динамических возможностей можно ввести параметры [1, 4]  $\eta_i = \mu_i/\nu$ ,  $\varepsilon = l_E/l_{P_i}$ ,  $i = 1, 2$ . В статье исследуется случай слабых преследователей, когда имеют место неравенства  $\eta_i \leq 1$ ,  $\eta_i \varepsilon_i \leq 1$ ,  $i = 1, 2$ , причем для каждого  $i$  хотя бы одно неравенство является строгим.

Зафиксируем момент  $T$ . В этот момент вычисляем промахи преследователей относительно убегающего:

$$(3) \quad r_{P_1,E}(T) = |z_E(T) - z_{P_1}(T)|, \quad r_{P_2,E}(T) = |z_E(T) - z_{P_2}(T)|.$$

Предположим, что преследователи действуют согласованно. Объединяем их в одного игрока  $P$ , которого будем называть *первым игроком*. Игрок  $P$  распоряжается векторным управлением  $u = (u_1, u_2)^T$ . Здесь и далее верхний индекс  $T$  — символ транспонирования. Убегающего считаем *вторым игроком*. В качестве функции платы возьмем минимум из промахов:

$$(4) \quad \varphi = \min\{r_{P_1,E}(T), r_{P_2,E}(T)\}.$$

В каждый момент  $t$  оба игрока имеют точную информацию обо всех фазовых координатах  $z_{P_1}$ ,  $\dot{z}_{P_1}$ ,  $a_{P_1}$ ,  $z_{P_2}$ ,  $\dot{z}_{P_2}$ ,  $a_{P_2}$ ,  $z_E$ ,  $\dot{z}_E$ ,  $a_E$ . Вектор, составленный из этих величин, обозначим  $z$ . Первый игрок выбирает свое управление обратной связи так, чтобы минимизировать значение платы  $\varphi$ , второй игрок максимизирует плату.

Будем считать, что игра происходит на промежутке  $[\bar{t}, T]$ , где  $\bar{t} < T$ . Пусть  $Y = [\bar{t}, T] \times R^2$  — пространство игры.

Следуя [6, 8], в качестве допустимых стратегий первого игрока рассмотрим произвольные функции  $(t, z) \mapsto U(t, z)$  с значениями в множестве  $\{(u_1, u_2) : |u_1| \leq \mu_1, |u_2| \leq \mu_2\}$ . Символом  $z(\cdot; t_0, x_0, U, \Delta, v(\cdot))$  обозначим пошаговое движение системы (1), (2) из позиции  $(t_0, x_0)$ , когда первый игрок применяет стратегию  $U$  в дискретной схеме управления с шагом  $\Delta > 0$ , а за второго игрока реализуется измеримое управление  $v(\cdot)$  с значениями  $|v(t)| \leq \nu$ . Термин «дискретная схема» означает следующее. Выбирается сетка моментов  $t_s$  с некоторым шагом  $\Delta$  (начиная с момента  $t_0$ ). Имея в момент  $t_s$  положение  $z(t_s)$  системы, первый игрок вычисляет свое управление  $u = U(t_s, z(t_s))$ . Это управление держится постоянным до момента  $t_{s+1} = t_s + \Delta$ . В позиции  $(t_{s+1}, z(t_{s+1}))$  вычисляется новое значение управляющего воздействия и т.д.

Положим

$$\Gamma(t_0, z_0, U, \Delta) = \sup_{v(\cdot)} \varphi(z(T; t_0, z_0, U, \Delta, v(\cdot))).$$

Здесь супремум берется по всем измеримым функциям  $t \mapsto v(t)$ , стесненным ограничением  $|v(t)| \leq \nu$ . Величина  $\varphi(z(T))$  есть значение платы (3), (4) в момент окончания  $T$  на движении  $z(\cdot; t_0, z_0, U, \Delta, v(\cdot))$ .

Величина  $\Gamma(t_0, z_0, U, \Delta)$  имеет смысл гарантии, которую обеспечивает первому игроку стратегия  $U$  для начальной позиции  $(t_0, z_0)$  в дискретной схеме управления с шагом  $\Delta$ . Наилучшая гарантия первого игрока для начальной позиции  $(t_0, z_0)$  определяется формулой

$$\Gamma(t_0, z_0) = \min_U \overline{\lim}_{\Delta \rightarrow 0} \Gamma(t_0, z_0, U, \Delta),$$

где  $\overline{\lim}$  означает верхний предел. В [6, 8] показано, что минимум по допустимым стратегиям  $U$  достигается.

Известно, что наилучший гарантированный результат  $\Gamma(t_0, z_0)$  первого игрока совпадает с симметрично определенным наилучшим гарантированным результатом второго игрока. Поэтому величину  $\Gamma(t_0, z_0)$  называют также значением  $V(t_0, z_0)$  функции цены в точке  $(t_0, z_0)$ .

В статье будет показано, как построить квазиоптимальную (т.е. близкую к оптимальной по гарантированному результату) стратегию первого игрока, пригодную для всех начальных позиций и устойчивую к погрешностям ее численного задания и к ошибкам измерения текущего фазового положения системы.

### 3. Переход к двумерной дифференциальной игре

Введем разностные геометрические координаты  $y_1 = z_E - z_{P_1}$ ,  $y_2 = z_E - z_{P_2}$ . Перепишем уравнения движения (1), (2) и функцию платы (3), (4):

$$(5) \quad \begin{aligned} \ddot{y}_1 &= a_E - a_{P_1}, & \ddot{y}_2 &= a_E - a_{P_2}, \\ \dot{a}_{P_1} &= (u_1 - a_{P_1})/l_{P_1}, & \dot{a}_{P_2} &= (u_2 - a_{P_2})/l_{P_2}, \\ \dot{a}_E &= (v - a_E)/l_E, & |u_2| &\leq \mu_2, \\ |u_1| &\leq \mu_1, |v| \leq \nu, & \varphi &= \min\{|y_1(T)|, |y_2(T)|\}. \end{aligned}$$

Фазовыми переменными системы (5) являются  $y_1, \dot{y}_1, a_{P_1}, y_2, \dot{y}_2, a_{P_2}, a_E$ ;  $u_1$  и  $u_2$  — управления первого игрока;  $v$  — управление второго игрока. Функция платы  $\varphi$  зависит от координат  $y_1$  и  $y_2$  в момент  $T$ .

Стандартный подход к исследованию линейных дифференциальных игр с фиксированным моментом окончания и функцией платы, зависящей от некоторого набора целевых компонент фазового вектора в момент окончания, подразумевает переход к новым фазовым переменным (см., например, [6, 8]). Эти переменные трактуются как значения целевых компонент, прогнозируемые на момент окончания при нулевых управлениях игроков. В западных публикациях их часто называют *zero effort miss coordinates* [4, 26]. В рассматриваемом случае переходим к новым фазовым координатам  $x_1$  и  $x_2$ , где  $x_i(t)$  — значение  $y_i$ , прогнозируемое на момент окончания  $T$ ,  $i = 1, 2$ .

Формула для пересчета координат:

$$(6) \quad x_i = y_i + \dot{y}_i \tau - a_{P_i} l_{P_i}^2 h(\tau/l_{P_i}) + a_E l_E^2 h(\tau/l_E), \quad i = 1, 2.$$

Здесь  $x_i, y_i, \dot{y}_i, a_{P_i}$  и  $a_E$  зависят от времени  $t$ ;  $\tau = T - t$ . Функция  $h$  описывается соотношением  $h(\alpha) = e^{-\alpha} + \alpha - 1$ . Имеем  $x_i(T) = y_i(T)$ . Обозначим

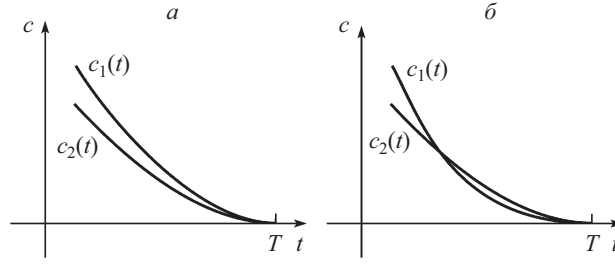


Рис. 1. Графики функций  $c_1(t)$  и  $c_2(t)$ . Значения параметров:  $a - \eta_1 < \eta_2 < 1, \eta_1 \varepsilon_1 \leq \eta_2 \varepsilon_2 \leq 1$ ;  $б - \eta_1 < \eta_2 < 1, \eta_2 \varepsilon_2 < \eta_1 \varepsilon_1 \leq 1$ .

через  $X(t, z)$  двумерный вектор, составленный из переменных  $x_1$  и  $x_2$ , определяемых по (6).

Динамика в новых координатах  $x_1$  и  $x_2$  записывается следующим образом [1]:

$$(7) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -l_{P_1} h(\tau/l_{P_1}) u_1 + l_E h(\tau/l_E) v, & |u_1| &\leq \mu_1, \\ \dot{x}_2 &= -l_{P_2} h(\tau/l_{P_2}) u_2 + l_E h(\tau/l_E) v, & |u_2| &\leq \mu_2, |v| \leq \nu. \end{aligned}$$

Функция платы имеет вид  $\varphi(x_1(T), x_2(T)) = \min\{|x_1(T)|, |x_2(T)|\}$ .

Положим  $x = (x_1, x_2)^T$ . Пусть  $V(t, x)$  — значение функции цены игры (7) в позиции  $(t, x)$ . Известно, что  $V(t, z) = V(t, X(t, z))$ . Это соотношение позволяет находить функцию цены исходной игры (1)–(4), используя функцию цены игры (7). Преобразование  $(t, z) \mapsto x = X(t, z)$  также помогает пересчитывать управление обратной связи в игре (7) в соответствующее управление в игре (1)–(4).

Для любого  $c \geq 0$  множество уровня  $W_c = \{(t, x) : V(t, x) \leq c\}$  функции цены игры (7) является множеством разрешимости в рассматриваемой игре с результатом, не превосходящим  $c$ . Это множество есть также максимальный стабильный мост [6, 8] в игре с динамикой (7) и терминальным множеством  $M_c = \{(T, x) : |x_1| \leq c, |x_2| \leq c\}$ . Обозначим через  $W_c(t) = \{x : (t, x) \in W_c\}$   $t$ -сечение множества  $W_c$  в момент  $t$ .

Исследуя задачу, полезно рассмотреть индивидуальные игры:  $P_1 - E$  первого преследователя против убегающего и  $P_2 - E$  второго преследователя против убегающего. Эти игры являются одномерными по фазовой переменной. Динамика игры  $P_1 - E$  ( $P_2 - E$ ) описывается первой (второй) строкой из соотношений (7). Терминальная плата при этом есть  $|x_1(T)|$  ( $|x_2(T)|$ ).

Для индивидуальных игр символом  $c_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , обозначим значение функции цены в момент  $t$  в точке  $x_i = 0$ . Значение  $c_i(t)$  легко находится интегрированием динамики игры  $P_i - E$  на промежутке  $[t, T]$  при  $u_i = +\mu_i$  и  $v = +\nu$  с начальным условием  $x_i(t) = 0$  и подсчетом величины  $x_i(T)$ . Возможные варианты зависимостей  $t \mapsto c_1(t)$  и  $t \mapsto c_2(t)$  представлены на рис. 1. Помимо общей точки при  $t = T$  у графиков может быть не более еще одной общей точки. В случае одинаковых преследователей имеем  $c_1(t) \equiv c_2(t)$ .

Запишем систему (7) в векторной форме:

$$(8) \quad \dot{x} = \mathcal{D}_1(t)u_1 + \mathcal{D}_2(t)u_2 + \mathcal{E}(t)v, \quad |u_1| \leq \mu_1, |u_2| \leq \mu_2, |v| \leq \nu,$$

$$\mathcal{D}_1(t) = (-l_{P_1}h((T-t)/l_{P_1}), 0)^T, \quad \mathcal{D}_2(t) = (0, -l_{P_2}h((T-t)/l_{P_2}))^T,$$

$$\mathcal{E}(t) = (l_E h((T-t)/l_E), l_E h((T-t)/l_E))^T.$$

Далее в качестве нормы на плоскости  $x_1, x_2$  возьмем норму  $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ . Функция расстояния индуцируется этой нормой. Замкнутую  $\alpha$ -окрестность множества  $A$  обозначим  $O(\alpha, A)$ .

#### 4. Аппроксимирующая дифференциальная игра

1. Наряду с системой (8) рассмотрим аппроксимирующую систему

$$(9) \quad \dot{x} = D_1(t)u_1 + D_2(t)u_2 + E(t)v, \quad |u_1| \leq \mu_1, |u_2| \leq \mu_2, |v| \leq \nu,$$

с кусочно-постоянными функциями:

$$(10) \quad D_i(t) = \mathcal{D}_i(t_j), \quad E(t) = \mathcal{E}(t_j), \quad t \in [t_j, t_{j+1}), \quad i = 1, 2,$$

заданными на некотором разбиении оси  $t$  моментами  $t_j$ . Систему (9) будем использовать для численных построений. Функцию платы для аппроксимирующей игры примем такой же, как и для игры с динамикой (8). Она удовлетворяет условию Липшица с константой  $\lambda = 1$ .

Символом  $x^{(1)}(t; t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))$  (кратко  $x^{(1)}(t)$ ) обозначим положение системы (8) в момент  $t$ , если ее движение выходит в момент  $t_*$  из точки  $x_*$  в силу допустимых измеримых управлений  $u(\cdot)$  и  $v(\cdot)$ . Пусть  $x^{(2)}(t; t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))$  (кратко  $x^{(2)}(t)$ ) — аналогичное обозначение для положения системы (9). Расхождение движений  $x^{(1)}(\cdot)$  и  $x^{(2)}(\cdot)$  в момент  $t$ , вызванное различием динамик (8) и (9), оценим сверху величиной

$$\chi(t_*, t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i \int_{t_*}^t \|D_i(s) - \mathcal{D}_i(s)\|_\infty ds + \nu \int_{t_*}^t \|E(s) - \mathcal{E}(s)\|_\infty ds.$$

Пусть  $V^{(2)}(t, x)$  — значение функции цены аппроксимирующей игры в позиции  $(t, x)$ . Поскольку фазовая переменная не входит в правую часть системы (9), то константа Липшица функции  $x \mapsto V^{(2)}(t, x)$  при любом  $t \leq T$  совпадает [27, с. 110–111] с константой Липшица функции платы, т.е. совпадает с числом  $\lambda = 1$ .

2. Аппроксимацию (10) применим и для индивидуальных одномерных дифференциальных игр  $P_1 - E, P_2 - E$ . Чтобы не усложнять обозначения, будем использовать введенные в конце раздела 3 символы  $c_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , и для значений  $V_{P_i-E}^{(2)}(t, x_i)$  функции цены аппроксимирующих индивидуальных игр в момент  $t$  в точке  $x_i = 0$  (т.е. пишем  $c_i(t)$  вместо более аккуратного обозначения  $c_i^{(2)}(t)$ ). Для аппроксимирующих игр соотношение кривых

$t \mapsto c_i(t)$  остается таким же, как и на рис. 1. Положим

$$(11) \quad \tilde{c}(t) = \min_{i=1,2} c_i(t), \quad c'(t) = \max_{i=1,2} c_i(t).$$

Очевидно, для любой позиции  $(t, x)$  справедливо неравенство

$$V^{(2)}(t, x) \leq \min_{i=1,2} V_{P_i-E}^{(2)}(t, x_i).$$

Следовательно, для любой точки  $x$  на вертикальной (горизонтальной) оси имеем  $V^{(2)}(t, x) \leq c_1(t)$  ( $V^{(2)}(t, x) \leq c_2(t)$ ).

Пусть для некоторого момента  $t$  минимум в (11) реализуется при  $i = 1$ . Покажем, что для любого  $x$  на оси  $x_2$  ( $x_1$ ) выполнено соотношение

$$(12) \quad V^{(2)}(t, x) = \tilde{c}(t) \quad (V^{(2)}(t, x) \in [\tilde{c}(t), c'(t)]).$$

Действительно, для точек на оси  $x_2$  ( $x_1$ ) справедливо неравенство  $V^{(2)}(t, x) \leq \tilde{c}(t)$  ( $V^{(2)}(t, x) \leq c'(t)$ ). Пусть точка  $x$  лежит на положительной части оси  $x_2$  (оси  $x_1$ ). Положим  $v = +\nu$ . Тогда на промежутке  $[t, T]$  движение системы (9) при любом управлении  $u(\cdot)$  пойдет в первом квадранте, и в момент  $T$  получим  $x_2(T) \geq c_2(t)$  ( $x_1(T) \geq c_1(t)$ ). Следовательно,

$$V^{(2)}(t, x) \geq \min_{u(\cdot)} \min_{i=1,2} |x_i(T)| \geq \min_{i=1,2} c_i(t) = \tilde{c}(t).$$

Таким образом, для рассматриваемой точки  $x$  на оси  $x_2$  ( $x_1$ ) выполнено (12). Если точка  $x$  лежит на отрицательной части оси  $x_2$  ( $x_1$ ), то полагаем  $v = -\nu$ . Соответственно движение системы (9) идет в третьем квадранте. Рассуждения аналогичны.

Если в момент  $t$  минимум в (11) достигается при  $i = 2$ , то  $V^{(2)}(t, x) = \tilde{c}(t)$  для всех точек на оси  $x_1$  и  $V^{(2)}(t, x) \in [\tilde{c}(t), c'(t)]$  для точек на оси  $x_2$ .

В случае одинаковых преследователей (т.е. когда  $\mu_1 = \mu_2$ ,  $l_{P_1} = l_{P_2}$ ) имеем  $c_1(t) \equiv c_2(t)$ . В случае разных преследователей для определенности будем считать, что  $\eta_1 < \eta_2$ . Если при этом  $\eta_2 \varepsilon_2 < \eta_1 \varepsilon_1$ , то существует единственный момент  $t^\nabla < T$  такой, что  $c_1(t^\nabla) = c_2(t^\nabla)$ . На интервале  $(t^\nabla, T)$  минимум в (11) реализуется при  $i = 1$ , а на интервале  $(-\infty, t^\nabla)$  — при  $i = 2$ . Соответственно для  $t \in (t^\nabla, T)$  значение  $V^{(2)}(t, x)$  на оси  $x_2$  равно  $\tilde{c}(t)$ , а для  $t < t^\nabla$  значение  $V^{(2)}(t, x)$  на оси  $x_1$  есть  $\tilde{c}(t)$ . Если  $\eta_1 \varepsilon_1 \leq \eta_2 \varepsilon_2$ , то для любого  $t < T$  минимум в (11) реализуется при  $i = 2$ . Значение  $V^{(2)}(t, x)$  на оси  $x_1$  равно  $\tilde{c}(t)$ .

**3.** Для нахождения функции  $V^{(2)}$  применяем численный алгоритм поэтапного построения  $t$ -сечений  $W_c^{(2)}(t) = \{x : V^{(2)}(t, x) \leq c\}$  ее множеств уровня. Алгоритм, учитывающий специфику плоскости, разработан С.А. Ганебным. Описание поэтапной процедуры имеется в [2, 3].

Численно построенные примеры в данной работе приводятся для игры с параметрами:

$$(13) \quad \eta_1 = 0,7, \quad \eta_2 = 0,95, \quad \varepsilon_1 = 1,3, \quad \varepsilon_2 = 0,4, \quad T = T_1 = T_2 = 15.$$



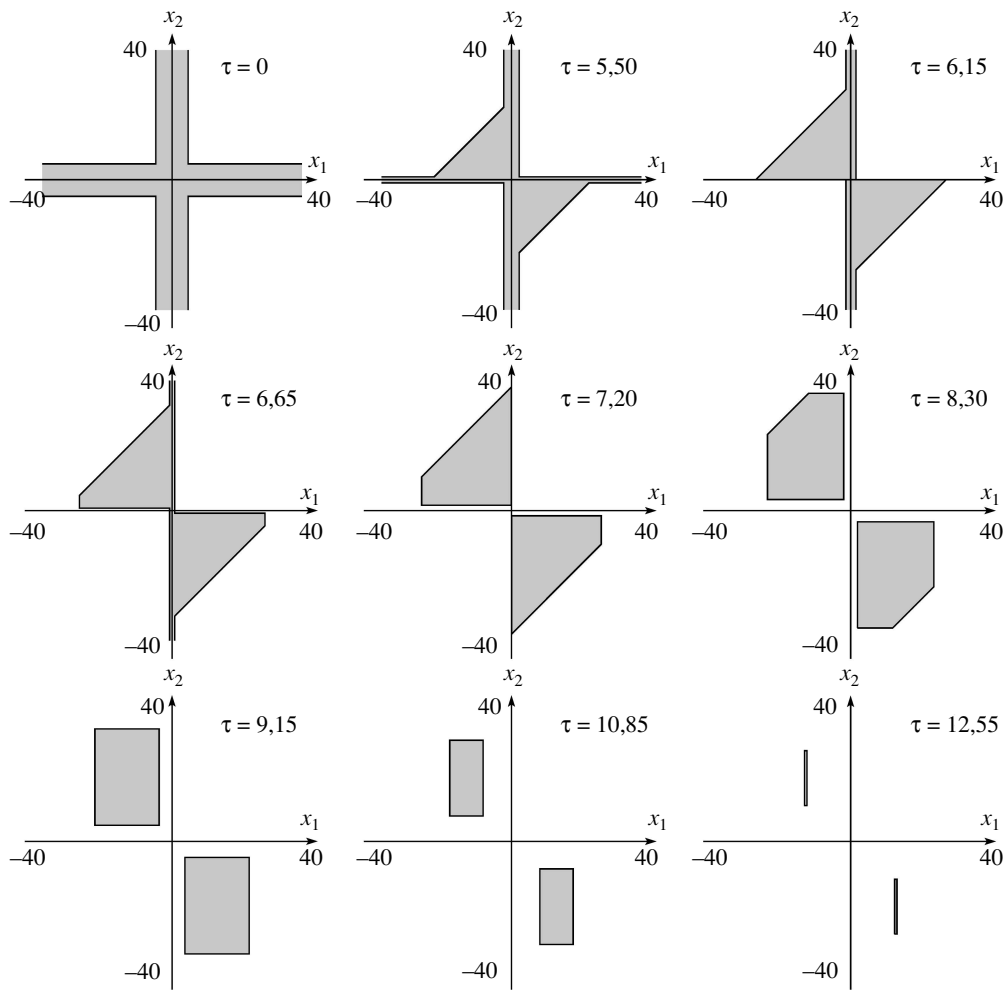


Рис. 2. Изменение множества  $W_{5,0}^{(2)}(t)$ . Символ  $\tau = T - t$  означает обратное время.

На рис. 2 показано развитие множества  $W_c^{(2)}(t)$  для  $c = 5,0$  при изменении времени. Символом  $\tau = T - t$  обозначено обратное время. Верхний левый рисунок соответствует моменту  $\tau = 0$ , когда игра прекращается. Сечение множества уровня в этот момент — крест с бесконечными перекладинами. Верхний средний рисунок сделан для промежуточного момента обратного времени, когда бесконечные перекладины еще не исчезли, но стали уже. Верхняя правая картинка соответствует моменту обратного времени, немного большему момента  $\tau_1 = T - t_1$  исчезновения горизонтальной перекладины. В момент  $\tau_1$  значение функции цены на горизонтальной оси равно 5,0, за исключением точек оси, попадающих во внутренность множества  $W_{5,0}^{(2)}(t_1)$ . На левой картинке во втором ряду можно видеть, как уплощаются углы множества. Центральная картинка показывает конфигурацию  $t$ -сечения после момента  $\tau_2 = T - t_2$ , когда исчезает вертикальная бесконечная полоса и  $t$ -

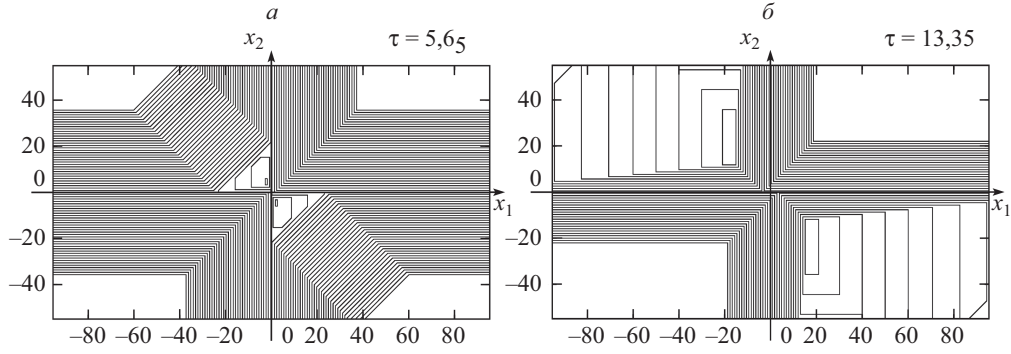


Рис. 3.  $t$ -сечения набора множеств уровня функции цены:  $a - \tau = 5,65$ ;  $b - \tau = 13,35$ .

чение распадается на две трапеции. В момент  $\tau_2$  значение функции цены на вертикальной оси одно и то же и равно  $5,0$ . Затем трапеции превращаются в пятиугольники (правая картинка во втором ряду). Наклонные стороны пятиугольников уменьшаются, и, в конце концов, пятиугольники переходят в прямоугольники (нижняя левая картинка). Прямоугольники продолжают сжиматься, пока  $t$ -сечение множества уровня не станет пустым.

Рисунок 3,  $a$  показывает картину сечений  $W_c^{(2)}(t)$ , просчитанных в момент  $t = 9,35$  ( $\tau = 5,65$ ) для набора значений  $c$  в диапазоне от  $0$  до  $40$  с шагом  $\Delta c = 1,0$ . Аналогичная картина сечений для  $t = 1,65$  ( $\tau = 13,35$ ) представлена на рис. 3,  $b$ . Первый из рассмотренных моментов больше момента  $t^\nabla \approx 4,35$ , второй — меньше.

4. При любых  $c \geq 0$  и  $t \leq T$  множество  $W_c^{(2)}(t)$  (если оно непусто) симметрично относительно начала координат плоскости  $x_1, x_2$ , поскольку таким свойством обладают динамика (9) (вместе с ограничениями на управления) и функция платы. В случае одинаковых преследователей дополнительно имеется симметрия относительно биссектрисы второго и четвертого квадрантов.

Обозначим через  $c_{\min}(t)$  значение минимума функции  $V^{(2)}(t, \cdot)$  на плоскости  $x_1, x_2$  в момент  $t$ . Для  $c \in [c_{\min}(t), \tilde{c}(t)]$  множество  $W_c^{(2)}(t)$  состоит из двух ограниченных непересекающихся подмножеств. Пусть  $W_{c,\text{II}}^{(2)}(t)$  ( $W_{c,\text{IV}}^{(2)}(t)$ ) — то из них, которое расположено во втором (в четвертом) квадранте. Положим

$$Z(t) = W_{c_{\min}(t)}^{(2)}(t), \quad Z_{\text{II}}(t) = W_{c_{\min}(t),\text{II}}^{(2)}(t), \quad Z_{\text{IV}}(t) = W_{c_{\min}(t),\text{IV}}^{(2)}(t).$$

Для случая  $\eta_1 < \eta_2$  при  $\eta_1 \varepsilon_1 \leq \eta_2 \varepsilon_2$  множества  $Z_{\text{II}}(t)$  и  $Z_{\text{IV}}(t)$  представляют собой вертикальные отрезки. Если  $\eta_2 \varepsilon_2 < \eta_1 \varepsilon_1$ , то для малых  $\tau$  они являются горизонтальными отрезками. С увеличением  $\tau$  эти множества превращаются в точки, затем переходят в вертикальные отрезки. Всегда с уменьшением  $t$  множество  $Z(t)$  удаляется от начала координат. При этом минимальное значение  $c_{\min}(t)$  функции цены возрастает.

Важное свойство системы (8) заключается в том, что направления векторов  $\mathcal{D}_1(t)$  и  $\mathcal{D}_2(t)$  не меняются во времени. Таким же свойством облада-

ют векторы  $D_1(t)$  и  $D_2(t)$  аппроксимирующей системы (9), а именно: вектор  $D_1(t)$  ( $D_2(t)$ ) направлен по горизонтали (по вертикали) противоположно направлению оси  $x_1$  ( $x_2$ ). В частности, это свойство вызывает появление новых горизонтальных и вертикальных площадок на границе множества  $W_c^{(2)}(t)$ , когда оно перестает быть связным.

## 5. Линии переключения

Пусть преследователи  $P_1$  и  $P_2$  разные; при этом  $\eta_1 < \eta_2$ . В частном случае одинаковых преследователей построения упрощаются. Соответствующее замечание будет сделано в конце раздела.

1. В предположении  $\eta_2\varepsilon_2 < \eta_1\varepsilon_1$  рассмотрим произвольный момент  $t \in (t^\nabla, T)$ . Расслаивая плоскость  $x_1, x_2$  горизонтальными прямыми, убеждаемся, что минимум сужения функции  $V^{(2)}(t, \cdot)$  на каждую такую прямую реализуется либо в точке, либо на отрезке. В частности, если прямая не пересекает множество  $\text{cl } W_{\tilde{c}(t)}^{(2)}(t) = \text{cl} \left( \text{int } W_{\tilde{c}(t)}^{(2)}(t) \right)$  (здесь  $\text{int}$  — символ внутренности множества,  $\text{cl}$  — символ замыкания), то минимум реализуется в точке на оси  $x_2$ . Если прямая пересекает множество  $\text{int } W_{\tilde{c}(t)}^{(2)}(t)$ , но не пересекает множество  $Z(t)$  глобального минимума функции  $V^{(2)}(t, \cdot)$ , то минимум достигается на отрезке, являющемся для некоторого  $c \in (c_{\min}(t), \tilde{c}(t))$  площадкой на границе множества  $W_c^{(2)}(t)$ . Для прямой, проходящей через множество  $Z(t)$ , минимум сужения достигается на пересечении прямой с этим множеством. В любом случае при удалении от промежутка минимума функция цены возрастает. На краях горизонтальной прямой цена игры постоянна.

Перечисленные факты установлены путем тщательного изучения результатов численного построения множеств уровня функции цены в игре (9).

Для  $t \in (t^\nabla, T)$  непрерывную линию переключения  $\Pi(1, t)$  управления  $u_1$  определим следующим образом. Вначале зададим ее во втором квадранте в множестве  $\text{cl } W_{\tilde{c}(t)}^{(2)}(t)$ . Множество  $Z_\Pi(t)$  представляет собой либо горизонтальный, либо вертикальный отрезок. В последнем случае включим его в линию  $\Pi(1, t)$ . Выделяем на границе множества  $W_{c, \Pi}^{(2)}(t)$ ,  $c \in [c_{\min}(t), \tilde{c}(t))$ , верхнюю горизонтальную площадку. Она целиком или частично принадлежит верхней стороне прямоугольника  $O(\alpha, Z_\Pi(t))$  при некотором  $\alpha \geq 0$ . Отметим среднюю точку пересечения таких двух отрезков и возьмем ее в качестве точки на линии  $\Pi(1, t)$ . Ниже отрезка  $Z_\Pi(t)$  участок линии переключения определим в виде отрезка вертикальной линии, проведенного до границы множества  $W_{\tilde{c}(t)}^{(2)}(t)$ . Каждая его точка принадлежит нижней горизонтальной площадке на границе некоторого множества  $W_{c, \Pi}^{(2)}(t)$ ,  $c \in [c_{\min}(t), \tilde{c}(t))$ . Далее линию переключения продолжим горизонтальным отрезком, идущим по границе множества  $W_{\tilde{c}(t)}^{(2)}(t)$  до вертикальной оси. В четвертом квадранте в множестве  $\text{cl } W_{\tilde{c}(t)}^{(2)}(t)$  линию переключения  $\Pi(1, t)$  определим аналогично описанному симметрично относительно начала координат. Вне множества  $\text{cl } W_{\tilde{c}(t)}^{(2)}(t)$  линию  $\Pi(1, t)$  считаем идущей по оси  $x_2$ .

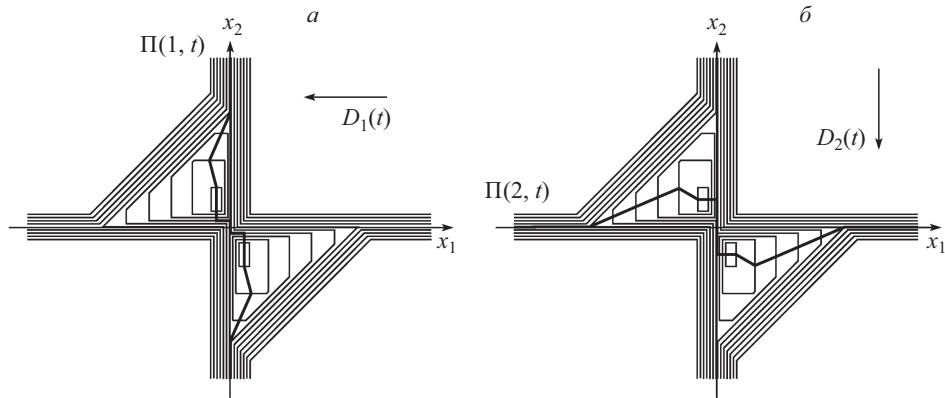


Рис. 4. Линии переключения для момента  $t \in (t^\nabla, T)$ :  $a$  —  $\Pi(1, t)$ ,  $b$  —  $\Pi(2, t)$ .

Результат численного построения линии  $\Pi(1, t)$  представлен на рис. 4,  $a$ . Построения сделаны на некоторой сетке множеств уровня  $W_c^{(2)}$  функции  $V^{(2)}$ . Показано 10 сечений  $W_c^{(2)}(t)$ . Сечение, четвертое в порядке возрастания, соответствует значению  $c = \tilde{c}(t)$ , шестое — значению  $c = c'(t)$ .

Поведение сужения функции цены на вертикальные прямые во многом аналогично. Минимум сужения функции цены реализуется либо в точке, либо на отрезке. Исключение составляет ось  $x_2$ . На ней значение функции цены постоянно и равно  $\tilde{c}(t)$ . Для вертикальных прямых, не пересекающих множество  $\text{si } W_{c'(t)}^{(2)}(t)$ , минимум реализуется в точке пересечения прямой с осью  $x_1$ . Если вертикальная прямая пересекает множество  $\text{int } W_{c'(t)}^{(2)}(t)$ , но не пересекает множество  $Z(t)$ , то минимум достигается на площадке, лежащей на границе множества  $W_c^{(2)}(t)$  при некотором  $c \in (c_{\min}(t), c'(t))$ . Для прямой, проходящей через  $Z(t)$ , минимум реализуется на пересечении прямой с этим множеством. Так же как и для горизонтальных прямых, при удалении от промежутка минимума функция цены возрастает. При этом имеются промежутки, где она постоянна. Два таких бесконечных промежутка лежат на краях прямой.

Линию переключения  $\Pi(2, t)$  при  $t \in (t^\nabla, T)$  определим во втором квадранте в множестве  $\text{si } W_{c'(t)}^{(2)}(t)$  слева от отрезка  $Z_{\Pi}(t)$ , используя точки середины пересечения левых площадок на границе множеств  $W_c^{(2)}(t)$ ,  $c \in [c_{\min}(t), c'(t)]$ , с левыми сторонами прямоугольников  $O(\alpha, Z_{\Pi}(t))$ ,  $\alpha \geq 0$ . Если отрезок  $Z_{\Pi}(t)$  горизонтален, то включаем его в линию  $\Pi(2, t)$ . Справа от отрезка  $Z_{\Pi}(t)$  участок линии переключения возьмем в виде горизонтального отрезка, проведенного до вертикальной оси. В четвертом квадранте в множестве  $\text{si } W_{c'(t)}^{(2)}(t)$  линию переключения  $\Pi(2, t)$  определим аналогично описанному симметрично относительно начала координат. Вне множества  $\text{si } W_{c'(t)}^{(2)}(t)$  линию  $\Pi(2, t)$  считаем идущей по оси  $x_1$ . Результат численного построения линии  $\Pi(2, t)$  показан на рис. 4,  $b$ .

Если  $t \leq t^\nabla$  при  $\eta_2 \varepsilon_2 < \eta_1 \varepsilon_1$  и если  $t < T$  при  $\eta_1 \varepsilon_1 \geq \eta_2 \varepsilon_2$ , то линии переключения  $\Pi(1, t)$  и  $\Pi(2, t)$  определяем при помощи горизонтальных и вертикальных прямых с учетом того, что теперь значение  $\tilde{c}(t)$  реализуется на горизонтальной оси  $x_1$ , а значение  $c'(t)$  соответствует значению функции цены на краях оси  $x_2$ .

Обозначим символом  $\Pi_+(1, t)$  (соответственно  $\Pi_-(1, t)$ ) часть плоскости, расположенную строго справа (строго слева) от линии переключения  $\Pi(1, t)$ . Если  $x \in \Pi_+(1, t)$  ( $x \in \Pi_-(1, t)$ ), то управление  $u_1 = +\mu$  ( $u_1 = -\mu$ ) направляет вектор  $D_1(t)u_1$  на линию переключения, т.е. в сторону уменьшения функции цены  $V^{(2)}(t, \cdot)$ . Аналогичное обозначение  $\Pi_+(2, t)$  (соответственно  $\Pi_-(2, t)$ ) введем для части плоскости выше (ниже) линии переключения  $\Pi(2, t)$ .

**2.** Далее в статье линии  $\Pi(1, t)$  и  $\Pi(2, t)$  трактуются как точно найденные для аппроксимирующей системы (9). Будет ясно, что они определяют оптимальное управление обратной связи в системе (9) и квазиоптимальное (т.е. близкое к оптимальному) в системе (8). В действительности численно нельзя построить идеальные линии переключения  $\Pi(1, t)$  и  $\Pi(2, t)$ . Например, даже при точном построении множеств  $W_c^{(2)}(t)$  работаем с некоторым шагом по параметру  $c$ . В результате получаем ломаные, которые лишь приближают идеальные линии переключения. Встает вопрос о гарантии, которую они обеспечивают первому игроку.

**3.** Для любого  $t < T$  и любой горизонтальной (вертикальной) прямой, проходящей через точку  $x$ , символом  $\mathcal{V}(1, t, x)$  (соответственно  $\mathcal{V}(2, t, x)$ ) обозначим минимальное значение функции цены  $V^{(2)}(t, \cdot)$  на этой прямой. Имеем  $\mathcal{V}(1, t, x) = V^{(2)}(t, x)$  при  $x \in \Pi(1, t)$  и  $\mathcal{V}(2, t, x) = V^{(2)}(t, x)$  при  $x \in \Pi(2, t)$ .

Зададим число  $r \geq 0$  и «расширим» линию  $\Pi(1, t)$ , накладывая на нее центры горизонтальных отрезков длиной  $2r$ . Полученное множество обозначим  $\Pi^r(1, t)$ . Аналогично, используя вертикальные отрезки, определим множество  $\Pi^r(2, t)$ .

Геометрическое  $r$ -расширение идеальных линий переключения вводится для того, чтобы охватить случай их неточного построения. Авторы стремятся к тому, чтобы за счет такого расширения «окружить» линии переключения  $\Pi(1, t)$  и  $\Pi(2, t)$  областями, в которых «скрадываются» ошибки построения или неточности измерения положения системы. При этом для управления  $u_1$  удобно использовать именно горизонтальное расширение, поскольку на любой горизонтальной прямой значение  $\mathcal{V}(1, t, x)$  одно и то же для всех  $x$  на этой прямой. Если в результате вычислений знаем значение  $\mathcal{V}(1, t, x_*)$  в некоторой точке  $x_*$  в момент  $t$  и точка  $x_*$  отстоит по горизонтали от линии  $\Pi(1, t)$  не более чем на расстояние  $r$ , то получаем оценку сверху для величины  $V^{(2)}(t, x_*)$ :  $V^{(2)}(t, x_*) \leq \mathcal{V}(1, t, x_*) + \lambda r$ . По аналогичной причине для управления  $u_2$  удобно расширение по вертикали.

Эффективного «окружения» с помощью указанного способа не происходит при  $t \in (t^\nabla, T)$  на двух горизонтальных участках линии  $\Pi(1, t)$  и вертикальном участке (он один) линии  $\Pi(2, t)$ . В момент  $t^\nabla$  два горизонтальных участка линии  $\Pi(1, t)$  сливаются в один, расположенный на оси  $x_1$ . При  $t < t^\nabla$  на линии  $\Pi(1, t)$  имеется один горизонтальный участок, а на линии  $\Pi(2, t)$  — два вертикальных.

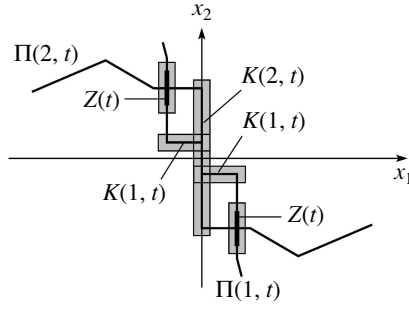


Рис. 5. Множества  $Z(t)$ ,  $K(1, t)$ ,  $K(2, t)$  и их  $\alpha$ -окрестности для момента  $t \in (t^\nabla, T)$ . Отрезки  $Z(t)$  глобального минимума функции цены  $V^{(2)}(t, \cdot)$  выделены толщиной.

Обозначим перечисленные участки через  $K(1, t)$  для линии  $\Pi(1, t)$  и  $K(2, t)$  для линии  $\Pi(2, t)$ . Очень важно, что на линиях  $K(1, t)$  и  $K(2, t)$  значение функции цены одно и то же и равно  $\tilde{c}(t)$ .

4. Для дальнейшего требуется «запретить» быстрый переход движений систем (8) и (9) с множества  $\Pi^r(1, t)$  на множество  $\Pi^r(2, t)$  и с  $\Pi^r(2, t)$  на  $\Pi^r(1, t)$  вне некоторой окрестности пересечения линий  $\Pi(1, t)$  и  $\Pi(2, t)$ . Рассмотрим  $\alpha$ -окрестности  $O(\alpha, Z(t))$  и  $O(\alpha, K(i, t))$  множеств  $Z(t)$  и  $K(i, t)$ ,  $i = 1, 2$  (рис. 5). Положим

$$\Pi_\alpha^r(i, t) = \text{cl} \left[ \Pi^r(i, t) \setminus \left( O(\alpha, Z(t)) \cup O(\alpha, K(i, t)) \right) \right], \quad \alpha \geq 0, \quad i = 1, 2.$$

Линии  $\Pi(1, t)$  и  $\Pi(2, t)$ ,  $t < T$ , непрерывно зависят от времени. Поэтому по любому моменту  $\hat{t} \in [\bar{t}, T)$  найдутся такие величины  $\hat{\alpha} > 0$  и  $\hat{r} > 0$ , что

$$(14) \quad \Pi_\alpha^r(1, t) \cap \Pi_\alpha^r(2, t) = \emptyset, \quad t \in [\bar{t}, \hat{t}], \quad \alpha \geq \hat{\alpha}, \quad r \in [0, \hat{r}].$$

Более того, для указанных значений  $t$ ,  $\alpha$  и  $r$  существует оценка снизу  $\theta(\hat{t}, \hat{\alpha}, \hat{r}) > 0$  времени перехода систем (8) и (9) с одного из множеств  $\Pi_\alpha^r(1, \cdot)$  и  $\Pi_\alpha^r(2, \cdot)$  на другое.

*Замечание.* Если преследователи одинаковые, то  $c_1(t) \equiv c_2(t)$ . Следовательно,  $\tilde{c}(t) \equiv c'(t)$ . Все построения становятся симметричными относительно биссектрисы второго и четвертого квадрантов. Множество  $K(1, t)$  представляет собой отрезок на оси  $x_2$  с центром в начале координат, а множество  $K(2, t)$  — отрезок на оси  $x_1$ . Множество  $Z(t)$  состоит из двух точек на биссектрисе второго и четвертого квадрантов.

## 6. Вспомогательные утверждения

Сформулируем две леммы. Их доказательства вынесены в Приложение. Леммы будут применены в доказательстве теорем об оценке гарантии при использовании первым игроком в системе (8) способа управления на основе линий переключения, построенных в рамках системы (9).

Пусть  $\sigma_i = \max \{ \|D_i(t)\|_\infty : t \in [\bar{t}, T] \}$ ,  $i = 1, 2$ ;  $\sigma = \max \{ \sigma_1, \sigma_2 \}$ ;  $\mu = \max \{ \mu_1, \mu_2 \}$ .

*Лемма 1.* Зафиксируем  $i = 1, 2$ . Пусть позиция  $(t_*, x_*) \in Y$  и число  $\delta > 0$ ,  $t_* + \delta < T$ , таковы, что  $x_* \in \Pi_+(i, t_*)$  ( $x_* \in \Pi_-(i, t_*)$ ) и любое движение системы (9), выходящее в момент  $t_*$  из точки  $x_*$ , в любой момент  $t \in [t_*, t_* + \delta]$  остается в множестве  $\Pi_+(i, t)$  ( $\Pi_-(i, t)$ ). Рассмотрим на промежутке  $[t_*, t_* + \delta]$  движение  $x^{(1)}(\cdot)$  системы (8), выходящее в момент  $t_*$  из точки  $x_*$  под действием некоторого управления  $v(\cdot)$  второго игрока и управления  $u(\cdot)$  первого игрока такого, что  $u_i \equiv +\mu_i$  ( $u_i \equiv -\mu_i$ ), за исключением разве лишь промежутка  $[t_*, t_* + \omega]$  длиной  $\omega \leq \delta$ .

Тогда при любом  $t \in [t_*, t_* + \delta]$  справедлива оценка

$$(15) \quad \mathcal{V}(\bar{i}, t, x^{(1)}(t)) \leq V^{(2)}(t_*, x_*) + 2\lambda\omega\sigma_i\mu_i + \lambda\chi(t_*, t).$$

Здесь  $\bar{i} = 2$ , если  $i = 1$ , и  $\bar{i} = 1$ , если  $i = 2$ .

*Комментарий.* Пусть для определенности  $i = 2$  и из вариантов  $+$  и  $-$  принят знак  $+$ . Тогда  $x_* \in \Pi_+(2, t)$ , и с этим согласовано предположение о виде «правильного» управления  $u_2(\cdot)$ , которое отличается от  $u_2 \equiv +\mu_2$  лишь на промежутке длиной  $\omega$ . Допустимое управление  $u_1(\cdot)$  является произвольным. Значение  $\omega$  определяет величину второго слагаемого в правой части оценки (15). Третье слагаемое — стандартная добавка, оценивающая сверху приращение функции цены  $V^{(2)}$ , вызванное различием динамик систем (8) и (9).

*Лемма 2.* Пусть  $(t_*, x_*) \in Y$ ,  $t^* \in (t_*, T)$  и  $0 \leq \omega \leq t^* - t_*$ . Предположим, что вдоль движения  $x^{(1)}(\cdot)$  системы (8), выходящего в момент  $t_*$  из точки  $x_*$  в силу допустимых управлений  $u(\cdot)$  и  $v(\cdot)$ , для каждого  $i = 1, 2$  верно, что

- 1) либо  $x^{(1)}(t) \in \Pi_+(i, t)$  на промежутке  $(t_*, t^*)$  и  $u_i(t) = +\mu_i$  на  $(t_* + \omega, t^*)$ ;
- 2) либо  $x^{(1)}(t) \in \Pi_-(i, t)$  на промежутке  $(t_*, t^*)$  и  $u_i(t) = -\mu_i$  на  $(t_* + \omega, t^*)$ .

Тогда при любом  $t \in [t_*, t^*]$  справедлива оценка

$$(16) \quad V^{(2)}(t, x^{(1)}(t)) \leq V^{(2)}(t_*, x_*) + 2\lambda\omega\sigma\mu + \lambda\chi(t_*, t).$$

## 7. Теоремы о гарантии

### 7.1. Оценка гарантии для многозначной стратегии первого игрока

При  $i = 1, 2$ ,  $\alpha > 0$ ,  $r \geq 0$  и  $t \in [\bar{t}, T)$  положим

$$S(i, \alpha, r, t) = O(\alpha, Z(t)) \bigcup O(\alpha, K(i, t)) \bigcup \Pi_\alpha^r(i, t).$$

Введем многозначную стратегию  $(t, x) \mapsto \mathbf{U}(t, x)$  первого игрока. Будем считать, что  $\mathbf{U}_i(t, x) = \{u_i : |u_i| \leq \mu_i\}$ , если  $x \in S(i, \alpha, r, t)$ ,  $i = 1, 2$ . Вне множества  $S(i, \alpha, r, t)$ ,  $t < T$ , компонента  $\mathbf{U}_i(t, x)$ ,  $i = 1, 2$ , стратегии  $\mathbf{U}$  задается однозначно, а именно: в позиции  $(t, x)$  соответствующее значение  $u_i$ ,  $i = 1, 2$ , равно  $+\mu_i$  или  $(-\mu_i)$ , выбирается так, чтобы вектор  $D_i(t)u_i$  был направлен на множество  $S(i, \alpha, r, t)$ . Отметим, что для любой точки  $x \notin S(i, \alpha, r, t)$  направление из нее по горизонтали при  $i = 1$  (по вертикали при  $i = 2$ ) на множество  $S(i, \alpha, r, t)$  является единственным и совпадает с направлением на линию переключения  $\Pi(1, t)$  ( $\Pi(2, t)$ ).

Зафиксируем момент  $\hat{t} \in [\bar{t}, T)$ . По  $\hat{t}$  подберем  $\hat{\alpha} > 0$  и  $\hat{r} \in (0, \hat{\alpha})$  так, чтобы на  $[\bar{t}, \hat{t}]$  существовала оценка снизу  $\theta(\hat{t}, \hat{\alpha}, \hat{r}) > 0$  времени перехода систем (8) и (9) с каждого из множеств  $\Pi_{\hat{\alpha}}^r(1, \cdot)$  и  $\Pi_{\hat{\alpha}}^r(2, \cdot)$  на другое. Тогда оценка  $\theta(\hat{t}, \hat{\alpha}, \hat{r})$  времени перехода справедлива и при  $\alpha \geq \hat{\alpha}$ ,  $r \in [0, \hat{r}]$ . Далее считаем выполненными эти соотношения. Зададим произвольное положительное  $\vartheta < \theta(\hat{t}, \hat{\alpha}, \hat{r})$ . Обозначим  $\hat{c} = c'(\hat{t})$ .

Пусть первый игрок применяет в системе (8) стратегию  $\mathbf{U}$  в дискретной схеме с шагом  $\Delta \leq \vartheta$ . В каждый момент  $t_s$  дискретной схемы первый игрок выбирает управление  $u \in \mathbf{U}(t_s, x(t_s))$  и держит его постоянным на интервале  $[t_s, t_s + \Delta)$ .

Оценим приращение функции  $V^{(2)}$  вдоль движения  $x^{(1)}(\cdot)$ , выходящего в момент  $t_0 \in [\bar{t}, T)$  из точки  $x_0$  и порожденного стратегией  $\mathbf{U}$  первого игрока в дискретной схеме с шагом  $\Delta$ , а также некоторым допустимым управлением  $v(\cdot)$  второго игрока.

Положим  $\Pi_{\alpha}^r(t) = \Pi_{\alpha}^r(1, t) \cup \Pi_{\alpha}^r(2, t)$  и  $K(t) = K(1, t) \cup K(2, t)$ .

1. Введем следующие промежутки времени.

1. Промежуток  $\mathcal{T}_z = [t_z, t^z]$  от момента  $t_z$  первого попадания точки  $x^{(1)}(t)$  в множество  $O(\alpha, Z(t))$  до момента  $t^z$  последнего выхода из него. Если  $\mathcal{T}_z = \emptyset$ , то полагаем  $t^z = t_0$ .

2. Промежуток  $\mathcal{T}_k = [t_k, t^k]$  от момента  $t_k$  первого попадания точки  $x^{(1)}(t)$  в множество  $O(\alpha, K(t))$  до момента  $t^k$  последнего выхода из него. Такой промежуток рассматриваем только в случае  $t_k \in [t^z, \hat{t})$ .

3. Промежуток  $\mathcal{T}_{\hat{c}} = [t_{\hat{c}}, t^{\hat{c}}]$  от момента  $t_{\hat{c}}$  первого попадания точки  $x^{(1)}(t)$  в множество  $O(\alpha, W_{\hat{c}}^{(2)}(t))$  при  $t \geq \hat{t}$  до момента  $t^{\hat{c}}$  последнего выхода из него.

4. Промежуток  $\mathcal{T}_b = [t_b, t^b]$  при  $t^b \leq \hat{t}$ . Считаем, что  $x^{(1)}(t_b) \in \Pi_{\alpha}^r(t_b)$  и  $x^{(2)}(t^b) \in \Pi_{\alpha}^r(t^b)$ . Предполагаем, что промежуток  $\mathcal{T}_b$  находится справа от момента  $t^z$  и вне промежутка  $\mathcal{T}_k$ . Условимся, что промежуток  $\mathcal{T}_b$  является максимальным по длине при соблюдении указанных предположений.

2. Выпишем оценки изменения функции  $V^{(2)}$  вдоль движения  $x^{(1)}(\cdot)$ . Символом  $\text{Var}(V^{(2)}, [t_*, t^*])$  обозначим приращение функции  $V^{(2)}$  на отрезке  $[t_*, t^*]$ . Вначале рассмотрим промежутки  $\mathcal{T}_z, \mathcal{T}_k, \mathcal{T}_{\hat{c}}$ .

В момент  $t^z$  имеем

$$(17) \quad V^{(2)}(t^z, x^{(1)}(t^z)) \leq c_{\min}(t^z) + \lambda\alpha \leq V^{(2)}(t_0, x_0) + \lambda\alpha.$$

Для момента  $t^k$  выполнена оценка  $V^{(2)}(t^k, x^{(1)}(t^k)) \leq \tilde{c}(t^k) + \lambda\alpha \leq \tilde{c}(t_k) + \lambda\alpha$ . Поскольку  $\tilde{c}(t_k) \leq V^{(2)}(t_k, x^{(1)}(t_k)) + \lambda\alpha$ , то

$$(18) \quad \text{Var}(V^{(2)}, [t_k, t^k]) \leq 2\lambda\alpha.$$

Для момента  $t^{\hat{c}}$  справедливо неравенство

$$(19) \quad V^{(2)}(t^{\hat{c}}, x^{(1)}(t^{\hat{c}})) \leq \hat{c} + \lambda\alpha.$$



**3.** Не такой простой является оценка приращения  $V^{(2)}$  вдоль движения  $x^{(1)}(\cdot)$  на промежутке  $\mathcal{T}_b$ . Предположим для определенности, что  $x^{(1)}(t_b) \in \Pi_\alpha^r(1, t_b)$ .

Положим  $t_1 = t_b$ . Символом  $t_{1+}$  обозначим наибольший момент, принадлежащий промежутку  $[t_1, t_1 + \vartheta] \cap [t_1, t^b]$ , для которого  $x^{(1)}(t) \in \Pi_\alpha^r(t)$ . Поскольку за время  $\vartheta$  переход с множества  $\Pi_\alpha^r(1, \cdot)$  на множество  $\Pi_\alpha^r(2, \cdot)$  невозможен, то  $x^{(1)}(t_{1+}) \in \Pi_\alpha^r(1, t_{1+})$ . Для оценки величины  $V^{(2)}(t_{1+}, x^{(1)}(t_{1+}))$  воспользуемся леммой 1.

Предположим, что  $t_{1+} < t^b$ . Пусть  $t_2$  — наименьший момент из промежутка  $[t_1 + \vartheta, t^b]$  такой, что  $x^{(1)}(t) \in \Pi_\alpha^r(t)$ . Здесь возможны как случай  $x^{(1)}(t_2) \in \Pi_\alpha^r(1, t_2)$ , так и случай  $x^{(1)}(t_2) \in \Pi_\alpha^r(2, t_2)$ . И в том и в другом случае точка  $x^{(1)}(t)$  на интервале  $(t_{1+}, t_2)$  находится вне множества  $S(1, \alpha, r, t) \cup S(2, \alpha, r, t)$ . Для оценки величины  $\text{Var}(V^{(2)}, [t_{1+}, t_2])$  воспользуемся леммой 2.

Если  $t_2 < t^b$ , то введем момент  $t_{2+}$ , задавая его как наибольший момент, принадлежащий промежутку  $[t_2, t_2 + \vartheta] \cap [t_2, t^b]$ , для которого  $x^{(1)}(t) \in \Pi_\alpha^r(t)$ . В случае  $x^{(1)}(t_2) \in \Pi_\alpha^r(1, t_2)$  имеем  $x^{(1)}(t_{2+}) \in \Pi_\alpha^r(1, t_{2+})$ . В случае  $x^{(1)}(t_2) \in \Pi_\alpha^r(2, t_2)$  получаем  $x^{(1)}(t_{2+}) \in \Pi_\alpha^r(2, t_{2+})$ . Предположим, что  $t_{2+} < t^b$ . Тогда вводим момент  $t_3$  как наименьший момент из промежутка  $[t_2 + \vartheta, t^b]$  такой, что  $x^{(1)}(t) \in \Pi_\alpha^r(t)$ , и т.д.

На промежутках вида  $[t_j, t_{j+}]$  в силу леммы 1 получаем, что

$$(20) \quad \mathcal{V}(i, t_{j+}, x^{(1)}(t_{j+})) \leq V^{(2)}(t_j, x^{(1)}(t_j)) + 2\lambda\Delta\sigma\mu + \lambda\chi(t_j, t_{j+}).$$

Здесь  $i = 1$ , если  $x^{(1)}(t_j) \in \Pi_\alpha^r(1, t_j)$ . Управление  $u_2$  при работе стратегии **U** может выбираться «неправильно» лишь на некотором промежутке  $[t_j, t_j + \omega]$ , где  $\omega \leq \Delta$ . Если  $x^{(1)}(t_j) \in \Pi_\alpha^r(2, t_j)$ , то в левой части неравенства (20) берем  $i = 2$ .

Переходя от значения  $\mathcal{V}(i, t_{j+}, x^{(1)}(t_{j+}))$  к величине  $V^{(2)}(t_{j+}, x^{(1)}(t_{j+}))$ , имеем неравенство  $V^{(2)}(t_{j+}, x^{(1)}(t_{j+})) \leq \mathcal{V}(i, t_{j+}, x^{(1)}(t_{j+})) + \lambda r$ . Поэтому

$$(21) \quad \text{Var}(V^{(2)}, [t_j, t_{j+}]) \leq 2\lambda\Delta\sigma\mu + \lambda r + \lambda\chi(t_j, t_{j+}).$$

Для промежутков вида  $[t_{j+}, t_{j+1}]$ , опираясь на лемму 2 при  $\omega \leq \Delta$ , получаем

$$(22) \quad \text{Var}(V^{(2)}, [t_{j+}, t_{j+1}]) \leq 2\lambda\Delta\sigma\mu + \lambda\chi(t_{j+}, t_{j+1}).$$

В силу соотношений (21) и (22) справедливо неравенство

$$\text{Var}(V^{(2)}, [t_j, t_{j+1}]) \leq 4\lambda\Delta\sigma\mu + \lambda r + \lambda\chi(t_j, t_{j+1}).$$

На промежутке  $[t_b, t^b]$  имеем не более  $[(t^b - t_b)/\vartheta]$  (здесь и далее  $[\cdot]$  — операция взятия целой части) полных промежутков вида  $[t_j, t_{j+1}]$ . Последний промежуток, заканчивающийся в момент  $t^b$ , может быть промежутком вида

$[t_j, t_{j+}]$ , где  $t_{j+} - t_j \leq \vartheta$ . Приходим к оценке

$$(23) \quad \text{Var}(V^{(2)}, [t_b, t^b]) \leq \left( \left[ \frac{t^b - t_b}{\vartheta} \right] + 1 \right) (4\lambda\Delta\sigma\mu + \lambda r) + \lambda\chi(t_b, t^b).$$

4. На отрезке  $[t^z, \hat{t}]$  может быть не более двух промежутков вида  $\mathcal{T}_b$ , разделенных промежутком  $\mathcal{T}_k$ . Первый из них обозначим через  $[t_{b1}, t^{b1}]$ , второй — через  $[t_{b2}, t^{b2}]$ . На интервалах  $(t^z, t_{b1})$ ,  $(t^{b1}, t_k)$ ,  $(t^k, t_{b2})$  и  $(t^{b2}, \hat{t})$  точка  $x^{(1)}(t)$  находится вне множества  $S(1, \alpha, r, t) \cup S(2, \alpha, r, t)$ . Поэтому на каждом таком интервале можем оценить приращение функции  $V^{(2)}$  при помощи леммы 2, полагая  $\omega \leq \Delta$ . Делая это, а также учитывая оценки (17), (18) и (23), получаем, что

$$(24) \quad \begin{aligned} & \text{Var}(V^{(2)}, [t_0, \hat{t}]) \leq \\ & \leq \left( \left[ \frac{\hat{t} - t_0}{\vartheta} \right] + 2 \right) (4\lambda\Delta\sigma\mu + \lambda r) + 4 \cdot 2\lambda\Delta\sigma\mu + 3\lambda\alpha + \lambda\chi(t_0, \hat{t}). \end{aligned}$$

5. Рассмотрим случай, когда на промежутке  $[\hat{t}, T)$  точка  $x^{(1)}(t)$  попадает в множество  $O(\alpha, W_{\hat{c}}^{(2)}(t))$  (в частности,  $x^{(1)}(\hat{t}) \in O(\alpha, W_{\hat{c}}^{(2)}(\hat{t}))$ , если  $\hat{t} \in \mathcal{T}_k$ ). В момент  $t^{\hat{c}}$  имеем оценку (19). При  $t \geq t^{\hat{c}}$  точка  $x^{(1)}(t)$  находится вне множества  $O(\alpha, W_{\hat{c}}^{(2)}(t))$ . Поскольку  $Z(t) \subset W_{\hat{c}}^{(2)}(t)$ ,  $K(t) \subset W_{\hat{c}}^{(2)}(t)$  и  $r \leq \alpha$ , то при  $t \geq t^{\hat{c}}$  движение  $x^{(1)}(\cdot)$  идет вне множества  $S(1, \alpha, r, t) \cup S(2, \alpha, r, t)$ . Стало быть, на этом движении работает «правильное» управление первого игрока по компонентам  $u_i$ ,  $i = 1, 2$ , за исключением разве лишь некоторого промежутка  $[t^{\hat{c}}, t^{\hat{c}} + \omega]$ , где  $\omega \leq \Delta$ . Используя лемму 2, получим для  $t \in [t^{\hat{c}}, T]$  оценку

$$(25) \quad V^{(2)}(t, x^{(1)}(t)) \leq \hat{c} + \lambda\alpha + 2\lambda\Delta\sigma\mu + \lambda\chi(t^{\hat{c}}, t).$$

Пусть на промежутке  $[\hat{t}, T)$  точка  $x^{(1)}(t)$  не попадает в множество  $O(\alpha, W_{\hat{c}}^{(2)}(t))$ . Тогда движение  $x^{(1)}(\cdot)$  идет при  $t \geq \hat{t}$  вне указанных выше множеств, и в оценке (24) наращивается лишь последнее слагаемое.

6. Таким образом, итоговая оценка для момента  $T$  имеет вид

$$(26) \quad \begin{aligned} & V^{(2)}(T, x^{(1)}(T)) \leq \max\{F(T), L(T)\}, \\ & F(T) = V^{(2)}(t_0, x_0) + \left( \left[ \frac{\hat{t} - t_0}{\vartheta} \right] + 2 \right) (4\lambda\Delta\sigma\mu + \lambda r) + 8\lambda\Delta\sigma\mu + 3\lambda\alpha + \lambda\chi(t_0, T), \\ & L(T) = \hat{c} + \lambda\alpha + 2\lambda\Delta\sigma\mu + \lambda\chi(t_0, T). \end{aligned}$$

Поскольку  $V^{(2)}(T, x^{(1)}(T)) = \varphi(x_1^{(1)}(T), x_2^{(1)}(T))$ , то (26) является оценкой гарантии первого игрока при использовании в системе (8) стратегии  $\mathbf{U}$  в дискретной схеме управления с шагом  $\Delta$ .

*Теорема 1.* Выберем момент  $\hat{t} \in [\bar{t}, T)$  и параметры  $\hat{\alpha} > 0$  и  $\hat{r} > 0$  так, чтобы существовала оценка  $\theta(\hat{t}, \hat{\alpha}, \hat{r}) > 0$  снизу времени перехода с каждого из множеств  $\Pi_{\hat{\alpha}}^r(1, \cdot)$  и  $\Pi_{\hat{\alpha}}^r(2, \cdot)$  на другое. Положим  $\alpha \geq \hat{\alpha}$  и  $r \in [0, \hat{r}]$ .

Пусть многозначная стратегия  $\mathbf{U}$ , заданная по  $t$  на интервале  $[\bar{t}, T)$ , принимает значение  $\mathbf{U}_i(t, x) = \{u_i : |u_i| \leq \mu_i\}$  в множестве  $S(i, \alpha, r, t)$ ,  $i = 1, 2$ . Пусть вне множества  $S(i, \alpha, r, t)$  значение  $\mathbf{U}_i(t, x)$ , равное  $+\mu_i$  или  $(-\mu_i)$ , выбирается так, чтобы вектор  $D_i(t)\mathbf{U}_i(t, x)$  был направлен на множество  $S(i, \hat{\alpha}, r, t)$ ,  $i = 1, 2$ . Зафиксируем положительное  $\vartheta < \theta(\hat{t}, \hat{\alpha}, \hat{r})$ . Тогда для любой начальной позиции  $(t_0, x_0) \in Y$  стратегия  $\mathbf{U}$  в дискретной схеме управления с шагом  $\Delta \leq \vartheta$  в системе (8) гарантирует первому игроку результат, описываемый формулой (26).

## 7.2. Устойчивость предложенного метода управления

При  $i = 1, 2$ ,  $t \in [\bar{t}, \hat{t}]$ , и  $\beta > 0$  в окрестности  $O(\beta, \Pi(i, t))$  проведем произвольную непрерывную линию  $\pi(i, t)$ , которую будем использовать для построения компоненты  $U_i^*$  стратегии  $U^*$  первого игрока. Пусть  $x$  — некоторое состояние в момент  $t$ . Рассмотрим луч с направлением  $D_i(t)$ , выходящий из этой точки. Если он пересекает линию  $\pi(i, t)$ , то положим  $U_i^*(t, x) = +\mu_i$ ; в противном случае примем  $U_i^*(t, x) = -\mu_i$ .

Возьмем произвольное  $\varepsilon > 0$ . Выберем момент  $\hat{t}$  из условия  $\hat{c} = c'(\hat{t}) = \varepsilon/4$ . Пусть число  $\hat{\alpha}$  удовлетворяет соотношению  $3\lambda\hat{\alpha} = \varepsilon/2$ . Зададим число  $\hat{r} \in (0, \hat{\alpha}]$  так, чтобы на отрезке  $[\bar{t}, \hat{t}]$  существовала оценка снизу  $\theta(\hat{t}, \hat{\alpha}, \hat{r}) > 0$  времени перехода движений систем (8) и (9) с множества  $\Pi_{\hat{\alpha}}^{\hat{r}}(1, \cdot)$  на множество  $\Pi_{\hat{\alpha}}^{\hat{r}}(2, \cdot)$  и наоборот с  $\Pi_{\hat{\alpha}}^{\hat{r}}(2, \cdot)$  на  $\Pi_{\hat{\alpha}}^{\hat{r}}(1, \cdot)$ . Зафиксируем произвольное положительное  $\vartheta < \theta(\hat{t}, \hat{\alpha}, \hat{r})$ . Подберем такие  $r^* \in (0, \hat{r}]$  и  $\Delta^* \leq \vartheta$ , что

$$\left( \left\lceil \frac{T - \bar{t}}{\vartheta} \right\rceil + 2 \right) (4\lambda\Delta^*\sigma\mu + \lambda r^*) + 8\lambda\Delta^*\sigma\mu \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть  $\xi_1(\hat{t})$  ( $\xi_2(\hat{t})$ ) — оценка снизу на угол, под которым линия  $\Pi(1, t) \setminus K(1, t)$  ( $\Pi(2, t) \setminus K(2, t)$ ) пересекает горизонтальные (вертикальные) прямые в момент  $t \in [\bar{t}, \hat{t}]$ . Положим  $\xi(\hat{t}) = \min\{\xi_1(\hat{t}), \xi_2(\hat{t})\}$ .

Положим  $\beta^* = r^* \sin \xi(\hat{t}) / \sqrt{2}$ . Можно показать, что для  $\beta \leq \beta^*$  справедливы вложения  $O(\beta, \Pi(i, t)) \subset S(i, \hat{\alpha}, r^*, t)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $t \in [\bar{t}, \hat{t}]$ . Соответствующая значению  $\beta$  стратегия  $U^*$  является однозначной выборкой многозначной стратегии  $\mathbf{U}$ , определяемой величинами  $\hat{\alpha}$  и  $r^*$ .

В силу (26) с учетом определения значений  $\hat{t}$ ,  $\hat{\alpha}$ ,  $r^*$ ,  $\Delta^*$  и  $\beta^*$  получаем, что при  $\beta \in [0, \beta^*]$  стратегия  $U^*$  в дискретной схеме с шагом  $\Delta \in (0, \Delta^*]$  гарантирует для любой начальной позиции  $(t_0, x_0) \in Y$  оценку

$$(27) \quad \varphi(x_1^{(1)}(T), x_2^{(1)}(T)) \leq V^{(2)}(t_0, x_0) + \varepsilon + \lambda\chi(t_0, T).$$

Оценки (26) и (27) относятся к случаю, когда при построении своего управления первый игрок в момент  $t$  знает точное положение  $x^{(1)}(t)$  системы (8). Рассмотрим случай неточных измерений. Предположим, что первый игрок вместо истинного значения  $x^{(1)}(t)$  получает замер  $\zeta(t)$  такой, что  $\|\zeta(t) - x^{(1)}(t)\|_{\infty} \leq h$ . Игрок использует этот замер для выработки управления  $U^*(t, \zeta(t))$ . Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.** По любому  $\varepsilon > 0$  можно подобрать числа  $\gamma^* > 0$ ,  $h^* > 0$  и  $\Delta^* > 0$  так, что если стратегия  $U^*$  в системе (8) строится на основе

линий переключения  $\pi(1, t)$  и  $\pi(2, t)$ , расположенных при каждом  $t \in [\bar{t}, T)$  в множествах  $O(\gamma^*, \Pi(1, t))$  и  $O(\gamma^*, \Pi(2, t))$ , погрешность измерения не превосходит  $h^*$  и шаг  $\Delta > 0$  дискретной схемы управления удовлетворяет неравенству  $\Delta \leq \Delta^*$ , то при любой начальной позиции  $(t_0, x_0) \in Y$  и любой реализации  $v(\cdot)$  управления второго игрока выполнена оценка (27).

Для доказательства утверждения нужно взять  $\gamma^* \leq \beta^*/2$  и  $h^* \leq \beta^*/2$ .

## 8. Результаты моделирования

В целях наглядного представления результатов моделирования рассмотрим движение преследователей  $P_1, P_2$  и убегающего  $E$  на двумерной плоскости. Эту плоскость будем называть *исходным геометрическим пространством*. Предположим, что в процессе движения горизонтальная составляющая вектора скорости каждого объекта остается постоянной. Пусть величины этих составляющих таковы, что моменты горизонтального расхождения объектов  $P_1, E$  и объектов  $P_2, E$  одинаковы и равны  $T$ . Таким образом, управляющие воздействия влияют лишь на смещение по вертикали. Динамика бокового движения описывается соотношениями (1) и (2); результирующий промах задается формулой (4). На рис. 6 горизонтальная ось обозначена символом  $d$ . Координата  $d$  показывает продольное положение объектов.

Параметры игры выберем в соответствии с (13). Начальные боковые скорости и ускорения полагаются нулевыми:  $\dot{z}_{P_1}^0 = \dot{z}_{P_2}^0 = \dot{z}_E^0 = 0$ ,  $a_{P_1}^0 = a_{P_2}^0 = a_E^0 = 0$ . Начальный момент времени  $t_0 = 0$ .

Первый игрок управляется при помощи линий переключения, построенных в рамках аппроксимирующей системы (9). При этом он использует точное знание всех фазовых координат преследователей и убегающего.

На рис. 6,а представлены траектории объектов для начальных значений боковых отклонений  $z_{P_1}(t_0) = 50$ ,  $z_{P_2}(t_0) = -30$ . Управление второго игрока реализуется при помощи его линий переключения, также построенных в рамках системы (9). Процедура построения линий переключения второго игрока

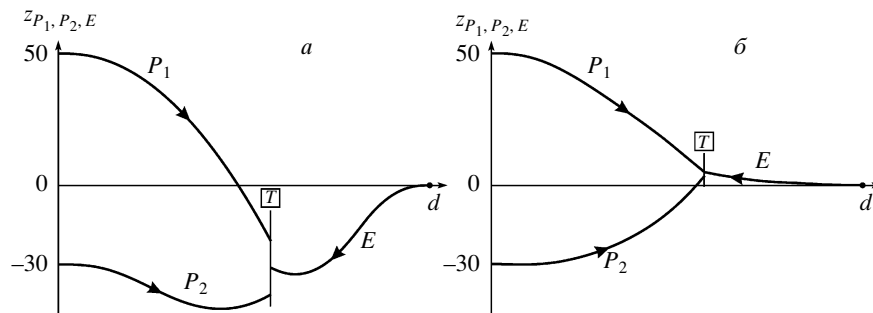


Рис. 6. Траектории объектов в исходном геометрическом пространстве: а — при применении обоими игроками квазиоптимальных управлений; б — при применении квазиоптимального управления первым игроком и случайного управления вторым.

описана в [2]. Близость способа управления второго игрока на основе его линий переключения к оптимальному пока аккуратно не проанализирована.

На рис. 6,б показана ситуация для тех же начальных отклонений, но для случайного управления второго игрока (на каждом шаге дискретной схемы управления второго игрока держится случайное управление из промежутка  $[-\nu, +\nu]$ ). Здесь происходит точная поимка.

## 9. Заключение

Управление на основе линий переключения в игровой задаче, сводящейся к двумерной по фазовой переменной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания, предполагает разбиение фазовой плоскости в каждый момент времени на «клетки», во внутренности которых управляющее воздействие постоянно и принимает одно из крайних значений. При этом важно, какую информацию, связанную с функцией цены, следует задавать на линиях переключения, определяющих разбиение. В работе для дифференциальной игры с двумя догоняющими и одним убегающим выделен набор параметров задачи (случай «слабых» преследователей), когда никакая дополнительная информация, помимо самих линий переключения, не требуется при реализации близкого к оптимальному способа управления минимизирующего игрока. Предложенный метод конструирования квазиоптимальной стратегии устойчив по отношению к малым вычислительным погрешностям построения линий переключения, а также к информационным погрешностям определения текущего фазового состояния системы. Ранее аналогичный результат был получен для случая «сильных» преследователей. Случай слабых преследователей намного сложнее.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство леммы 1.* Положим для определенности, что  $i = 2$  и из знаков  $+$  и  $-$  выбран знак  $+$ .

Наряду с движением  $x^{(1)}(\cdot; t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))$  системы (8), которое в формулировке леммы 1 обозначено как  $x^{(1)}(\cdot)$ , рассмотрим дополнительно движение  $x^{(2)}(\cdot; t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))$  (кратко  $x^{(2)}(\cdot)$ ) системы (9), развивающееся в силу тех же управлений  $u(\cdot)$  и  $v(\cdot)$ . Пусть  $c_* = V^{(2)}(t_*, x_*)$ . Зафиксируем произвольный момент  $t \in [t_*, t_* + \delta]$ .

По программному управлению  $v(\cdot)$ , рассматриваемому на промежутке  $[t_*, t]$ , подберем программное управление  $u_{st}(\cdot)$  так, что

$$(П.1) \quad x_{st}^{(2)}(t) \in W_{c_*}^{(2)}(t),$$

где  $x_{st}^{(2)}(\cdot) = x_{st}^{(2)}(\cdot; t_*, x_*, u_{st}(\cdot), v(\cdot))$  — движение системы (9), выходящее в момент  $t_*$  из точки  $x_*$  под действием управлений  $u_{st}(\cdot)$  и  $v(\cdot)$ . Такое всегда можно сделать, опираясь на свойство стабильности [6, 8] множества уровня  $W_{c_*}^{(2)}$  функции цены  $V^{(2)}$ . Включение (П.1) означает, что

$$(П.2) \quad V^{(2)}(t, x_{st}^{(2)}(t)) \leq V^{(2)}(t_*, x_*).$$

Рассмотрим новое управление  $\hat{u}_{st}(\cdot)$  с компонентами  $\hat{u}_{1st}(\cdot) = u_{1st}(\cdot)$  и  $\hat{u}_{2st} \equiv +\mu_2$ . Пусть  $\hat{x}_{st}^{(2)}(\cdot)$  — движение системы (9), выходящее в момент  $t_*$  из точки  $x_*$  под действием управлений  $\hat{u}_{st}(\cdot)$  и  $v(\cdot)$ . Справедливы соотношения:

$$(П.3) \quad \hat{x}_{1st}^{(2)}(t) = x_{1st}^{(2)}(t), \quad \hat{x}_{2st}^{(2)}(t) \leq x_{2st}^{(2)}(t).$$

Поскольку точки  $\hat{x}_{st}^{(2)}(t)$  и  $x_{st}^{(2)}(t)$  находятся в множестве  $\Pi_+(2, t)$ , то из (П.3) вытекает, что

$$(П.4) \quad V^{(2)}(t, \hat{x}_{st}^{(2)}(t)) \leq V^{(2)}(t, x_{st}^{(2)}(t)).$$

По условию леммы 1 компонента  $u_2(\cdot)$  векторного управления  $u(\cdot)$  отличается от постоянного управления  $\hat{u}_{2st}(t) \equiv +\mu_2$  только на промежутке длины  $\omega$ . Поэтому

$$(П.5) \quad \left| x_2^{(2)}(t) - \hat{x}_{2st}^{(2)}(t) \right| \leq 2\omega\sigma_2\mu_2.$$

Имеем

$$(П.6) \quad \left| x_2^{(1)}(t) - x_2^{(2)}(t) \right| \leq \chi(t_*, t).$$

Из (П.5) и (П.6) следует, что

$$(П.7) \quad \left| x_2^{(1)}(t) - \hat{x}_{2st}^{(2)}(t) \right| \leq 2\omega\sigma_2\mu_2 + \chi(t_*, t).$$

Рассмотрим горизонтальную прямую, проходящей через точку  $x^{(1)}(t)$ . В силу (П.7) на этой прямой найдется такая точка  $a$ , что  $\|a - \hat{x}_{st}^{(2)}(t)\|_\infty \leq 2\omega\sigma_2\mu_2 + \chi(t_*, t)$ . Следовательно,  $V^{(2)}(t, a) \leq V^{(2)}(t, \hat{x}_{st}^{(2)}(t)) + 2\lambda\omega\sigma_2\mu_2 + \lambda\chi(t_*, t)$ . Отсюда с учетом (П.2) и (П.4) имеем  $V^{(2)}(t, a) \leq V^{(2)}(t_*, x_*) + 2\lambda\omega\sigma_2\mu_2 + \lambda\chi(t_*, t)$ .

Поскольку  $\mathcal{V}(1, t, a) \leq V^{(2)}(t, a)$ , то

$$(П.8) \quad \mathcal{V}(1, t, a) \leq V^{(2)}(t_*, x_*) + 2\lambda\omega\sigma_2\mu_2 + \lambda\chi(t_*, t).$$

Учитывая равенство  $\mathcal{V}(1, t, a) = \mathcal{V}(1, t, x^{(1)}(t))$ , из (П.8) получаем (15).

Доказательству леммы 2 предположим лемму 3.

*Лемма 3.* Пусть  $(t_*, x_*) \in Y$ ,  $\delta > 0$ ,  $t_* + \delta < T$  и  $0 \leq \omega \leq t_* + \delta$ . Предположим, что любое движение системы (9), выходящее в момент  $t_*$  из точки  $x_*$ , не попадает при  $t \in [t_*, t_* + \delta]$  на линии  $\Pi(i, t)$ ,  $i = 1, 2$ .

Пусть вдоль некоторого движения  $x^{(1)}(\cdot)$  системы (8), выходящего в момент  $t_*$  из точки  $x_*$  в силу допустимых управлений  $u(\cdot)$  и  $v(\cdot)$ , для каждого  $i = 1, 2$  верно, что

1) либо  $x^{(1)}(t) \in \Pi_+(i, t)$  на промежутке  $[t_*, t_* + \delta]$  и  $u_i(t) = +\mu_i$  на  $[t_* + \omega, t_* + \delta]$ ;

2) либо  $x^{(1)}(t) \in \Pi_-(i, t)$  на промежутке  $[t_*, t_* + \delta]$  и  $u_i(t) = -\mu_i$  на  $[t_* + \omega, t_* + \delta]$ .

Тогда при любом  $t \in [t_*, t_* + \delta]$  справедлива оценка

$$(П.9) \quad V^{(2)}(t, x^{(1)}(t)) \leq V^{(2)}(t_*, x_*) + 2\lambda\omega\sigma\mu + \lambda\chi(t_*, t).$$

*Доказательство леммы 3.* Из возможных вариантов сочетания знаков  $+$ ,  $-$  и значений  $i = 1, 2$  рассмотрим для определенности случай, когда вдоль движения  $x^{(1)}(\cdot)$  системы (8) на промежутке  $[t_*, t_* + \delta]$  выполнены включения  $x^{(1)}(t) \in \Pi_+(i, t)$ ,  $i = 1, 2$ . Пусть  $c_* = V^{(2)}(t_*, x_*)$ . Зафиксируем произвольный момент  $t \in [t_*, t_* + \delta]$ .

По программному управлению  $v(\cdot)$ , рассматриваемому на промежутке  $[t_*, t]$ , подберем программное управление  $u_{st}(\cdot)$  так, что

$$(П.10) \quad x_{st}^{(2)}(t) \in W_{c_*}^{(2)}(t),$$

где  $x_{st}^{(2)}(\cdot) = x_{st}^{(2)}(\cdot; t_*, x_*, u_{st}(\cdot), v(\cdot))$  — движение системы (9), выходящее в момент  $t_*$  из точки  $x_*$  под действием управлений  $u_{st}(\cdot)$  и  $v(\cdot)$ . Включение (П.10) означает, что  $V^{(2)}(t, x_{st}^{(2)}(t)) \leq V^{(2)}(t_*, x_*)$ .

Введем новое управление  $\hat{u}_{st}(\cdot)$  с компонентами  $\hat{u}_{i\ st}(t) = +\mu_i$ ,  $i = 1, 2$ . В рассматриваемом случае выполнены неравенства  $\hat{x}_{1\ st}^{(2)}(t) \leq x_{1\ st}^{(2)}(t)$  и  $\hat{x}_{2\ st}^{(2)}(t) \leq x_{2\ st}^{(2)}(t)$ . Поскольку точки  $\hat{x}_{st}^{(2)}(t)$  и  $x_{st}^{(2)}(t)$  лежат в  $\Pi_+(1, t) \cap \Pi_+(2, t)$ , то

$$(П.11) \quad V^{(2)}(t, \hat{x}_{st}^{(2)}(t)) \leq V^{(2)}(t, x_{st}^{(2)}(t)) \leq V^{(2)}(t_*, x_*).$$

По условию леммы 3 компонента  $u_i(\cdot)$  отличается от  $u_i \equiv +\mu_i$  только на промежутке длиной не больше  $\omega$ . Поэтому  $|x_i^{(2)}(t) - \hat{x}_{i\ st}^{(2)}(t)| \leq 2\omega\sigma_i\mu_i$ ,  $i = 1, 2$ . Значит,

$$\|x^{(2)}(t) - \hat{x}_{st}^{(2)}(t)\|_\infty \leq 2\omega\sigma\mu.$$

Имеем  $\|x^{(1)}(t) - x^{(2)}(t)\|_\infty \leq \chi(t_*, t)$ . Следовательно,

$$\|x^{(1)}(t) - \hat{x}_{st}^{(2)}(t)\|_\infty \leq 2\omega\sigma\mu + \chi(t_*, t).$$

С учетом (П.11) отсюда вытекает (П.9).

*Доказательство леммы 2.* Зафиксируем  $t \in (t_*, t^*)$ . Пусть  $t_\diamond \in (t_*, t)$ . Подберем достаточно мелкое разбиение отрезка  $[t_\diamond, t]$  моментами  $\{t_j\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, e$ ,  $t_1 = t_\diamond$ ,  $t_e = t$ ,  $t_{j+1} \leq t_j + \delta$ , так, чтобы для любого промежутка  $[t_j, t_{j+1}]$ ,  $j = 1, 2, \dots, e-1$ , произвольное движение системы (9), выходящее в момент  $t_j$  из точки  $x^{(1)}(t_j)$ , не попадало на нем на линии переключения. Это можно сделать в силу непрерывности изменения во времени линий переключения, а также в силу предположения, наложенного на расположение движения  $x^{(1)}(\cdot)$  относительно линий переключения.

Положим  $\rho(t_j) = 0$ , если  $t_j \leq t_* + \omega$ , и  $\rho(t_j) = 1$ , если  $t_j < t_* + \omega$ . С учетом леммы 3 при каждом  $j$  имеем соотношение

$$(П.12) \quad V^{(2)}(t_{j+1}, x^{(1)}(t_{j+1})) \leq V^{(2)}(t_j, x^{(1)}(t_j)) + \rho(t_j)2\lambda\delta\sigma\mu + \lambda\chi(t_j, t_{j+1}).$$

Применяя оценку (П.12) для  $j = 1, 2, \dots, e-1$ , приходим к неравенству

$$V^{(2)}(t, x^{(1)}(t)) \leq V^{(2)}(t_\diamond, x^{(1)}(t_\diamond)) + 2\lambda(\omega + \delta)\sigma\mu + \lambda\chi(t_\diamond, t).$$

Переходя к пределу при  $\delta \rightarrow 0$ , а затем при  $t_\diamond \rightarrow t_*$ , получаем оценку (16) для  $t \in (t_*, t^*)$ . Если  $t = t^*$ , добавляем еще один предельный переход.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Le Méneç S.* Linear differential game with two pursuers and one evader / Annals of the Int. Society of Dynamic Games. V.11. Advances in Dynamic Games. Theory, Applications, and Numerical Methods for Differential and Stochastic Games (Bretton M., Szajowski K. eds.). Boston: Birkhauser, 2011. P. 209–226.
2. *Ganebny S.A., Kumkov S.S., Le Méneç S., et al.* Model Problem in a Line with Two Pursuers and One Evader // Dyn. Games Appl. 2012. V. 2. P. 228–257.
3. *Ganebny S.A., Kumkov S.S., Le Méneç S., et al.* Study of linear game with two pursuers and one evader: different strength of pursuers / Annals of the Int. Society of Dynamic Games. V. 12. Advances in Dynamic Games (Cardaliaguet P., Cressman R. eds.), Boston: Birkhauser, 2012. P. 269–292.
4. *Shinar J., Shima T.* Non-Orthodox Guidance Law Development Approach for Intercepting Maneuvering Targets // J. Guid. Contr. Dyn. 2002. V. 25. No. 4. P. 658–666.
5. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
6. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
7. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
8. *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* Game-Theoretical Control Problems. N.Y.: Springer-Verlag, 1988.
9. *Тарасьев А.М., Успенский А.А., Ушаков В.Н.* Аппроксимационные схемы и конечно-разностные операторы для построения обобщенных решений уравнений Гамильтона – Якоби // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. № 3. С. 173–185.
10. *Vardi M., Capuzzo-Dolcetta I.* Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton – Jacobi – Bellman Equations. Boston: Birkhauser, 1997.
11. *Боткин Н.Д., Пацко В.С.* Позиционное управление в линейной дифференциальной игре // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 4. С. 78–85.
12. *Боткин Н.Д., Кейн В.М., Пацко В.С.* Модельная задача об управлении боковым движением самолета на посадке // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 4. С. 560–567.
13. *Пацко В.С.* Поверхности переключения в линейных дифференциальных играх // Совр. математика и ее приложения. 2005. Т. 23. С. 79–122.
14. *Пшеничный Б.Н.* Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
15. *Чикрий А.А.* Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992.
16. *Григоренко Н.Л.* Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990.
17. *Благодатских А.И., Петров Н.Н.* Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Удмурт. ун-т, 2009.
18. *Петросян Л.А.* Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977.
19. *Петросян Л.А., Томский Г.В.* Геометрия простого преследования. Новосибирск: Наука, 1983.
20. *Рихсиев Б.Б.* Дифференциальные игры с простыми движениями. Ташкент: Фан, 1989.



21. *Ольшанский В.К., Рубинович Е.Я.* Простейшие дифференциальные игры преследования системы из двух объектов // *АиТ.* 1974. № 1. С. 24–34.  
*Ol'shanskii V.K., Rubinovich E.Ya.* Elementary Differential Games of Pursuit of a Two-Object System // *Autom. Remote Control.* 1974. Vol. 35. No. 1. P. 19–28.
22. *Hagedorn P., Breakwell J.V.* A Differential Game with Two Pursuers and One Evader // *JOTA.* 1976. V. 18. No. 1. P. 15–29.
23. *Меликян А.А.* Оптимальное взаимодействие двух преследователей в игровой задаче // *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.* 1981. № 2. С. 49–56.
24. *Pashkov A.G., Terekhov S.D.* A Differential Game of Approach with Two Pursuers and One Evader // *JOTA.* 1987. V. 55. No. 2. P. 303–312.
25. *Stipanović D.M., Tomlin C.J., Leitmann G.* Monotone Approximations of Minimum and Maximum Functions and Multi-Objective Problems // *Appl. Math. Optim.* 2012. V. 66. P. 455–473.
26. *Shima T., Shinar J.* Time-Varying Linear Pursuit-Evasion Game Models with Bounded Controls // *J. Guid. Contr. Dyn.* 2002. V. 25. No. 3. P. 425–432.
27. *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.*

Поступила в редакцию 06.09.2013