Функциональный анализ и его приложения,
т. 11, вып. 4, 1977, 92—93.

УДК 519.46

О ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ SL (2, C)

Ш. Ш. Султанов

Рассмотрим тензорное произведение двух неприводимых представлений группы $SL(2, \mathbf{C}) = G$, одно из которых унитарно (в обычном смысле), а второе унитарно в Π_1-метрике. Случай, когда оба представления унитарны, исследован в работах М. А. Наймарка [1], [2], [3].

Напомним описание неприводимых представлений T_χ, $\chi = (m, \rho)$, группы G (см. [5]). Пусть $\mathscr{D}_\chi = \{f: f \in C^\infty, \ |z|^{-m+\rho-2} z^m f(-1/z) \in C^\infty\}$. Представление T_χ задается формулой $T_\chi(g)f(z) = |\beta z + \delta|^{-m+\rho-2}(\beta z + \delta)^m f([\alpha z + \gamma]/[\beta z + \delta])$, $f \in \mathscr{D}_\chi$, $g \in G$. Представление $T_{(m, i\sigma)}$ унитарно в $L^2(z)$, а $T_{(0,-\nu)}$, $\nu \neq \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots$, унитарно относительно скалярного произведения

$$(f, \varphi)_\nu = \int |z - z'|^{\nu-2} f(z) \overline{\varphi(z')}\, dz\, dz',$$

которое положительно определено при $|\nu| < 2$ (дополнительная серия), а при $2n < |\nu| < 2n + 2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, $-(f, f)_\nu$ положительно определено на подпространстве коразмерности $n(n+1)/2$. Мы рассмотрим случай $2 < \nu < 4$. По $-(f, f)_\nu$ известным образом строится положительно определенное скалярное произведение $[f, f]_\nu$ (см. [6]).

Рассмотрим представление $\mathscr{T}_g = T_{(0, i\sigma_1)} \otimes T_{(0,-\nu)}$, действующее в $\mathscr{D}_{(0, i\sigma_1)} \otimes \mathscr{D}_{(0,-\nu)} = \mathscr{H}'$. В $\mathscr{H}'$ естественным образом возникают скалярные произведения $[\psi, \psi]$ (положительно определенное) и (ψ, ψ) (индефинитное). Пусть $\mathscr{H}$ — пополнение $\mathscr{H}'$ по норме $\sqrt{[\psi, \psi]}$. Представление $\mathscr{T}_g$ продолжается на $\mathscr{H}$, которое обозначим тоже через $\mathscr{T}_g$.

Наша цель — изучение инвариантных подпространств представления $\mathscr{T}_g$. Аналогичная задача для $G = SL(2, \mathbf{R})$ была рассмотрена автором в [7].

1. Неунитарная часть представления $\mathscr{T}_g$. Введем функции

$$\mathscr{L}^f_\lambda(\xi, z) = \lambda |z - \xi|^{\lambda-2} (1 + |\xi|^2)^{(-\lambda+i\sigma_1)/2} (1 + |z^2|)^{(-\lambda-i\sigma_1)/2} f(z) \quad \forall f \in \mathscr{D}_{\chi_1},$$
$$\chi_1 = (0, i\sigma_1 - \nu + 2),$$
$$\mathscr{K}^\varphi_\lambda(\xi, z) = \lambda |z - \xi|^{\lambda-2} (1 + |\xi|^2)^{(-\lambda+i\sigma_1)/2} (1 + |z|^2)^{(-\lambda+i\sigma_1)/2} \varphi(z) \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}_{\chi_2},$$
$$\chi_2 = (0, -i\sigma_1 - \nu + 2).$$

Легко показать, что $\mathscr{L}^f_\lambda(\xi, z), \mathscr{K}^\varphi_\lambda(\xi, z) \in \mathscr{H}$ при $\operatorname{Re}\lambda > 2$.

Лемма. *Вектор-функции $\mathscr{L}^f_\lambda(\xi, z)$, $\mathscr{K}^\varphi_\lambda(\xi, z)$ допускают аналитическое продолжение по λ как вектор-функции со значениями в $\mathscr{H}$ на область $\operatorname{Re}\lambda > (2 - \nu)/2$, причем*

$$\mathscr{T}_g \mathscr{L}^f_\lambda = \mathscr{L}^{f_1}_0, \quad \mathscr{T}_g \mathscr{K}^\varphi_{i\sigma_1} = \mathscr{K}^{\varphi_1}_{i\sigma_1},$$

где

$$f_1 = T_{\chi_1} f, \qquad \varphi_1 = T_{\chi_2} \varphi. \tag{1}$$

Пусть $\mathscr{H}_0$, $\mathscr{H}_{i\sigma_1}$ — замкнутые линейные оболочки множеств $\{\mathscr{L}^f_0\}$, $\{\mathscr{K}^\varphi_{i\sigma_1}\}$ (соответственно) при $\forall f \in \mathscr{D}_{\chi_1}$, $\forall \varphi \in \mathscr{D}_{\chi_2}$ ($\mathscr{H}_0 \dot{+} \mathscr{H}_{i\sigma_1}$ не замкнуто в $\mathscr{H}$). Равенства (1) приводят нас к следующей теореме.

Теорема 1. *В $\mathscr{H}$ имеются три инвариантных относительно $\mathscr{T}_g$ подпространства $\mathscr{H}_+$, $\mathscr{H}_0$, $\mathscr{H}_{i\sigma_1}$, замкнутая линейная оболочка которых совпадает с $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}_+ \perp \overline{\mathscr{H}_0 \dot{+} \mathscr{H}_{i\sigma_1}}$ относительно (ψ, ψ). На $\mathscr{H}_0$, $\mathscr{H}_{i\sigma_1}$ скалярное произведение (ψ, ψ) тождественно равно нулю, а на их замкнутой линейной оболочке $\overline{\mathscr{H}_0 \dot{+} H_{i\sigma_1}}$ оно не вырождается. Сужения $\mathscr{T}_g$ на $\mathscr{H}_0$, $\mathscr{H}_{i\sigma_1}$ эквивалентны* (по Наймарку, см. [4]) *представлениям T_{χ_1}, T_{χ_2} соответственно.*

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука»
«Функциональный анализ и его приложения», 1977

2. Унитарная часть представления $\mathcal{T}_g$. Введем плотное в $\mathcal{H}$ множество

$$L(z \times z) = \{f(\xi, z):\ f \in C^\infty, f(\xi, z) = 0 \text{ при } |\xi| \geqslant c_1, |z| \geqslant c_2,\ |z - \xi| \leqslant \varepsilon\}.$$

При $0 < \nu < 2$ в работе [2] М. А. Наймарком получена формула Планшереля. Мы доказываем, что она при $f \in L(z \times z)$ допускает аналитическое продолжение по ν на область $2 < \operatorname{Re} \nu < 4$. Таким образом получаем «индефинитную» формулу Планшереля при $2 < \nu < 4$, $m = 2k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$(f, f) = a(\nu) \sum_m \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\bar{c} - \nu + 2)/\Gamma(c + 2)|^2 (m^2 + \sigma^2) \left(\int |\hat{f}(\eta, m, \sigma, \nu)|^2 d\eta\right) d\sigma -$$

$$- \frac{1}{4\pi^2} \operatorname{Re} \left\{[\sigma_1 - i(2-\nu)]^2 \int \hat{f}(\eta, 0, -\sigma_1 + i(2-\nu), \nu) \overline{\hat{f}}(\eta, 0, \sigma_1 - i(2-\nu), \nu)\, d\eta\right\},$$

$$a(\nu) = \frac{-\Gamma(\nu/2)}{32\pi^3 \Gamma([2-\nu]/2)},$$

где

$$\hat{f}(\eta, m, \sigma, \nu) = \int \beta(\eta - \xi) [\mathcal{F}(\eta, \xi, m, \sigma, \nu) - \mathcal{F}(\eta, \eta, m, \sigma, \nu)]\, d\xi,$$

$$\mathcal{F}(\eta, \xi, m, \sigma, \nu) = \int \alpha(\xi - z) \gamma(z - \eta) f(\xi, z)\, dz,$$

$$\overline{\hat{f}}(\eta, 0, \sigma_1 - i(2-\nu), \nu) = \int |\eta - \xi|^{i\sigma_1 - \nu} [\mathcal{F}(\xi) - \mathcal{F}(\eta)]\, d\xi,$$

$$\mathcal{F}(\xi) = \int |z - \xi|^{\nu - 2} f(\xi, z)\, dz,$$

$$\alpha(\lambda) = |\lambda|^c \lambda^{-m/2}, \quad \beta(\lambda) = |\lambda|^{c - m + i\sigma - \nu} \lambda^{m/2}, \quad \gamma(\lambda) = |\lambda|^{\bar{c} - m} \lambda^{m/2},$$

$$c = [m - i(\sigma + \sigma_1) + \nu - 2]/2.$$

Из полученных формул следует

Теорема 2. *В подпространстве $\mathcal{H}_+$ скалярное произведение (ψ, ψ) положительно определено. Если $\overline{\mathcal{H}}_+$ — пополнение $\mathcal{H}_+$ по норме $\sqrt{(\psi, \psi)}$ и $\overline{\mathcal{T}}_g^+$ — продолжение на $\overline{\mathcal{H}}_+$ сужения $\mathcal{T}_g$ на $\mathcal{H}_+$, то оно унитарно в $\overline{\mathcal{H}}_+$ и разлагается на неприводимые представления по представлениям основной серии $T_{(2k, i\sigma)}$. В $\overline{\mathcal{H}}_+$ верна формула Планшереля*

$$(f, f) = a(\nu) \sum_m \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\bar{c} - \nu + 2)/\Gamma(c + 2)|^2 (m^2 + \sigma^2) \left(\int |\hat{f}(\eta, m, \sigma, \nu)|^2 d\eta\right) d\sigma.$$

(f пробегает плотное множество из $\mathcal{H}_+$, которое допускает явное описание.)

Замечание. Утверждения: $\mathcal{H}_+$ — полное пространство по норме $\sqrt{(\psi, \psi)}$, $\mathcal{H}$ есть прямая сумма подпространств $\mathcal{H}_+$, $\overline{\mathcal{H}_0 \dotplus \mathcal{H}_{i\sigma_1}}$ — эквивалентны. В случае $G = SL(2, \mathbf{R})$ соответствующее пространство $\mathcal{H}_+$ неполно (сообщено автору Р. С. Исмагиловым), а в данном случае полнота $\mathcal{H}_+$ по норме $\sqrt{(\psi, \psi)}$ не выяснена.

Тензорное произведение представлений $T_{(0,0)} \otimes T_{(0,-\nu)}$ отличается от предыдущего тем, что его неунитарная часть представляет собой единственное неразложимое сцепление двух (эквивалентных представлению $T_{(0,-\nu+2)}$) представлений с самим собой.

В заключение приношу глубокую благодарность Р. С. Исмагилову за постановку задачи и ценные советы.

Московский институт электронного машиностроения

Поступило в редакцию 8 июля 1976 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Наймарк М. А., Труды Моск. матем. об-ва **VIII** (1959), 121—153. 2. Наймарк М. А., Труды Моск. матем. об-ва **IX** (1960), 237—282. 3. Наймарк М. А., Труды Моск. матем. об-ва **X** (1961), 181—216. 4. Наймарк М. А., Линейные представления группы Лоренца, М., Физматгиз, 1958, 5. Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я., Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений, Обобщенные функции, вып. 5, М., Физматгиз, 1962. 6. Йохвидов И. С., Крейн М. Г., Труды Моск. матем. о-ва **V** (1956), 367—432. 7. Султанов Ш. Ш., Функц. анализ **10**, вып. 2 (1976), 90—92.