V. N. Solev, On a condition of local regularity, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1992, Volume 194, 141–149

В.Н.Солев

УСЛОВИЕ ЛОКАЛЬНОЙ РЕГУЛЯРНОСТИ

Пусть x – стационарный в широком смысле обобщенный процесс со спектральной плотностью f, то есть такой оператор из пространства $\mathcal{D}$ бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в фиксированное гильбертово пространство $\mathcal{X}$, что

$$(x(\varphi), x(\psi)) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\lambda)\overline{\hat{\psi}(\lambda)} f(\lambda)\, d\lambda$$

Здесь $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в $\mathcal{X}$, $\hat{\varphi}$ – преобразование Фурье функции φ.

Обозначим через $\mathcal{X}_t$ подпространство пространства $\mathcal{X}$, порожденное величинами $x(\varphi)$, $supp\,\varphi \subset [-t,t]$. Пусть $\mathcal{X}^t$ – подпространство, построенное по величинам $x(\varphi)$, $supp\,\varphi \cap [-t,t] = \varnothing$ В случае, когда $f(\lambda) \equiv 1$, подпространства $\mathcal{X}_t$, $\mathcal{X}^t$ ортогональны и $\mathcal{X}_\infty = \mathcal{X}_t \oplus \mathcal{X}^t$. Вопрос, на который мы отвечаем в настоящей заметке, состоит в следующем: при наших условиях на спектральную плотность f имеет место представление $\mathcal{X}_\infty = \mathcal{X}_t + \mathcal{X}^t$. Последнее, очевидно, эквивалентно соотношению

$$\cos(\mathcal{X}_t, \mathcal{X}^t) < 1 \qquad (1)$$

где величина $\cos(\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_+)$ определяется по подпространствам $\mathcal{H}_-$, $\mathcal{H}_+$ следующим образом

$$\cos(\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_+) = \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{H}_- \\ \psi \in \mathcal{H}_+}} \frac{|(\varphi,\psi)|}{\|\varphi\|\,\|\psi\|}$$

Дадим теперь другую форму условия (1). Пусть x_* – обобщенный процесс, сопряженный к процессу x, то есть

1. $\mathcal{X} = \mathcal{X}_*$

2. $(x(\varphi), x_*(\psi)) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\lambda)\overline{\hat{\psi}(\lambda)}\, d\lambda$

Здесь и далее предполагается, что $\mathcal{X} = \mathcal{X}_\infty$, $\mathcal{X}^* = \mathcal{X}^*_\infty$, а подпространства $\mathcal{X}^*_t$ строятся по процессу x_* так же, как соответствующие подпространства $\mathcal{X}_t$ по процессу $\mathcal{X}$. Пусть величина $\sin(\mathcal{H}_-,\mathcal{H}_+)$ определяется по подпространствам $\mathcal{H}_-$, $\mathcal{H}_+$ соотношением

$$\sin(\mathcal{H}_-,\mathcal{H}_+) = \inf_{\varphi\in\mathcal{H}_-} \sup_{\psi\in\mathcal{H}_+} \frac{|(\varphi,\psi)|}{\|\varphi\|\|\psi\|}$$

Очевидно, величина $\sin(\mathcal{H}_-,\mathcal{H}_+)$ – нижняя граница спектра оператора $P_-P_+P_-$, где P_-, P_+ – ортопроекторы на подпространства $\mathcal{H}_-,\mathcal{H}_+$ соответственно. Также ясно, что

$$\sin^2(\mathcal{H}_-,\mathcal{H}_+)+\cos^2(\mathcal{H}_-,\mathcal{H}^+)=1 \qquad (2)$$

где $\mathcal{H}^+$ – ортогональное дополнение к пространству $\mathcal{H}_+$.

Из (2) следует, что условие (I) эквивалентно условию

$$\sin(\mathcal{X}_t,\mathcal{X}_t^*) > c \qquad (3)$$

2. Пусть L^2_f – L^2-пространство, построенное по мере $f\,d\lambda$, а τ^- – стандартная изометрия: $\mathcal{X}\to L^2_f$, заданная соотношением $\tau^-x(\varphi)=\varphi$. Обозначим через $\mathcal{H}_t(f)$ образ при отображении τ^- подпространства $\mathcal{X}_t$. По известной альтернативе М.Г.Крейна, [I], если $\mathcal{H}_t(f)\neq L^2_f$, то пространство $\mathcal{H}_t(f)$ состоит из всех целых функций степени не выше t, лежащих в пространстве L^2_f. Это обстоятельство нам будет удобно положить в определение пространства $\mathcal{H}_t(f)$. То есть, если f неотрицательная функция, будем обозначать через $\mathcal{H}_t(f)$ подпространство пространства L^2_f, порожденное целыми функциями степени не выше t. Очевидно,

$$\tau^-\mathcal{X}_t^* = \frac{1}{f}\,\mathcal{H}_t\left(\frac{1}{f}\right) \qquad (4)$$

Поэтому условие (3) переходит в условие

$$c < \sin\left(\mathcal{H}_t(f),\ \frac{1}{f}\mathcal{H}_t\left(\frac{1}{f}\right)\right) \qquad (5)$$

Предположим, что $\mathcal{H}_t(f)\neq L^2_f$, тогда (см.[I]), функционал $l_z: l_z\varphi=\varphi(z)$, ограниченный функционал в $\mathcal{H}_t(f)$, так что в этом случае в пространстве $\mathcal{H}_t(f)$ существует воспроизводящее ядро $G_t^f(\lambda,\mu)$: при $\varphi\in\mathcal{H}_t(f)$

$$(\varphi(\cdot),\ G_t^f(\lambda,\cdot))_f = \varphi(\lambda)$$

где $(\cdot,\cdot)_f$ скалярное произведение в пространстве $\mathcal{H}_t(f)$

Отметим далее (подробнее см.[2]), что соотношение

$$0 < \inf_t \sin\left(\mathcal{H}_t(f),\ \tfrac{1}{f}\mathcal{H}_t(f)\right)$$

выполняется в том и только в том случае, когда функция f удовлетворяет условию Маккенхаупта:

$$\sup_I \frac{1}{|I|}\int_I f\,d\lambda \cdot \frac{1}{|I|}\int_I \frac{1}{f}\,d\lambda < \infty$$

Пусть μ – мера с плотностью $\frac{1}{\pi}\frac{\sin^2 x}{x^2}$. Рассмотрим "ослабленный" вариант условия Маккенхаупта:

$$\sup_x \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\,d\mu(t)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{f(x-t)}\,d\mu(t) < \infty \quad (6)$$

ТЕОРЕМА. Пусть спектральная плотность f процесса x удовлетворяет условию $f,\ 1/f \in L^1_{1/1+\lambda^2}$. Тогда для того, чтобы процесс x удовлетворял условию

$$\sin(X_t, X_t^*) > 0$$

необходимо и достаточно, чтобы он имел спектральную плотность f, удовлетворяющую условию (6)

Прежде чем перейти к доказательству сформулированной теоремы (его мы дадим в п.4), в пункте 3 мы приведем ряд вспомогательных результатов, касающихся подходящих оценок для воспроизводящих ядер.

3. Прежде всего заметим, что

$$\|\ell_z\|^2 = \|G_t^f(z,\cdot)\|_f^2 = G_t^f(z,z) \quad (7)$$

где $\|\cdot\|_f$ – норма в пространстве L_f^2.

Пусть $\mathbb{1}(x)\equiv 1$. Напомним некоторые сведения, касающиеся пространства $\mathcal{H}_\sigma(\mathbb{1})$. Пусть φ – целая функция степени не выше t, лежащая в пространстве $\mathcal{H}_\sigma(\mathbb{1})$. Тогда

$$\|\varphi\|_{\mathbb{1}}^2 = \frac{\pi}{\sigma}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varphi(n\frac{\pi}{\sigma})|^2 \qquad (8)$$

Система

$$\psi_n(x) = \frac{\sin\sigma(x-\frac{n\pi}{\sigma})}{\sqrt{\pi\sigma}\,(x-\frac{n\pi}{\sigma})} \quad (n=0,\pm1,\dots)$$

является ортонормированным базисом пространства $\mathcal{H}_\sigma(\mathbb{1})$; воспроизводящее ядро пространства $\mathcal{H}_\sigma(\mathbb{1})$ имеет вид:

$$G_\sigma^{\mathbb{1}}(x,y) = \frac{\sin(\sigma x-\sigma y)}{\pi\,(x-y)}$$

Разложение функции φ, $\varphi\in\mathcal{H}_\sigma(\mathbb{1})$, по базису $\{\psi_n\}$ имеет вид

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{\pi}{\sigma}}\,\varphi(n\frac{\pi}{\sigma})\,\psi_n(x)$$

Обозначим через μ_t вероятностную меру с плотностью $\frac{1}{\pi}\;\frac{\sin^2 tx}{t\,x^2}$

ЛЕММА I. Пусть f – неотрицательная функция, $1/f\in L^1_{1/(1+\lambda^2)}$. Тогда

$$G_t^f(\lambda,\lambda) \leq \frac{t}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{f(\lambda-x)}\,d\mu_t(x) \qquad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{1}{f(x)}\;\frac{\sin t(x-\lambda)}{\pi\,(x-\lambda)}$$

Ясно, что в условиях леммы $\varphi_\lambda\in L^2_f$ и при $\psi\in\mathcal{H}_t(f)$

$$(\psi,\varphi_\lambda)_f = \psi(\lambda)$$

Таким образом, $G_t^f(\lambda,\cdot)=P_t(f)\varphi_\lambda$, где $P_t(f)$ ортопроектор в пространстве L_f^2 на подпространство $\mathcal{H}_t(f)$. Отсюда,

$$G_t^f(\lambda,\lambda) = \|G_t^f(\lambda,\cdot)\|_f^2 \le \|\varphi_\lambda\|_f^2 =$$

$$= \frac{t}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{f(\lambda-x)}\,d\mu_t(x)$$

ЛЕММА 2. Пусть f – неотрицательная функция, $f\in L^1_{1/1+\lambda^2}$. Тогда

$$G_t^f(\lambda,\lambda) \ge \frac{t}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda-x)\,d\mu_t(x)\right]^{-1} \qquad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения воспроизводящего ядра следует, что

$$G_t^f(\lambda,\lambda) \ge \frac{|\varphi(\lambda)|^2}{\|\varphi\|_f^2}, \quad \varphi\in\mathcal{H}_t(f)$$

Теперь, чтобы получить (10) нужно взять $\varphi = \dfrac{\sin t(\lambda-x)}{\lambda-x}$

ЛЕММА 3. Пусть φ – целая функция степени не выше s, f неотрицательная функция, причем $\ln f, \ln|\varphi|\in L^1_{1/1+\lambda^2}$ Тогда

$$G_{t+s}^{f/|\varphi|^2}(\lambda,\lambda) \ge G_t^f(\lambda,\lambda)\,|\varphi(\lambda)|^2 \qquad (11)$$

при $t,s>0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линейное подмножество $\Gamma=\varphi\,\mathcal{H}_t(f)$ замкнутое подпространство пространства $\mathcal{H}_{t+s}(f/|\varphi|^2)$. Пусть $G_\Gamma(\lambda,\mu)$ – воспроизводящее ядро в Γ. Очевидно, $G_\Gamma(\lambda,\mu)=\overline{\varphi(\lambda)}\,\varphi(\mu)\,G_t^f(\lambda,\mu)$. Отсюда, учитывая неравенство

$$G_\Gamma(\lambda,\lambda) \le G_{t+s}^{f/|\varphi|^2}(\lambda,\lambda)$$

получаем (11).

ЛЕММА 4. Пусть f - неотрицательная функция, $1/f \in L^1$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_t^f(\lambda,\lambda)\,d\lambda \le \frac{t}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{f(\lambda)}\,d\lambda \tag{12}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме I

$$G_t^f(\lambda,\lambda) \le \frac{t}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{f(\lambda-x)}\;\frac{\sin^2 tx}{\pi t x^2}\,dx =$$

$$= \frac{t}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{f(x)}\;\frac{\sin^2 t(\lambda-x)}{\pi t(\lambda-x)^2}$$

Отсюда следует (I2), поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 t(\lambda-x)}{\pi t(\lambda-x)^2}\,d\lambda = 1 .$$

ЛЕММА 5. Пусть f - неотрицательная функция, $\ln f \in L^1_{1/1+\lambda^2}$, а функция $\varphi \in \mathcal{H}_s(f)$ $(s>0)$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(\lambda)|^2\,G_t^{1/f}(\lambda,\lambda)\,d\lambda \le \frac{t+s}{\pi}\,\|\varphi\|_f^2 . \tag{13}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что в условиях леммы $\ln|\varphi| \in L^1_{1/1+\lambda^2}$. Поэтому выполнены условия леммы 3 и, следовательно,

$$|\varphi(\lambda)|^2\,G_t^{1/f}(\lambda,\lambda) \le G_{t+s}^{1/f\cdot|\varphi|^2}(\lambda,\lambda)$$

Отсюда, учитывая лемму 4, получаем (I3).

ЛЕММА 6. Пусть $\varphi \in \mathcal{H}_s(f)$, $t>s$. Тогда

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 t(x-y)}{\pi t(x-y)^2}\,|\varphi(x)|^2 f(x)\,dx\,dy \ge \frac{t-s}{t}\|\varphi\|_f^2 \tag{14}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через A интегральный оператор в пространстве L^2 с ядром $K(x,y)$

$$K(x,y) = \varphi(y)\,\frac{\sin t(x-y)}{\pi(x-y)}\sqrt{f(x)}$$

Очевидно, $\sigma^2 = \frac{\pi}{t}\,\|A\|_2^2$, где $\|A\|_2$ – норма Гильберта-Шмидта оператора A. Далее, заметим, что $A = \sqrt{f}\,P_t(\mathbb{1})\,\varphi$, где $\sqrt{f}$, φ – операторы умножения на функции $\sqrt{f}$, φ соответственно, а $P_t(\mathbb{1})$ – ортопроектор в пространстве L^2 на подпространство $\mathcal{H}_t(\mathbb{1})$. Ясно, что $\|A\|_2 \geq \|A\,P_{t-s}(\mathbb{1})\|_2$

Поскольку $A\,P_{t-s}(\mathbb{1}) = \sqrt{f}\cdot\varphi\,P_{t-s}(\mathbb{1})$, то, учитывая известную формулу для ядерной нормы

$$\|P_\sigma(\mathbb{1})\,h\,P_\sigma(\mathbb{1})\|_1 = \frac{\sigma}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h\,d\lambda$$

где h – функция из L^1, а $\|\cdot\|_1$ – ядерная норма, получаем при $h = |\varphi|^2 f$

$$\|A\|_2^2 \geq \|\sqrt{h}\,P_{t-s}(\mathbb{1})\|_2^2 = \|P_{t-s}(\mathbb{1})\,h\,P_{t-s}(\mathbb{1})\|_1$$

Таким образом, $\sigma^2 \geq \frac{t-s}{t}\,\|\varphi\|_f^2$

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ.

<u>Необходимость</u>. Пусть выполнено условие (3). Обозначим

$$\varphi_x(\lambda) = \frac{\sin t(x-\lambda)}{\pi(x-\lambda)}, \quad \psi_x(\lambda) = \frac{1}{f(\lambda)}\,\frac{\sin t(x-\lambda)}{\pi(x-\lambda)}$$

Заметим, что

$$P_t\,\varphi_x(\lambda) = \frac{1}{f(\lambda)}\,G_t^{1/f}(x,\lambda),\quad Q_t\,\psi_x(\lambda) = G_t^{f}(x,\lambda)$$

где P_t, Q_t – ортопроекторы в пространстве L^2_f на подпространства $1/f\,\mathcal{H}_t(1/f)$, $\mathcal{H}_t(f)$ соответственно. Поэтому при условии (3)

$$\|\varphi_x\|_f^2 \leq m\;G_t^{1/f}(x,x)$$

$$\|\psi_x\|_f^2 \le m\ G_t^f(x,x)$$

где m некоторая, не зависящая от x константа.

Остается заметить, что при условии (5)

$$\sup_x G_t^f(x,x)\, G_t^{1/f}(x,x) < \infty \tag{I4}$$

<u>Достаточность</u>. Пусть функция f удовлетворяет условию (6). В этом случае существуют такие константы m и M, не зависящие от x, что

$$m\ G_t^f(x,x) \le \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{f(\lambda)}\, d\mu_t(x-\lambda) \le M\ G_t^f(x,x) \tag{I5}$$

$$m\ G_t^{1/f}(x,x) \le \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d\mu_t(x-\lambda) \le M\, G_t^{1/f}(x,x) \tag{I6}$$

Пусть

$$f_*(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d\mu_{2t}(x-\lambda) \tag{I7}$$

Как это следует из лемм 5 и 6, при условии (6) нормы $\|\cdot\|_f$ и $\|\cdot\|_{f_*}$ эквивалентны на $\mathcal{H}_t(f)$. Поэтому

$$\|\varphi\|_{f_*} = \frac{\pi}{\sigma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varphi(k\tfrac{\pi}{\sigma}+\tau)|^2 f_*(k\tfrac{\pi}{\sigma}+\tau)$$

при $\sigma > 5t$.

Ввиду соотношений (I5), (I6) получаем, что нормы

$$\|\varphi\|_* = \sum_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\tfrac{\pi}{\sigma}k)|^2\, G_\sigma^{1/f}(\tfrac{\pi}{\sigma}k, \tfrac{\pi}{\sigma}k)$$

$$\|\varphi\|^* = \sum_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\tfrac{\pi}{\sigma}k)|^2\, G_\sigma^{f}(\tfrac{\pi}{\sigma}k, \tfrac{\pi}{\sigma}k)$$

эквивалентны исходным нормам $\|\cdot\|_f$ и $\|\cdot\|_{1/f}$ на подпространствах $\mathcal{H}_t(f)$, $\mathcal{H}_t(1/f)$ соответственно.

Рассмотрим элементы

$$\varphi = \sum_{k\in K} a_k \sqrt{G_\sigma^f\left(\frac{\pi}{\sigma}k, \frac{\pi}{\sigma}k\right)}\ \frac{\sin\sigma\left(x-\frac{\pi}{\sigma}k\right)}{x-\frac{\pi}{\sigma}k}$$

$$\psi = \frac{1}{f(x)} \sum_{k\in K} a_k \sqrt{G_\sigma^{1/f}\left(\frac{\pi}{\sigma}k, \frac{\pi}{\sigma}k\right)}\ \frac{\sin\sigma\left(x-\frac{\pi}{\sigma}k\right)}{x-\frac{\pi}{\sigma}k}$$

Здесь K - конечное подмножество целых чисел.
При условии (6)

$$|(\varphi,\psi)|^2 \geqslant m \sum_{k\in K} |a_k|^2$$

где m зависит только от функции f и t. Поэтому в силу сказанного о нормах $\|\cdot\|_*$, $\|\cdot\|^*$ получаем, что косинус угла между φ и ψ в пространстве L^2_f отделен от нуля равномерно по $a=\{a_j, j\in k\}$ и K. Поскольку функции указанного вида плотны в $\mathcal{H}_t(f)$ и $\frac{1}{f}\mathcal{H}_t(1/f)$, мы приходим к выводу, что

$$\sin\left(\mathcal{H}_t(f), \frac{1}{f}\mathcal{H}_t(1/f)\right) > 0$$

Теорема доказана.

Литература

1. Крейн М.Г. Об основной апроксимационной задаче теории экстраполяции и фильтрации стационарных случайных процессов. -Докл. АН СССР, т. 94, 1954.
2. Солев В.Н. Гауссовские f-регулярные процессы и асимптотическое поведение функции правдоподобия. -Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1982, т.119, с.203-217.