В. Н. Павленко, Метод монотонных операторов для уравнений с разрывными нелинейностями, *Изв. вузов. Матем.*, 1991, номер 6, 38–45

3. Шелехов А. М. О дифференциально-геометрических объектах высших порядков многомерной три-ткани // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии.— 1987.— Т. 19.— С. 101—154.
4. Акивис М. А., Шелехов А. М. Об альтернаторах четвертого порядка локальной аналитической лупы и три-тканях многомерных поверхностей // Изв. вузов. Математика.— 1989.— № 4.— С. 12—16.
5. Белоусов В. Д. Основы теории квазигрупп и луп.— М.: Наука, 1967.
6. Chern S. S. Eine Invariantentheorie der Dreigewebe aus r-dimensionalen Mannigfaltigkeiten im R_{2r} // Abhandl. Math. Semin. Univ. Hamburg.— 1936.— Bd. 11.— S. 333—358.
7. Kikkawa M. Canonical connections of homogeneous Lie loops and 3-webs // Mem. Fac. Sci. Shimane Univ.— 1985.— 19.— P. 37—55.
8. Сабинин Л. В. Дифференциальная геометрия и квазигруппы // Тр. ин-та / Ин-т математики СО АН СССР.— 1989.— Т. 14.— С. 208—221.

г. Москва

Поступила
16.04.1990

В. Н. Павленко

УДК 517.948

МЕТОД МОНОТОННЫХ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Рассматриваются уравнения вида

$$\Lambda x + Tx = 0, \tag{1}$$

где Λ — нелинейный оператор с линейной и плотной в E областью определения $D(\Lambda)$, со значениями в сопряженном пространстве E^*, оператор $T: E \to E^*$ полумонотонный [1] (возможно разрывный), E — вещественное рефлексивное банахово пространство. Получены достаточные условия существования решений уравнения (1), являющихся точками радиальной непрерывности оператора $\Lambda + T$. Общие результаты применяются для доказательства существования полуправильного решения [2] первой краевой задачи для полулинейного параболического уравнения с разрывной слабой нелинейностью. Полуправильные решения для интегральных уравнений с разрывными нелинейностями были введены М. А. Красносельским и А. В. Покровским в [2], ими же изучался вопрос о существовании полуправильных решений задачи Дирихле для полулинейных эллиптических уравнений второго порядка в [3]. Эти исследования были продолжены А. В. Покровским в [4] и автором в [5]. Уравнение (1) без плотно определенной части Λ рассматривалось И. П. Рязанцевой в [6], где вводится понятие решения (в некотором обобщенном смысле) и доказывается теорема существования. В [7] для уравнения (1) с линейным оператором Λ существование решений устанавливается при более жестких ограничениях на точки разрыва оператора T, чем в данной работе.

§ 1. Формулировка основных результатов

Пусть $Q: D(Q) \to E^*$ — нелинейный оператор с линейной в вещественном банаховом пространстве E областью определения $D(Q)$. Элемент $x \in D(Q)$ называется точкой радиальной непрерывности оператора Q, если для любого $h \in D(Q)$

$$\lim_{t \to 0} \langle Q(x + th), h \rangle = \langle Qx, h \rangle,$$

где $\langle y, h \rangle$ — значение линейного функционала $y \in E^*$ на векторе $h \in E$ [8]. Оператор $T: E \to E^*$ называется полумонотонным, если $T = K + C$, где $K: E \to E^*$ монотонный, а $C: E \to E^*$ усиленно непрерывный [1].

Определение 1. Точку $x \in D(Q)$ назовем регулярной для оператора $T: E \to E^*$ относительно оператора Q, если найдется $h \in E$ такой, что

$$\varliminf_{t \to +0} \langle Qx + T(x + th), h \rangle < 0.$$

Теорема 1. *Предположим, что:*

1) *оператор* $\Lambda : D(\Lambda) \to E^*$ *с линейной и плотной в* E *областью определения* $D(\Lambda)$, *радиально непрерывный на* $D(\Lambda)$ *и максимально монотонный* (E — *вещественное рефлексивное банахово пространство*);

2) *оператор* $T : E \to E^*$ *полумонотонный, причем существует* $R > 0$ *такое, что* $\langle \Lambda x + Tx, x \rangle \geq 0$, *если* $x \in D(\Lambda)$ *и* $\|x\| = R$;

3) *все точки, принадлежащие шару* $B(R) = \{x \in E \mid \|x\| \leq R\}$ *и* $D(\Lambda)$, *в которых нарушено условие радиальной непрерывности для оператора* T, *регулярные для* T *относительно* Λ.

Тогда уравнение (1) *имеет решение из* $D(\Lambda) \cap B(R)$, *являющееся точкой радиальной непрерывности* T.

Замечание. Если оператор $\Lambda + T$ строго монотонный, то уравнение (1) имеет не более одного решения.

Рассматривается первая краевая задача

$$Lu(x, t) + g(x, t, u(x, t)) = 0, \ (x, t) \in Q_T; \ u|_{\Gamma_T} = 0 \tag{2}$$

в цилиндре $Q_T = \Omega \times]0; T[$ (Ω — ограниченная область в R^n с границей S класса C^2), где $\Gamma_T = (S \times [0; T[) \cup \{(x, t) \mid x \in \Omega, t = 0\}$ — параболическая граница цилиндра Q_T,

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i, j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} a_{ij}(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

— параболический дифференциальный оператор с измеримыми по Лебегу на Q_T коэффициентами a_{ij}, обобщенные производные первого порядка которых принадлежат $L_\infty(Q_T)$ и удовлетворяющими условию равномерной параболичности: существуют положительные константы α и β такие, что для любых $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R^n$ и $(x, t) \in Q_T$

$$\alpha |\xi|^2 \leq \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \leq \beta |\xi|^2,$$

функция $g : Q_T \times R \to R$ суперпозиционно измерима и для некоторого $2 \leq p \leq 2(n+1)/n$

$$|g(x, t, u)| \leq k_1 |u|^{p-1} + k_2(x, t) \tag{3}$$

для любых $u \in R$ и почти всех $(x, t) \in Q_T$, где $k_1 > 0$, $k_2 \in L_q(Q_T)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Обозначим через V_q замыкание в метрике пространства $W_q^{2,1}(Q_T)$ множества функций, непрерывных на $\overline{Q}_T$ вместе с производными $\partial u/\partial t$, $\partial u/\partial x_i$, $\partial^2 u/\partial x_i \partial x_j$ и удовлетворяющих условию $u|_{\Gamma_T} = 0$.

Определение 2. Решением задачи (2) назовем функцию $u \in V_q$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, где p из оценки (3), удовлетворяющую почти всюду на Q_T уравнению (2).

Определение 3. Решение задачи (2) $u(x, t)$ называется полуправильным, если для почти всех $(x, t) \in Q_T$ значения $u(x, t)$ являются точками непрерывности $g(x, t, \cdot)$.

Определение 4 [5]. Будем говорить, что для функции $g : Q_T \times R \to R$ выполнено А-условие по отношению к дифференциальному оператору L, если:

а) для любого $u \in R$ функция $g(\cdot, \cdot, u)$ измерима на Q_T и для почти всех $(x, t) \in Q_T$ функция $g(x, t, \cdot)$ имеет разрывы только первого рода и непрерывна справа на R;

б) существует семейство поверхностей $\{S_i\}_{i \in B}$ в R^{n+2} (B — конечное или счетное множество), $S_i = \{(x, t, u) \in R^{n+2} \mid u = \varphi_i(x, t), (x, t) \in \overline{Q_T}\}$, $\varphi_i \in C^2(\overline{Q_T})$, таких, что для почти всех $(x, t) \in Q_T$, если u — точка разрыва функции

$g(x, t, \cdot)$, то $(x, t, u) \in S_i$ для некоторого $i \in B$ и $(g(x, t, u-) + L\varphi_i(x, t)) \times$ $\times (g(x, t, u) + L\varphi_i(x, t)) > 0$.

Отметим, что из условия а) определения 4 следует суперпозиционная измеримость функции g [9].

Замечание. Пусть $g(x, t, u) \equiv g(u)$, где $g: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ — неубывающая непрерывная справа функция на $\boldsymbol{R}$, причем если u_0 — точка разрыва функции g, то $g(u_0)g(u_0-) > 0$. Тогда для g выполнено A-условие по отношению к дифференциальному оператору L.

Теорема 2. *Предположим, что*:

1) *для функции* $g: Q_T \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ *выполнено* A-*условие по отношению к дифференциальному оператору* L *и для почти всех* $(x, t) \in Q_T$ *функция* $g(x, t, \cdot)$ *неубывающая на* $\boldsymbol{R}$;

2) *оценка* (3) *имеет место с* $p \in [2; 2(n+1)/n]$, *и если* $p \neq 2$, *то*

$$g(x, t, u)u \geqslant a|u|^p - b(x, t)|u|^{p-\gamma} - c(x, t) \tag{4}$$

для любых $u \in \boldsymbol{R}$ *и почти всех* $(x, t) \in Q_T$, *постоянная* a *положительна*, $0 < \gamma < p$, $b \in L_{p/\gamma}(Q_T)$, $c \in L(Q_T)$.

Тогда задача (2) *имеет единственное решение, и оно полуправильное.*

§ 2. Вспомогательные результаты

В этом пункте E — вещественное рефлексивное банахово пространство. Для локально ограниченного в каждой точке E отображения $T: E \to 2^{E^*}$ [10] через ST будем обозначать секвенциальное замыкание T, определяемое следующим образом: для $x \in E$ значение STx совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой множества $T_{\text{п}}x$ слабых частичных пределов последовательностей (y_n), где $y_n \in Tx_n$, а (x_n) сильно сходится к x [6]. Если отображение $T: E \to 2^{E^*}$ монотонное, то оно локально ограниченное в любой точке E [10] и ST совпадает с максимально монотонным расширением оператора T [6]. Отображение $T: E \to 2^{E^*}$ называется слабо-сильно замкнутым в точке $x \in E$, если из $x_n \to x$, $y_n \in Tx_n$ и $y_n \rightharpoonup y$ следует, что $y \in Tx$. Если оператор $T: E \to 2^{E^*}$ максимально монотонный, то он слабо-сильно замкнутый в каждой точке E. Действительно, если $x_n \to x_0$, $y_n \in Tx_n$ и $y_n \rightharpoonup y_0$, то для любого натурального n и произвольных $x \in E$, $y \in Tx$ верно неравенство $\langle y - y_n, x - x_n \rangle \geqslant 0$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим $\langle y - y_0, x - x_0 \rangle \geqslant 0$. Отсюда в силу произвольности $x \in E$, $y \in Tx$ и максимальной монотонности оператора T заключаем, что $y_0 \in Tx_0$.

Предложение 1. *Если* $T = K + C$, *где* $K: E \to E^*$ *монотонный, а* $C: E \to E^*$ *усиленно непрерывный на* E, *то*:

а) $ST = SK + C$;

б) *включение* $0 \in STx$ *равносильно неравенству*

$$\langle Kz + Cx, z - x \rangle \geqslant 0 \quad \forall z \in E. \tag{5}$$

Доказательство предложения 1. Проверка утверждения а) тривиальна. Докажем утверждение б). Пусть $0 \in STx$. Тогда в силу утверждения а) $0 \in SKx + Cx$ и, значит, $-Cx \in SKx$. Отсюда и монотонности SK следует (5). Обратно, предположим, что (5) имеет место, и покажем, что $0 \in STx$. В силу максимальной монотонности SK и равенства а) достаточно показать, что $\langle y + Cx, z - x \rangle \geqslant 0$ для любых $z \in E$ и $y \in SKz$. Если $y \in K_{\text{п}}z$, то существует последовательность (z_n), сильно сходящаяся к z в E, для которой $Kz_n \rightharpoonup y$. Отсюда и из (5) следует неравенство $\langle y + Cx, z - x \rangle \geqslant 0$. Если y принадлежит выпуклой оболочке $K_{\text{п}}z$, то $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ и $y_i \in K_{\text{п}}z$, и следовательно,

$$\langle y + Cx, z - x \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i + Cx, z - x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle y_i + Cx, z - x \rangle \geqslant 0.$$

Наконец, если $y \in SKz$, то найдется последовательность (y_n), содержащаяся в выпуклой оболочке множества $K_{\text{п}} z$ и сильно сходящаяся к y. По доказанному для произвольного натурального n справедливо неравенство $\langle y_n + Cx, z - x \rangle \geqslant 0$. Из него при $n \to \infty$ получим $\langle y + Cx, z - x \rangle \geqslant 0$. Предложение 1 доказано.

Предложение 2. *Пусть E — конечномерное вещественное нормированное пространство, $B(R)$ — замкнутый шар в E с центром в нуле пространства радиуса R, оператор $A : B(R) \to 2^{E^*}$ замкнутый* [11], *имеет выпуклые значения и локально ограниченный в каждой точке $B(R)$, причем для любого x, лежащего на границе шара $B(R)$,*

$$\operatorname{Sup}_{y \in Ax} \langle y, x \rangle \geqslant 0.$$

Тогда найдется $x_0 \in B(R)$ с включением $0 \in Ax_0$.

Доказательство предложения 2. В силу следствия 3 п. 4 гл. 6 из [11] достаточно установить полунепрерывность сверху отображения A [11] на $B(R)$ (замкнутость значений A следует из замкнутости оператора A). Допустим противное; тогда найдутся $x \in B(R)$ и окрестность $V(Ax)$ множества Ax такие, что для любого натурального n существуют $x_n \in B(R)$ с $\|x_n - x\| < 1/n$ и $y_n \in Ax_n$, которое не принадлежит $V(Ax)$. Из локальной ограниченности A в точке x заключаем об ограниченности последовательности (y_n) в E^*. Отсюда и конечномерности E следует существование подпоследовательности (y_{n_k}) последовательности (y_n), которая сходится к некоторому y. Тогда, с одной стороны, согласно выбору y_n элемент $y \notin V(Ax)$, с другой стороны, $y \in Ax$ в силу замкнутости A. Получено противоречие. Предложение 2 доказано.

§ 3. Доказательство основных результатов

Для доказательства теоремы 1 понадобится

Лемма. *Предположим, что выполнены условия* 1) *и* 2) *теоремы* 1. *Тогда для любого конечномерного подпространства $F \subset D(\Lambda)$ существуют $u_F \in F$ с $\|u_F\| \leqslant R$ и $y_F \in STu_F$ такие, что $\langle \Lambda u_F + y_F, h \rangle = 0$ для любого $h \in F$, причем $\|y_F\| \leqslant M$, где постоянная M не зависит от выбора F.*

Доказательство леммы. Пусть F — конечномерное подпространство $D(\Lambda)$, P_F — оператор вложения F в E [8], P_F^* — оператор, сопряженный с P_F. Рассмотрим отображение $G_F = P_F^*(\Lambda + ST)P_F$, действующее из F в 2^{F^*}. По условию оператор T полумонотонный, поэтому $T = A + C$, где $A : E \to E^*$ монотонный, а $C : E \to E^*$ усиленно непрерывный на E. Отображение $P_F^*(\Lambda + SA)P_F)$ монотонное на F и, следовательно, локально ограниченное в каждой точке F [10]. Отсюда, из равенства $ST = SA + C$ и ограниченности C (как усиленно непрерывного оператора) следует локальная ограниченность G_F на F. Значения оператора G_F выпуклые, поскольку для любого $x \in F$ множество SAx выпуклое. Установим замкнутость отображения G_F. Надо показать, что если последовательность (x_n) сходится к x в F, $y_n \in G_F x_n$ и $y_n \to y$, то $y \in G_F x$. Так как $y_n \in G_F x_n$, то $y_n = P_F^*(u_n + Cx_n + \Lambda x_n)$, где $u_n \in SAx_n$. Из локальной ограниченности SA следует ограниченность в E^* последовательности (u_n), что в силу рефлексивности пространства E влечет существование слабо сходящейся подпоследовательности (u_{n_k}). Если $u_{n_k} \rightharpoonup u$, то из слабосильной замкнутости отображения SA (как максимально монотонного) в точке x получим, что $u \in SAx$. Оператор $P_F^* \Lambda P_F$ непрерывный на F (как монотонный и радиально непрерывный на F [8]), поэтому $P_F^* \Lambda x_n \to P_F^* \Lambda x$. Имеем $y_{n_k} = P_F^* u_{n_k} + P_F^* \Lambda x_{n_k} + P_F^* Cx_{n_k} \to P_F^*(u + \Lambda x + Cx) \in G_F x$; отсюда следует принадлежность y множеству $G_F x$. В силу условия 2) теоремы 1 для $x \in F$

с $\|x\|=R$ справедливо $\langle P_F^*(\Lambda x+Ax+Cx),\ x\rangle=\langle\Lambda x+Tx,\ x\rangle\geqslant 0$ и, следовательно, $\operatorname{Sup}_{y\in G_F x}\langle y,\ x\rangle\geqslant 0$, поскольку $P_F^*(\Lambda x+Ax+Cx)\in G_F x$. Таким образом, для отображения G_F выполнены все условия предложения 2. Поэтому существует $u_F\in F$ с $\|u_F\|\leqslant R$ такой, что $0\in G_F u_F$, и значит, найдется элемент $y_F\in STu_F$, удовлетворяющий равенству $P_F^*(y_F+\Lambda u_F)=0$. Для любого $h\in F$ имеем $\langle y_F+\Lambda u_F,\ h\rangle=0$. Оценим $\|y_F\|$. Полагая в последнем равенстве $h=u_F$ и учитывая монотонность Λ, получим $\langle y_F,\ u_F\rangle=-\langle\Lambda u_F,\ u_F\rangle\leqslant-\langle\Lambda 0,\ u_F\rangle\leqslant\leqslant\|\Lambda 0\|R=M_1$. Так как $y_F\in STu_F$, то найдется $z_F\in SAu_F$ такой, что $y_F==z_F+Cu_F$. Из ограниченности оператора C следует существование постоянной $M_2>0$, ограничивающей сверху $\|Cu\|$ на шаре $B(R)$. Далее, $\langle z_F,\ u_F\rangle==\langle y_F,\ u_F\rangle-\langle Cu_F,\ u_F\rangle\leqslant M_1+M_2R=M_3$. Поскольку оператор A локально ограничен в нуле, то существуют постоянные $r>0$ и $M_4>0$ такие, что $\|Az\|\leqslant M_4$ для любого z, принадлежащего шару $B(r)$ пространства E. Воспользуемся равенством

$$\|y_F\|=\operatorname{Sup}_{\|z\|\leqslant r}\langle y_F,\ z\rangle/r$$

для оценки $\|y_F\|$. В силу монотонности SA имеем для любого $z\in E$ с $\|z\|\leqslant r$

$$\langle y_F,\ z\rangle=\langle z_F+Cu_F-Az+Az,\ z-u_F+u_F\rangle\leqslant$$

$$\leqslant\langle z_F-Az,\ u_F\rangle+\langle Az+Cu_F,\ z\rangle\leqslant M_3+M_4R+M_4r+M_2r,$$

следовательно, $\|y_F\|\leqslant M_3/r+M_4R/r+M_4+M_2=M$. Заметим, что M не зависит от F. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. На линейном пространстве $E\times E^*$ определим норму равенством $\|[x,\ y]\|=\|x\|+\|y\|$ для любой точки $[x,\ y]$ пространства $E\times E^*$. Построенное нормированное пространство рефлексивно, поскольку рефлексивно E. В $E\times E^*$ рассмотрим множество $\Pi=\{[x,\ y]\in\in E\times E^*\,|\,\|x\|\leqslant R,\ \|y\|\leqslant M\}$, где M — константа из леммы. Множество Π выпукло и замкнуто в рефлексивном пространстве $E\times E^*$. Поэтому топологическое пространство $(\Pi,\ \tau)$, где τ — след слабой топологии в $E\times E^*$ на Π, является компактом. Обозначим через Φ семейство всех конечномерных подпространств из $D(\Lambda)$ и для произвольного $F_0\in\Phi$ положим

$$U_{F_0}=\bigcup_{F\supset F_0,\,F\in\Phi}\{[x,\ y]\in\Pi\,|\,x\in F,\ y\in STx \text{ и } \langle y+\Lambda x,\ h\rangle=0 \text{ для любого } h\in F\}.$$

Из приведенной выше леммы следует, что для любого $F_0\in\Phi$ множество U_{F_0} не пусто. Рассмотрим в пространстве $(\Pi,\ \tau)$ систему замкнутых множеств $D=\{\overline{U}_F\}_{F\in\Phi}$, где $\overline{U}_F$ — замыкание U_F в топологии τ. Заметим, что семейство D центрировано. Действительно, если $F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_n\in\Phi$, то для каждого $F\in\Phi$ такого, что $F\supset\bigcup_{i=1}^n F_i$, имеет место включение $\bigcap_{i=1}^n U_{F_i}\supset U_F\neq\varnothing$. Согласно критерию компактности топологического пространства существует $[u,\ w]\in\in\bigcap_{F\in\Phi}\overline{U}_F$. Покажем, что u — решение уравнения (1). Пусть $z\in D(\Lambda)$ и $x\in E$. Выберем $F\in\Phi$ так, чтобы $z\in F$. Тогда для любых $[u_F,\ y_F]\in U_F$ и $y\in STx$ имеем с учетом монотонности Λ и $SA=ST-C$

$$0=\langle y_F+\Lambda u_F,\ z-u_F\rangle\leqslant\langle\Lambda z+y_F,\ z-u_F\rangle\leqslant$$

$$\leqslant\langle\Lambda z+y_F,\ z-u_F\rangle+\langle y-y_F,\ x-u_F\rangle+\langle Cu_F-Cx,\ x-u_F\rangle.$$

Так как $[u,\ w]$ принадлежит слабому замыканию ограниченного множества U_F в $E\times E^*$, то найдется последовательность $([u_i,\ y_i])\subset U_F$, которая слабо сходится к $[u,\ w]$ в $E\times E^*$. Отсюда следует, что $u_i\to u$ в E, а $y_i\to w$ в E^*.

Подставляя в последнее неравенство $[u_i, y_i]$ вместо $[u_F, y_F]$ и переходя к пределу при $i \to \infty$, получим

$$\langle \Lambda z, z-u\rangle + \langle w, z-x\rangle + \langle y, x-u\rangle + \langle Cu - Cx, x-u\rangle \geqslant 0. \qquad (6)$$

Из неравенства (6) при $x = u$ имеем $\langle \Lambda z + w, z-u\rangle \geqslant 0$. Отсюда в силу произвольности выбора $z \in D(\Lambda)$ и максимальной монотонности Λ заключаем, что $u \in D(\Lambda)$ и $w = -\Lambda u$. Полагая теперь $z = u$ в (6), получим $\langle y - Cx - (w - Cu), x - u\rangle \geqslant 0$. Из этого неравенства в силу произвольности $x \in E$ и $v = y - Cx \in SAx$ и максимальной монотонности SA заключаем, что $w - Cu \in SAu$ и, значит, $0 \in SAu + Cu - w$. Отсюда, из равенства $w = -\Lambda u$ и предложения 1 следует неравенство

$$\langle Ax + Cu + \Lambda u, x - u\rangle \geqslant 0 \ \forall x \in E \qquad (7)$$

(оператор K, фигурирующий в предложении 1, здесь имеет вид $Kx = Ax + \Lambda u$). Пусть $h \in E$, $x_t = u + th$, $t > 0$. Из (7) получим $\langle Ax_t + Cu + \Lambda u, h\rangle \geqslant 0$, следовательно,

$$\lim_{t \to +0} \langle Tx_t + \Lambda u, h\rangle \geqslant 0 \qquad (8)$$

(учтено, что $Cx_t \to Cu$ при $t \to +0$). Поскольку последнее неравенство выполняется для любого $h \in E$, то в силу условия 3) теоремы 1 в точке u оператор T радиально непрерывен. Отсюда и из (8) имеем для произвольного $h \in E$ неравенство $\langle Tu + \Lambda u, h\rangle \geqslant 0$, что возможно лишь при $\Lambda u + Tu = 0$. Теорема 1 полностью доказана.

З а м е ч а н и е. Схема доказательства теоремы 1 является естественным обобщением доказательства теоремы 2.3 гл. 3 из [8] на случай уравнений с разрывными операторами.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Сформулируем задачу (2) в виде операторного уравнения (1) в вещественном рефлексивном пространстве $E = L_p(Q_T)$ (p взято из условия 2) теоремы 2). Определим линейный оператор Λ на множестве $D(\Lambda) = V_q$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ (V_q определено в § 1) равенством $\Lambda u = Lu(x, t)$. Условие $2 \leqslant p \leqslant 2(n+1)/n$ гарантирует непрерывность вложения V_q с нормой пространства $W_q^{1,1}(Q_T)$ в $L_p(Q_T)$ (согласно теорем вложения Соболева). Заметим, что V_q всюду плотно в $L_p(Q_T)$, и для любого $u \in V_q$ функция $Lu(x, t)$ принадлежит $L_q(Q_T)$. Оператор Немыцкого $Tu = g(x, t, u(x, t))$ в силу суперпозиционной измеримости g и оценки (3) действует из $L_p(Q_T)$ в $L_q(Q_T)$. Так как для почти всех $(x, t) \in Q_T$ функция $g(x, t, \cdot)$ неубывающая на $\mathbf{R}$, то оператор T монотонный. Задача (2) эквивалентна уравнению $\Lambda u + Tu = 0$ в пространстве E. Проверим, что для операторов Λ и T выполнены все условия теоремы 1. Для любого u из множества $D = \{v \in C^2(\overline{Q_T}) \mid u|_{\Gamma_T} = 0\}$ значение $\langle \Lambda u, u\rangle$ неотрицательно. Если $u \in D(\Lambda)$, то, поскольку D всюду плотно в V_q в метрике пространства $W_q^{2,1}(Q_T)$, найдется последовательность $(u_n) \subset D$, сходящаяся к u по норме пространства $W_q^{2,1}(Q_T)$. Из этого заключаем, что $u_n \to u$ в $L_p(Q_T)$ и $\Lambda u_n \to \Lambda u$ в $L_q(Q_T)$ и, значит, $\langle \Lambda u, u\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \Lambda u_n, u_n\rangle \geqslant 0$. Отсюда и из линейности Λ следует монотонность оператора Λ. Покажем, что Λ максимально монотонный. Для любого $f \in L_q(Q^T)$ краевая задача

$$Lu(x, t) = f(x, t), \ (x, t) \in Q_T; \ u|_{\Gamma_T} = 0$$

имеет единственное решение u из $W_q^{2,1}(Q_T)$, причем для u верна оценка $\|u\|^{(2)}_{q, Q_T} \leqslant c_1 \|f\|_{q, Q_T}$, где $\| \ \|^{(2)}_{q, Q_T}$ — норма в пространстве $W_q^{2,1}(Q_T)$, $\| \ \|_{q, Q_T}$ — норма в $L_q(Q_T)$, c_1 — константа, не зависящая от f ([12], теорема 9.1). Поэтому оператор Λ имеет ограниченный обратный $\Lambda^{-1} : L_q(Q_T) \to L_p(Q_T)$. Из монотонности оператора Λ следует монотонность Λ^{-1}. Поскольку Λ^{-1} непрерывен и задан на всем пространстве, то он является максимально монотонным. Отсюда делаем вывод о максимальной монотонности оператора Λ. Кроме того, из линейности Λ следует радиальная непрерывность Λ на $D(\Lambda)$. Если $p=2$, то $q=2$, и для любого $u \in D(\Lambda)$ имеем

$$\langle \Lambda u, u\rangle \geqslant \alpha \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx dt;$$

отсюда и из неравенства Стеклова получим

$$\langle \Lambda u, u\rangle \geqslant \alpha c_2 \int\limits_{Q_T} u^2(x, t) dx dt = \alpha c_2 \|u\|^2,$$

где константа $c_2 > 0$ не зависит от $u \in D(\Lambda)$. Из монотонности T следует, что $\langle Tu, u\rangle \geqslant -\|T0\|\|u\|$ для произвольного $u \in E$. Таким образом, для любого $u \in D(\Lambda)$ верна оценка $\langle \Lambda u + Tu, u\rangle \geqslant \|u\|^2(\alpha c_2 - \|T0\|/\|u\|)$ и, значит, найдется $R>0$ такое, что $\langle \Lambda u + Tu, u\rangle \geqslant 0$, если $u \in D(\Lambda)$ и $\|u\| \geqslant R$. В случае, когда $2 < p \leqslant 2(n+1)/n$, из оценки (4) в условии 2) теоремы 2 следует, что

$$\lim_{\|u\| \to +\infty} \langle Tu, u\rangle = +\infty.$$

Отсюда и из неравенства $\langle \Lambda u, u\rangle \geqslant 0$ на $D(\Lambda)$ делаем вывод о существовании $R>0$ такого, что $\langle \Lambda u + Tu, u\rangle \geqslant 0$ для $u \in D(\Lambda)$ с $\|u\| \geqslant R$. Осталось проверить выполнение условия 3) теоремы 1. Заметим, что $u \in L_p(Q_T)$ является точкой радиальной непрерывности оператора T тогда и только тогда, когда мера Лебега множества

$$\omega = \{(x, t) \in Q_T | (u(x, t) - \text{точка разрыва функции } g(x, t, \cdot)\} \qquad (9)$$

равна нулю. Действительно, если $\operatorname{mes} \omega = 0$ и $h \in L_p(Q_T)$, то

$$\lim_{\lambda \to 0} g(x, t, u(x, t) + \lambda h(x, t)) h(x, t) = g(x, t, u(x, t)) h(x, t)$$

для почти всех $(x, t) \in Q_T$. Отсюда и из оценки (3) для g по теореме Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла имеем

$$\lim_{\lambda \to 0} \langle T(u + \lambda h), h\rangle = \langle Tu, h\rangle.$$

В случае, когда $\operatorname{mes} \omega \neq 0$, для $h = -\varkappa_\omega$ ($\varkappa_\omega$ — характеристическая функция множества ω) получим

$$\lim_{\lambda \to +0} \langle T(u + \lambda h), h\rangle = \int\limits_{\omega} - g(x, t, u(x, t) -) dx dt \neq$$

$$\neq \int\limits_{\omega} - g(x, t, u(x, t)) dx dt = \langle Tu, h\rangle,$$

поскольку для почти всех $(x, t) \in \omega$

$$g(x, t, u(x, t)) > g(x, t, u(x, t) -).$$

Предположим, что $u \in D(\Lambda)$ и не является точкой радиальной непрерывности оператора T. Тогда $\operatorname{mes} \omega \neq 0$ (ω определено равенством (9)). Так как для функции g выполнено А-условие, то для некоторого $i \in B$ множество $\{(x, t) \in \omega | (L\varphi_i(x, t) + g(x, t, u(x, t)))(L\varphi_i(x, t) + g(x, t, u(x, t) -)) > 0, u(x, t) = \varphi_i(x, t)\}$ имеет ненулевую меру. Следовательно, отлична от нуля мера одного из множеств:

$$\omega_+ = \{(x, t) \in \omega | L\varphi_i(x, t) + g(x, t, u(x, t) -) > 0, u(x, t) = \varphi_i(x, t)\},$$

$$\omega_- = \{(x, t) \in \omega | L\varphi_i(x, t) + g(x, t, u(x, t)) < 0, u(x, t) = \varphi_i(x, t)\}.$$

Пусть $\text{mes}\,\omega_+ \neq 0$ ($\text{mes}\,\omega_- \neq 0$). Полагая $h = -\varkappa_{\omega_+}$ ($h = \varkappa_{\omega_-}$), получим

$$\lim_{\lambda \to +0} \langle \Lambda u + T(u + \lambda h), h \rangle < 0,$$

и значит, u — регулярная точка оператора T относительно Λ. Таким образом, все условия теоремы 1 выполнены. Поэтому существует функция $u \in V_q$, которая является решением уравнения $\Lambda u + Tu = 0$ и точкой радиальной непрерывности оператора T. Отсюда следует, что u — полуправильное решение задачи (2). Единственность решения задачи (2) следует из строгой монотонности оператора Λ на $D(\Lambda)$. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений.— М.: Наука, 1972.— 416 с.
2. Красносельский М. А., Покровский А. В. Правильные решения уравнений с разрывными нелинейностями // ДАН СССР.— 1976.— Т. 226.— № 3.— С. 506—509.
3. Красносельский М. А., Покровский А. В. Правильные решения эллиптических уравнений с разрывными нелинейностями // Тр. Всесоюз. конф. по уравнениям с частными производными, посвященной 75-летию со дня рождения академика И. Г. Петровского.— М.: Изд-во МГУ, 1978.— С. 346—347.
4. Покровский А. В. Корректные решения уравнений с сильными нелинейностями // ДАН СССР.— 1984.— Т. 274.— № 5.— С. 1037—1040.
5. Павленко В. Н. О существовании полуправильных решений задачи Дирихле для квазилинейных уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Укр. матем. журн.— 1989.— Т. 41.— № 12.— С. 1659—1664.
6. Рязанцева И. П. Об уравнениях с полумонотонными разрывными отображениями // Матем. заметки.— 1981.— Т. 30.— № 1.— С. 143—152.
7. Павленко В. Н. Существование решений нелинейных уравнений с разрывными полумонотонными операторами // Укр. матем. журн.— 1981.— Т. 33.— № 4.— С. 547—551.
8. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.— М.: Мир, 1978.— 336 с.
9. Шрагин И. В. Условия измеримости суперпозиций // ДАН СССР.— 1971.— Т. 197.— № 2.— С. 295—298.
10. Rockafellar R. T. Local boundedness of nonlinear monotone operators // Michigan Math. J.— 1969.— V. 16.— № 4.— P. 397—407.
11. Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ.— М.: Мир, 1988.— 512 с.
12. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., Солонников В. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.— М.: Наука, 1967.— 736 с.

г. Челябинск

Поступила 10.06.1987

Ю. А. Полонский

УДК 517.982

НЕКОМПАКТНАЯ ВЕРСИЯ ТЕОРЕМЫ ШОКЕ — БИШОПА — де ЛЮ

Предлагаются теоремы об интегральном представлении некомпактных выпуклых множеств. Главное направление развития классической теории Г. Шоке [1], [2] — ее распространение на различные классы некомпактных множеств [3]. Применяемый далее способ доказательств восходит к [4] и не использует упорядоченностей Шоке, а основан на теории K-пространств [5]—[7]. Терминология и обозначения согласованы с [6]—[8].

Всюду далее T — замкнутое ограниченное выпуклое подмножество хаусдорфова локально выпуклого топологического векторного пространства (ЛВП) [7] X, Σ — любая содержащая индуцированную топологию алгебра подмножеств [8] T, $ba(T, \Sigma)$ — полная банахова решетка (БР) [7] всех вещественных аддитивных квазимер ограниченной вариации на (T, Σ) с упорядочением $\mu \leqslant \nu \Leftrightarrow \mu(B) \leqslant \nu(B)$ $\forall B \in \Sigma$ и нормой $\|\mu\| = |\mu|(T)$ [8], БР $B(T, \Sigma)$ — замыкание пространства Σ-простых функций по равномерной норме $\|f\| = \sup_{t \in T} |f(t)|$ полной БР всех ограниченных на T вещественных функций с порядком $f \leqslant g \Leftrightarrow f(t) \leqslant g(t)$ $\forall t \in T$. Банахова решетка $B(T, \Sigma)$ содержит БР $C(T)$ всех непрерывных ограниченных на T вещественных функций [7],