V. N. Troyan, G. A. Ryzhikov, An application of Radon inversion to diffraction tomography, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 1995, Volume 230, 264–277

В. Н. Троян, Г. А. Рыжиков

ПРИМЕНЕНИЕ ИНВЕРСИИ РАДОНА В ДИФРАКЦИОННОЙ ТОМОГРАФИИ

Введение

Представление о реконструктивной томографии, как о задаче восстановления изображения объекта по его лучевым проекциям, постепенно трансформировалось в задачу интегральной геометрии – востановить функцию $\theta(x)$ по значениям заданного u:

$$u(x) = \int\limits_{\sum(x)} \theta(x')w(x,x')d\sigma,$$

$x \in R^n$; $\sum(x)$ – семейство k-мерных многообразий в R^k, $k < n$, $w(x,x')$ – весовая функция, $d\sigma$ – элемент меры на $\sum(x)$.

Задачей реконструктивной томографии можно считать любую задачу восстановления распределенных параметров системы, в частности любую задачу дистанционного зондирования. При этом исходными данными томографической задачи считаются интегралы от параметрических функций, заданных на многообразиях той же размерности, что и размерность области определения. В линейном приближении эти многообразия фиксированы, в общем случае они перестариваются неявным образом на каждом шаге итерации. В статье рассматривается связь обратного преобразования Радона с алгоритмом дифракционной томографии.

Элементы линейной томографии

Математическую основу классической томографии составляет преобразование Радона [1, 2]:

$$u(\rho,\vec{n}) = \widehat{R}_\varphi = \int\limits_{\vec{x}} \varphi(\vec{x})\delta(\rho - \vec{x}\cdot\vec{n})d\vec{x} \triangleq \langle\, \delta(\rho - \vec{x}\cdot\vec{n})\big|\varphi(\vec{x})\,\rangle.$$

где $u(\rho,\vec{n})$ – Радон-образ функции $\varphi(x)$, заданной в N-мерном пространстве, $\delta(\rho-\vec{x}\cdot\vec{n})$ – сингулярное ядро преобразования Радона, вырезающее $N-1$-мерную гиперплоскость (прямую в двумерном случае), заданную вектором нормали $\vec{n}$ и параметром прицельного расстояния ρ – расстоянием от начала координат до гиперплоскости:

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = \rho$$

Преобразование Радона возникло в классической томографии как математическая модель описания многоракурсных просвечиваний рентгеновскими лучами биологических "мягких" объектов, в которых рассеяние рентгеновских лучей можно считать малым. Уравнение переноса точечного (x_0) моноэнергетического (E_0), коллимированного ν_0) источника рентгеновского излучения редуцированное уравнение переноса:

$$(\vec{\nu} \cdot \vec{\nabla}) I(x) + \varphi(x) I(x) = c\delta(x - x_0)\delta(\nu - \nu_0)\delta(E - E_0) \qquad (1)$$

($I(x)$ – поток первичных рентгеновских фотонов; $\vec{\nu}_0$ – направление коллимации источника; $\varphi(x, E)$ – линейный коэффициент ослабления; E – энергия фотонов). При этом предполагается, что векторы $\vec{\nu}$ компланарны, т.е. задача рассматривается как двумерная. Решение уравнения (1) можно записать, проводя замену переменных $\vec{x} \to (\rho, \vec{n})$:

$$I(\rho, \vec{n}, E_0) = C_0 \exp\left\{ - \int\limits_{\mathcal{L}(\rho, \mathbf{n})} \varphi(x) dx \right\}, \qquad (2)$$

где $\mathcal{L}(\rho, \vec{n})$ – линия, вдоль которой распространяется излучение. Логарифмируя соотношение (2), получаем запись преобразования Радона для двумерной задачи:

$$-\ln \frac{I(\rho, \vec{n} E_0)}{c} \triangleq u(\rho, \vec{n}) = \int\limits_{\mathcal{L}} \varphi(x) dx = \int\limits_{\mathcal{X}} \varphi(x) \delta(\rho - \vec{x} \cdot \vec{n}) dx,$$

здесь в последнем равенстве интегрирование распространяется на всю область определения $\varphi(x)$.

Модель планарного сечения объекта возникает при описании зондирования плоским лазерным лучом ("световым ножом") если исследуется плазма. При этом плоский пучок после прохождения исследуемого объема плазмы фокусируется на фотодиод. Как нетрудно видеть, в обоих случаях томографический эксперимент опирается на адекватное использование лучевого описания распространения зондирующего сигнала (длина волны мала по сравнению с характерными размерами неоднородности с сильно вытянутой вперед индикатрисой рассеяния).

Перед рассмотрением основных свойств прямого преобразования Радона напомним некоторые свойства линейных непрерывных функционалов – обобщенных функций:

$$l(\varphi) \triangleq (l(x), \varphi(x)), \quad \text{где} \quad x \in R^n,$$

Замена переменных. Пусть $x = Ly + x_0$ – невырожденное преобразование, тогда

$$\big(l(Ly + x_0), \varphi(x)\big) = |L|^{-1}\big(l(x), \varphi\big(L^{-1}(x - x_0)\big)\big),$$

отсюда для дельта-функции

$$\langle\, \delta\big(Ly + x_0\big) \mid \varphi(y) \,\rangle \triangleq \langle\, \delta(x) \,|\, |L|^{-1}\varphi\big(L^{-1}(x - x_0)\big) \,\rangle.$$

В частности

а) $\langle\, \delta(x - x_0) \,|\, \varphi(x) \,\rangle = \varphi(x_0)$;

б) $\langle\, \delta(ay) \,|\, \varphi(y) \,\rangle = \langle\, \delta(x) \,|\, |a|^{-n}\varphi(a^{-1}x) \,\rangle$;

в) если $L : L^*L = I$ и $x_0 = 0$, то

$$\langle\, \delta(Ly) \,|\, \varphi(y) \,\rangle = \langle\, \delta(x) \,|\, \varphi(L^*x) \,\rangle;$$

г) $\langle\, \delta(\mathcal{L}(x) \,|\, \varphi(x) \,\rangle =$

$$\sum_k \langle\, \delta(y) \,|\, |\mathcal{L}'|_{x_k}|^{-1}\varphi(\mathcal{L}'|_{x_k} y + x_k) \,\rangle = \sum_k |\mathcal{L}'|_{x_k}|^{-1}\varphi(x_k),$$

где $x_k : \mathcal{L}(x_k) = 0$.

Например:

$$\delta(x^2 - c^2t^2) = \frac{1}{2ct}\big[\delta(x - ct) + \delta(x + ct)\big];$$

$$\delta\big(\sin(x)\big) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k\pi);$$

$$\delta(x - x_0) = \big[\prod_i |h_i|\big]^{-1} \prod_i \delta(q_i - q_i^c).$$

Здесь $q_i = q_i(x)$, $h_i = \sum\limits_k \big(\partial x_k/\partial q_i\big)^2$, что соответствует переходу от декартовых к криволинейным ортогональным координатам $q_i(x)$ координат.

Дифференцирование обобщенных функций. Пусть $l \in C^n$, $|\alpha| \leqslant n$, тогда

$$\big(D^\alpha l, \varphi\big) = (-1)^\alpha \big(l, D^\alpha \varphi\big).$$

В частности

$$\langle\, D^\alpha \delta \mid \varphi \,\rangle \triangleq (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi(0).$$

Перечислим основные свойства преобразования Радона [1]:

1) Линейность следует из определения:

$$\widehat{R}[\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2] = \alpha_1\widehat{R}[\varphi_1] + \alpha_2\widehat{R}[\varphi_2].$$

2) На основании (2) поворот объекта приводит к повороту вектора $\vec{n}$ в аргументе Радон-образа:

$$\widehat{R}[\varphi(Ox)] = u(\rho, On),$$

преобразование подобия с коэффициентом $\alpha \neq 0$ приводит к увеличению прицельного расстояния в α раз и уменьшению значения Радон-образа в α^{1-n} раз:

$$\widehat{R}[\varphi(\alpha x)] = \alpha^{-n}u\big(\rho, \frac{\vec{n}}{\alpha}\big) = \alpha^{n-1}u(\alpha\rho, \vec{n}).$$

3) Сдвиг объекта на x_0 приводит к сдвигу прицельного расстояния на $\vec{x}\cdot\vec{n}_0$:

$$\widehat{R}[\varphi(x - x_0)] = u(\rho - \vec{x}\cdot\vec{n}_0, \vec{n}).$$

4) Радон-образ от произведения фунции φ, описывающей объект, записывается как

$$\widehat{R}[(\vec{k}\cdot\vec{\nabla})\varphi] = \vec{k}\cdot\vec{n}\;\frac{u(\rho, \vec{n})}{\partial\rho},$$

соответственно для смешанной производной

$$\widehat{R}[(\vec{k}\cdot\vec{\nabla})(\vec{l}\cdot\vec{\nabla})\varphi] = (\vec{k}\cdot\vec{n})(\vec{l}\cdot\vec{n})\frac{\partial^2 u(\rho, \vec{n})}{\partial\rho^2}.$$

Отсюда

$$\widehat{R}[(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\varphi(x)] = |\vec{n}|^2\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} = \frac{\partial^2 u(\rho, \vec{n})}{\partial\rho^2}. \qquad (3)$$

Наконец, по отношению к произвольным линейным дифференциальным операторам с постоянными коэффициентами $\widehat{L} = l\big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}\big)$

$$\widehat{R}[\widehat{L}_\varphi(x)] = \widehat{L}\left(n_1\frac{\partial}{\partial\rho}, \dots, n_k\frac{\partial}{\partial\rho}\right)u(\rho, \vec{n}).$$

В качестве примера использования свойства (3) применим прямое преобразование Радона к трехмерному волновому уравнению:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1\partial^2}{c^2\partial t^2}\right)\varphi(x, t) = 0,$$

$$\widehat{R}\left[\left(\nabla^2 - \frac{1\partial^2}{c^2\partial t^2}\right)\varphi\right] = \left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} - \frac{1\partial^2}{c^2\partial t^2}\right)u(\rho,\vec{n}),$$

что позволяет свести трехмерное волновое уравнение к одномерному.

5) Дифференцирование Радон-образа

$$(\vec{k}\cdot\vec{\nabla})\widehat{R}[\varphi(x)] = -\frac{\partial}{\partial\rho}\widehat{R}[(\vec{k}\cdot\vec{x})\varphi(x)]$$

для двух векторов $\vec{k}$ и $\vec{l}$ и производных по компонентам единичного вектора $\vec{n}$ позволяет записать:

$$(\vec{k}\cdot\vec{\nabla})(\vec{l}\cdot\vec{\nabla})u(\rho,\vec{n}) = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\left[(\vec{k}\cdot\vec{x})(\vec{l}\cdot\vec{x})\varphi(x)\right].$$

6) Радон-образ свертки функций будет следующим:

$$\widehat{R}\left[\int g(x-x')S(x')dx'\right] = \int S(x')dx'\int \mathfrak{g}(x-x')\delta(\rho-\vec{x}\cdot\vec{n})dx.$$

Проведя замену переменных: $x - x' = y$, получим

$$\begin{aligned}u(\rho,\vec{n}) &= \int s(x')dx'\int \mathfrak{g}(y)S(x')\delta(\rho-\vec{x}\cdot\vec{n}'-\vec{n}\cdot\vec{y})dy = \\ &= \int S(x')\widehat{R}[\mathfrak{g}(\rho-\vec{n}\cdot\vec{y},\vec{n})]dx' = \\ &= \int \widehat{R}[\mathfrak{g}(\rho-\rho',\vec{n})]d\rho'\int s(x-x')\delta(\rho'-\vec{x}\cdot\vec{n}')dx',\end{aligned}$$

т.е. $\widehat{R}[\mathfrak{g} * S] = \widehat{R}[\mathfrak{g}] * \widehat{R}[S]$.

Отметим, что Радон-образ от многомерной свертки равен одномерной свертке – по прицельному расстоянию ρ^* Радон-образов.

7) Связь преобразования Радона с преобразованием Фурье. Запишем преобразование Фурье по прицельному расстоянию от Радон-образа $u(\rho,\vec{n})$:

$$\begin{aligned}\widetilde{u}(\rho,\vec{n}) &= (2\pi)^{-1/2}\int e^{-ip\nu}d\rho\int \varphi(x)\delta(\rho-\vec{x}\cdot\vec{n})dx = \\ &= (2\pi)^{-1/2}\int dx\varphi(x)\int e^{-ip\nu}\delta(\rho-\vec{x}\cdot\vec{n})d\rho = \\ &= (2\pi)^{-1/2}\int dx\varphi(x)\int e^{-ip\nu(\vec{x}\cdot\vec{n})}dx,\end{aligned}$$

а в операторной форме:

$$F_p\left[u(\rho,\vec{n})\right] \triangleq F_p\left[\widehat{R}[\varphi(x)]\right] = (2\pi)^{n-1/2}F_{\vec{x}}\left[\varphi(x)\right]. \qquad (4)$$

Одномерное преобразование Фурье Радон-образа эквивалентно многомерному преобразованию Фурье от функции $\varphi(x)$, характеризующее объект. Полученная связь Фурье-преобразования радоновского образа и многомерного Фурье-преобразования от φ формулируется как обобщенная *теорема о центральном сечении*: при фиксированном $\vec{n}$ одномерное Фурье-преобразование от Радон-образа дает центральное сечение многомерного спектра Фурье вдоль луча $\vec{n}\nu$, проходящего через начало координат.

Приведем вывод обратного преобразования Радона, пользуясь соотношением (4):

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= (2\pi)^{n-1/2} F_x^{-1} F_\rho u(\rho, \vec{n}) = \\ &= C_n \int d(\nu\vec{n}) e^{i\nu\vec{x}\cdot\vec{n}} \int d\rho e^{-i\nu\rho} u(\rho, \vec{n}) = \\ &= C_n \int d(\nu\vec{n}) \int d\rho e^{-i\nu(g-\rho)} u(\rho, \vec{n}),\end{aligned}$$

где $g = \vec{x} \cdot \vec{n}$. Учитывая, что $d(\nu\vec{n}) = d\vec{n}\nu^{n-1}d\nu$, запишем представление $\varphi(x)$ в виде:

$$\varphi(x) = C_n \int\limits_{|\vec{n}|=1} d\vec{n} \int\limits_0^\infty d\nu\nu^{n-1} \int d\rho e^{i\nu(g-\rho)} u(\rho, \vec{n}) \triangleq C_n \int\limits_{|\vec{n}|=1} d\vec{n} J(\vec{n}, g).$$

Расширим пределы интегрирования по ν от $-\infty$ до $+\infty$, введя четную функцию $J_\theta(\vec{n}, g)$:

$$J_\theta(\vec{n}, g) = \frac{1}{2}\left[J(\vec{n}, g) + J(-\vec{n}, -g)\right)$$

или, используя явный вид интеграла $J(\vec{n}, g)$:

$$\begin{aligned}J_\theta(\vec{n}, g) =& 1/2 \int\limits_0^\infty \nu^{n-1} d\nu \int\limits_{-\infty}^\infty u(\rho, \vec{n}) e^{i\nu(g-\rho)} d\rho + \\ & 1/2 \int\limits_0^\infty \nu^{n-1} d\nu \int\limits_{-\infty}^\infty u(\rho, -\vec{n}) e^{-i\nu(g-\rho)} d\rho = \\ =& 1/2 \int\limits_0^\infty |\nu|^{n-1} d\nu \int\limits_{-\infty}^\infty u(\rho, \vec{n}) e^{i\nu(g-\rho)} d\rho.\end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно случаи четного и нечетного значений n.

1) n – нечетное. Проведя интегрирование по частям $J_\theta(\vec{n}, \mathrm{g})$ $(n-1)$ раз, получим

$$J_\theta(\vec{n}, \mathrm{g}) = 1/2(i)^{(n-1)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\nu \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(\rho, \vec{n}) e^{i\nu(g-\rho)} \Big(\frac{\partial}{\partial\rho}\Big) d\rho =$$

$$= 1/2(i)^{(n-1)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(\frac{\partial}{\partial\rho}\Big)^{(n-1)} u(\rho, \vec{n}) \delta(\rho - \mathrm{g}) d\rho =$$

$$= 1/2(i)^{(n-1)} \Big(\frac{\partial}{\partial\rho}\Big)^{(n-1)}\bigg|_{\rho=\mathrm{g}=\vec{n}\cdot\vec{x}} u(\rho, \vec{n}).$$

Итак, для нечетного значения n вычисление интеграла $J_\theta(\vec{n}, \mathrm{g})$ сводится к взятию производной $(n-1)$-го порядка по прицельному расстоянию ρ в точке $\rho = \mathrm{g} = \vec{n} \cdot \vec{x}$ от Радон-образа $u(\rho, \vec{n})$. Окончательная формула обращения Радона в этом случае представляется в форме

$$\varphi(x) = C_n \int\limits_{|\vec{n}|=1} \Big(\frac{\partial}{\partial\rho}\Big)^{n-1}\bigg|_{\rho=\vec{n}\cdot\vec{x}} u(\rho, \vec{n}) d\vec{n}, \tag{5}$$

где $C_n = (2\pi i)^{1-n}/2$.

2) n – четное. Аналогично случаю нечетных n проведем интегрирование по частям $(n-1)$ раз интеграла $J_\theta(\vec{n}, \mathrm{g})$:

$$J_\theta(\vec{n}, \mathrm{g}) = 1/2(i)^{1-n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(\nu) d\nu \cdot \int d\rho e^{-i\nu(\rho-g)} \Big(\frac{\partial}{\partial\rho}\Big)^{n-1} u(\rho, \vec{n}) =$$

$$= 1/2(i)^{1-n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\rho \Big(\frac{\partial}{\partial\rho}\Big)^{n-1} u(\rho, \vec{n}) \cdot \int\limits_{\infty}^{\infty} d\nu \operatorname{sgn}(\nu) e^{-i\nu(\rho-g)} =$$

$$= \frac{(i)^{-n}}{2\pi} \int \frac{\big(\frac{\partial}{\partial\rho}\big)^{n-1} u(\rho, \vec{n})}{\rho - \mathrm{g}} d\rho.$$

Здесь использовано соотношение

$$F\big[\operatorname{sgn}(\nu)\big] = \frac{i}{\pi} \mathcal{P}\Big(\frac{1}{\rho}\Big),$$

$\mathcal{P}$ – символ интегрирования в смысле главного значения Коши. Вводя обозначение $\mathcal{H}$ для преобразования Гильберта:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P}\Big(\frac{1}{\rho} * u(\rho)\Big),$$

можно записать обращение Радона в четномерном пространстве:

$$\varphi(x) = -iC_n \int\limits_{|\vec{n}|=1} d\vec{n}\Big[\mathcal{H}\Big\{\Big(\frac{\partial}{\partial\rho}\Big)^{n-1} u(\rho,\vec{n})\Big\}\Big](\vec{n}\cdot\vec{x}) = \\ = \frac{iC_n}{\pi} \int\limits_{|\vec{n}|=1} d\vec{n}\mathcal{P}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\big(\frac{\partial}{\partial\rho}\big)^{n-1} u(\rho,\vec{n})}{\rho - \vec{x}\cdot\vec{n}} d\rho. \tag{6}$$

В случае четного значения n восстановление функции $\varphi(x)$ требует последовательного применения операций производной $(n-1)$-го порядка по прицельному расстоянию ρ Радон-образа $u(\rho,\vec{n})$, преобразования Гильберта по прицельному расстоянию ρ, интегрирования по сфере.

Анализируя представления инверсии Радона для четно- и нечетно-мерных пространств (5) и (6), можно отметить "локальность" инверсии Радона при n нечетном. В этом случае используются радоновские поверхности по гиперплоскостям, проходящим в окрестности пространственной точки восстановления x. В нечетномерных пространствах инверсия Радона существенно нелокальна, что в явном виде представлено интегральным преобразованием Гильберта. Проявление локальности и нелокальности инверсии Радона вызвано глубокими связями между преобразованием Радона и гармоническими функциями. В частности, эта связь проявляется в нелокальности волнового фронта в четномерных пространствах: за волновым фронтом следует диффузионный шлейф в отличии от локального резко очерченного волнового фронта в нечетномерном пространстве.

Представим преобразования Радона в операторной форме. Для произвольной функции $\psi(\rho,\vec{n})$ (где $\rho = \vec{x}\cdot\vec{n}$), такой, что $\psi(\rho,\vec{n}) = \psi(-\rho,-\vec{n})$, введем сопряженный оператор Радона R^*:

$$R^*\psi = \int\limits_{|\vec{n}|=1} \psi(\vec{n}\cdot\vec{x},\vec{n})d\vec{n}.$$

Тогда инверсия Радона для нечетного значения n имеет следующую операторную форму:

$$R^- = R^*\Gamma_0,$$

где $\Gamma_0 = C_n\big(\frac{\partial}{\partial\rho}\big)^{n-1}\Big|_{\rho=\vec{n}\cdot\vec{x}}$, а для четного значения n –

$$R^- = R^*\Gamma_\theta, \quad \Gamma_\theta = -iC_n\mathcal{H}\Big(\frac{\partial}{\partial\rho}\Big)^{n-1}.$$

Операторы Γ_0 и Γ_θ являются аналогами оператора $(RR^*)^-$, входящего в структуру решения интегрального уравнения $R\varphi = u$ методом наименьших квадратов:

$$\varphi = R^*(RR^*)^- u.$$

Индекс в обращении Радона R^- использован нами в связи с тем, что инверсия Радона является неустойчивой процедурой и требует применения регуляризации [3].

Связь обратного преобразования Радона с дифракционной томографией

Линеаризованная модель измерений в задачах зондирования объекта сигналом φ с законом распространения $L\varphi = S$ представим выражением:

$$\widetilde{u}_n = \langle (L_0^{-1})^* h_n \mid \delta L_\theta \varphi_0 \rangle + \widetilde{\varepsilon}_n \triangleq \langle \varphi_{n(\text{out})} | \delta L_\theta | \varphi_{\text{in}} \rangle + \widetilde{\varepsilon}_n.$$

Идеализированный аналог этой модели получим, если аппаратную функцию h_n представим точечным приемником с бесконечной полосой пропускания, т.е. если $h_n \to \delta(x - x_n)\delta(t - t_n)$, и пренебрежем шумами: $\widetilde{\varepsilon}_n \Rightarrow 0$. Тогда $\widetilde{u}_n$ будет представлена как рассеянное поле в точке наблюдения x_n, т.е.

$$\widetilde{u}_n = \widetilde{\varphi}\big|_{x_n} \triangleq (\varphi - \varphi_{\text{in}})|_{x_n}.$$

Запишем эту модель:

$$\widetilde{\varphi} = \langle \varphi_{\text{out}} | \delta L_\theta | \varphi_{\text{in}} \rangle.$$

Рассотрим пример скалярного волнового уравнения $(c^{-2}\partial^2/\partial t^2 - \Delta)\varphi = 0$ в случае, когда опорная среда считается однородной, т.е. $c_0(x) = c_0 = \text{const}$. Как было показано в работе [4], томографический функционал ρ скалярного волнового уравнения имеет вид

$$\rho : \widetilde{\varphi} = \langle \rho | \nu(x) \rangle,$$

где $\nu(x) = c_0^{-2}(1 - c_0^2/c^2(x))$, а интегральное ядро томографического функционала представлено выражением

$$\rho = \langle \varphi_{\text{out}} | \frac{\partial^2}{\partial t^2} | \varphi_{\text{in}} \rangle_T.$$

Для точечного источника s в однородной среде поля φ_{in} и φ_{out} имеют одинаковую структуру:

$$\varphi_{\text{in}} = \frac{1}{4\pi|x - x_s|}\delta\left(t - t_s - \frac{|x - x_s|}{c_0}\right),$$

$$\varphi_{\text{in}} = \frac{1}{4\pi|x - x_r|}\delta\left(t_r - t - \frac{|x - x_r|}{c_0}\right)$$

(x_s, t_s – соответственно местоположение и момент времени включения источника S; x_r, t_r – соответственно местоположение приемника и текущее время регистрации). Конкретный вид томографического функционала:

$$\rho_r = \frac{1}{(4\pi)^2}\int\limits_T dt \frac{1}{|\Delta x_r|}\delta\Big(t_r - t - \frac{|\Delta x_r|}{c_0}\Big)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{1}{|\Delta x_s|}\delta\Big(t - t_s - \frac{|\Delta x_s|}{c_0}\Big)$$

$$|\Delta x_s| = |x - x_s|, \qquad |\Delta x_r| = |x - x_r|.$$

Раскладывая $|\Delta x_r|$ и $|\Delta x_s|$ в ряд и оставляя в знаменателе первые члены разложения, а в аргументах δ-функции два первых члена разложения (что соответствует приближению Фраунгофера) будем иметь

$$\rho_r = \frac{1}{(4\pi)^2|x_r||x_s|}\int\limits_T dt\delta\Big(t_r - t - \frac{|x_r|}{c_0} - \frac{\vec{n}_r\cdot\vec{x}}{c_0}\Big)\cdot$$

$$\delta''\Big(t - t_s - \frac{|x_s|}{c_0} - \frac{\vec{n}_s\cdot\vec{x}}{c_0}\Big) = \frac{1}{(4\pi)^2|x_r||x_s|}\cdot$$

$$\delta''\Big((t_r - t_s) - \frac{|x_r| + |x_s|)}{c_0} - \frac{(\vec{n}_r + \vec{n}_s, \vec{x})}{c_0}\Big) =$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2|x_r||x_s|}\delta''\big(q_n - \vec{n}\cdot\vec{x}\big),$$

$$q_r = (t_r - t_s)c_0 - \big(|x_s| + |x_r|\big),$$

$$\vec{n}_r = \frac{\vec{x}_r}{|\vec{x}_r|}, \qquad \vec{n}_s = \frac{\vec{x}_s}{|\vec{x}_s|}, \qquad \vec{n} = \vec{n}_r + \vec{n}_s.$$

Здесь вектор $\vec{n}$ соответствует нормали к плоскости, относительно которой пучок φ_{in} с вектором $\vec{n}_s$ зеркально отражается в направлении $(-\vec{n}_r)$. Окончательно, рассеянное поле связано с функцией $\nu(x)$ преобразованием Радона:

$$\widehat{\varphi} = \langle\, \rho|\nu(x)\,\rangle = \frac{c_0}{(4\pi)^2|x_r||x_s|}\int \nu(x)\delta''\big(q_r - \vec{n}\cdot\vec{x}\big)dx =$$

$$= \mathrm{const}\,\frac{\partial^2}{\partial P^2}\int \nu(x)\delta\big(\rho - \vec{n}\cdot\vec{x}\big)dx.$$

Преобразование Радона, формально записанное как интеграл по точкам плоскости $\{X : P = \vec{x}\cdot\vec{n}\}$, при разных значениях времени регистрации (t_r) является аппроксимацией представления $\widetilde{\varphi}$:

$$widehat\varphi = \frac{c_0}{(4\pi)^2|x_r||x_s|}\delta''\big((t_r - t_s)c_0 - \big(|\Delta x_r| + |\Delta x_s|\big)\big).$$

Эта форма записи предполагает при различных значениях времени регистрации t_r интегрирование по соответствующим эллипсоидам вращения с осью симметрии, проходящей через точки источника (x_s) и приема (x_r) – фокусы эллипсоидов, что соответствует прозрачной интерпретации: происходит интегрирование по множеству кинематически эквивалентных точек в пространстве, т.е. по уровням постоянной суммарной фазы.

Обобщенную инверсию Радона в идеализированной дифракционной томографии рассмотрим на более сложном примере, приведенном в работа [5]. Скалярное волновое уравнение в опорной среде со скоростью распространения $c_0(x)$

$$\left(\frac{1}{c_0^2(x)}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\varphi(x,t) = 0$$

представим в форме уравнения Гельмгольца

$$\left(k^2 n_0^2(x) + \Delta\right)\varphi_{\text{in}}(x,k) = 0,$$

где $k^2 n^2(x) = \frac{w^2}{c_0^2(x)}$, w – круговая частота. Вводя безразмерную функцию $\mu(x)$:

$$\mu(x) = -\frac{w^2}{k^2}\nu(x), \quad \nu(x) = \frac{1}{c_0^2(x)}\left(1 - \frac{c_0^2(x)}{c^2(x)}\right).$$

Запишем уравнение Гельмгольца в среде со скоростью $c(x)$:

$$\left(k^2\left(n_0^2(x) + \mu(x)\right) + \Delta\right)\varphi(x,k) = 0.$$

Возмущающий оператор (оператор умножения) имеет вид $\delta L = k^2\mu(x)$. Будем считать, что опорная среда такова, что поля φ_{in} и φ_{out} достаточно хорошо аппроксимируются нулевыми членами лучевого разложения. Тогда рассеянное поле представляется как

$$\widetilde{\varphi}(k,x_r) = k^2\langle \varphi_{\text{out}} \mid \mu(x) \mid \varphi_{\text{in}} \rangle = \langle \rho_r \mid \mu(x) \rangle =$$
$$= k^2 \int A_{\text{out}}(x,x_r)e^{ik\tau(x,x_r)}\mu(x)\cdot A_{\text{in}}(x,x_s)e^{ik\tau(x,x_s)}dx.$$

Амплитуды A удовлетворяют уравнению переноса, а τ удовлетворяет уравнению эйконала:

$$(\vec{\nabla}_\tau, \vec{\nabla}_\tau) = n_0^2(x), \quad \left((\vec{\nabla}_\tau, \vec{\nabla}) + \frac{1}{2}\Delta\tau\right)A = 0.$$

Томографический функционал ρ представляется интегральным ядром:

$$P = k^2 A_{\text{out}}(x)A_{\text{in}}(x)e^{ik(\tau(x,x_r)+\tau(x,x_s))} \triangleq k^2 A(x)e^{ik\tau}.$$

Определим обобщенное причинное преобразование Радона, ассоциированное с представлением рассеянного поля $\widetilde{\varphi} = \langle \rho | \mu \rangle$ в форме

$$R_\mu = \langle A(x)\delta\big(q - \tau(X)\big) \mid \mu(x) \rangle,$$

причем $R \equiv 0$ при $t < 0$.

Заметим, что рассеянное поле $\widetilde{\varphi}$ с точностью до множителя можно представить как преобразование Фурье от обобщенного Радон-образа R_μ

$$\widetilde{\varphi} = cF_q R_\mu.$$

Пусть точка локализации источника x_s находится внутри замкнутой области V с границей ∂V в предположении таких опорных среды и границы, что каждая точка на границе может быть соединена единственным лучом с точкой источника, при этом лучи не пересекаются. В этом случае можно параметризовать точки на границе ∂V соответствующими точками на единичной сфере, окружающими источник. Тогда действие сопряженного оператора R^* определяется следующим образом:

$$R^*\psi = \int\limits_{\partial V} \psi(q, x_r)\Big|_{q=\tau(x_r, x_s, x)} w(x, x_r)dx_r,$$

где $w(x, x_r)$ – гладкая неотрицательная весовая функция, которая выбирается в виде

$$w(x, x_r) = D(x, x_r) \cdot A^{-1}(x, x_r) \cdot h(x, x_r),$$

где $h(x, x_r)$ – режущий множитель, обеспечивающий неотрицательность $w(x, x_r)$, т.е. взаимную однозначность точек на ∂V и на единичной сфере:

$$D(x, x_r) = \begin{vmatrix} \partial_{x_1}\tau & \partial_{x_2}\tau & \partial_{x_3}\tau \\ \partial_{x_1 x_{r_1}}\tau & \partial_{x_2 x_{r_1}}\tau & \partial_{x_3 x_{r_1}}\tau \\ \partial_{x_1 x_{r_2}}\tau & \partial_{x_2 x_{r_2}}\tau & \partial_{x_3 x_{r_2}}\tau \end{vmatrix},$$

$$A^{-1}(x, x_r) = \big[A_{\text{out}}(x, x_r)A_{\text{in}}(x)\big]^{-1}.$$

можно показать [88], что $Ddx_r = D_0\partial\Omega$ (Ω – телесный угол) и что $D_0(x, x_r) = h(x)\big[1 + \cos\theta(x)\big]$ ($\cos\theta(x) = \vec{e}_{\text{out}} \cdot \vec{e}_{\text{in}}$, $\vec{e} = \vec{e}(x)$ – единичный вектор направления луча в точке x).

Запишем обощенный интегральный оператор Фурье, определенный следующим образом:

$$\Phi\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_0^\infty \int\limits_{\partial V} \int\limits_V e^{ik\tau(x, x', x_r)} \widetilde{a}(x, x', x_r) \cdot \mu(x') dx' dx_r k^2 dk, \qquad (7)$$

где

$$\tau(x, x', x_r) = \tau(x', x_r, x_s) - \tau(x, x_r, x_s),$$

$$\widetilde{a}(x, x', x_r) = \frac{A(x', x_r)}{A(x, x_r)} D(x, x_r) h(x, x_r).$$

Замечая, что обобщенный оператор Фурье Φ включает в себя оператор Фурье (F^+):

$$F^+ : F_k^+ \widetilde{\varphi} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_0^\infty \widetilde{\varphi} e^{-ikq} dk,$$

можно записать обобщенное преобразование Фурье как композицию трех операторов:

$$\Phi = R^* F_k^+ F_q.$$

Проанализировать смысл введенного обобщенного Фурье- оператора можно, записывая линейный член разложения фазы:

$$\tau(x, x') \sim \nabla_x \tau(x', x_r, x_s)(x - x'),$$

$$I_{\partial V^0} \mu = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_0^\infty \int\limits_{\partial V} \int\limits_V e^{ik\nabla_x \tau(x, x_r, x_s)(x - x')} D(x', x_r) \cdot \mu(x') dx' dx_r k^2 dk.$$

Вводя замену переменных $p = k\nabla_x \tau(x, x_r, x_s)$, последний интеграл можно переписать в форме

$$I_{\partial V^0} \mu = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{\Omega^0(x)} \int\limits_V e^{ip(x' - x)} \mu(x') dx' d\rho.$$

Здесь $\Omega^0(x)$ – образ области интегрирования при принятой замене переменной.

Анализ формулы (7) показывает, что обобщенный оператор Фурье обеспечивает восстановление спектра функции $\mu(x)$, определяемой спектральной областью $\Omega^0(x)$, последняя в свою очередь связана с частью поверхности границы ∂V^0, по которой ведется интегрирование рассеянного поля $\widetilde{\varphi}$, и с невырожденностью якобиана перехода от координат на поверхности (координат регистрации) к лучевым координатам. Поэтому приближенное операторное равенство

$$I_{\partial V^0} \sim R^* F_k^+ F_q$$

определяет оператор реконструкции

$$\mu \sim R^* F_k^+ \widetilde{\varphi}.$$

Отметим, что полученное решение является математически изящным, но, на наш взгляд, достаточно далеким от реальных интерпретационных задач. Даже при сделанных идеализированных предположениях о связи рассеянного поля с восстанавливаемой структурой среды используется линеаризованная модель, которая опирается на лучевое представление волновых полей в опорной среде. Невырожденность якобиана, входящего в обобщенный сопряженный оператор R^*, заведомо не выполняется, если поле $\varphi_{\rm in}$ имеет какую-либо временную структуру, отличную от δ-функции по времени. Это нетрудно видеть из обобщенного преобразования Радона, включающего $\delta(q - \tau(x))$ – многообразие той же размерности, что и размерность задачи. Каждое значение соответствует интегрированию по трехмерной области. Так, в случае точечных источников такой областью является поверхность эллипсоида с фокусами в точках x_r и x_s, если временная зависимость представляется δ-функций, и слоем эллипсоида вращения при конечной длительности поля $\varphi_{\rm in}$.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект No. 93059961) и Международного Научного Фонда (грант No. P54300).

Литература

1. С. Хелгасон, *Преобразование Радона.* М., 1983.
2. Г. Хермен, *Восстановление изображений по проекциям: Основы реконструктивной томографии.* М., 1983.
3. В. В. Пикалов, *Реконструктивная томография в газодинамике и физике плазмы.* Новосибирск, 1983.
4. В. Н. Троян, Г. А. Рыжиков, *Дифракционная томография: построение и интерпретация томографических функционалов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **218** (1994), 176–196.
5. G. Beylkin, *Imaging of discontinuities in the inverse scattering problem by inversion of a causal generalized Radon transform.* — J. Math. Phys. **26**, **No. 1** (1985), 125–143.

Troyan V. N., Ryzhikov G. A. An application of the Radon inversion in diffraction tomography.

The basic equations of the linear computer tomography are considered and noted the connection of the setting of computer tomography problems with problems of the integral deometry. Properties of the Radon transform are analysed. The formulae of the Radon inversion are represented for even- and odd-dimensional spaces. It is considered an application of the Radon inversion in diffraction tomography problems.

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 10 сентября 1994 г.