В. В. Горбацевич, Строение однородных пространств с конечной инвариантной мерой,
Изв. вузов. Матем., 1991, номер 7, 66–68

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1991 МАТЕМАТИКА № 7 (350)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

В. В. Горбацевич

УДК 515.1

СТРОЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ С КОНЕЧНОЙ ИНВАРИАНТНОЙ МЕРОЙ

Замкнутая подгруппа H в группе Ли G называется квазиравномерной, если на однородном пространстве $M=G/H$ существует G-инвариантная мера μ, причем $\mu(G/H)<\infty$; однородное пространство в этом случае называется квазикомпактным. На однородном пространстве $M=G/H$ G-инвариантная мера существует не всегда, это зависит не только от топологии пространства M, но и от выбора группы Ли, транзитивной на M. В [1], [2] был рассмотрен более широкий, чем квазикомпактные, класс плезиокомпактных однородных пространств. Однородное пространство G/H называется плезиокомпактным, если в группе Ли G существует замкнутая подгруппа P, содержащая H и такая, что пространство G/P компактно (т. е. P равномерна в G), а P/H квазикомпактно.

В данной работе приводятся некоторые результаты о строении квазикомпактных однородных пространств, причем основное внимание уделяется тем результатам, которые не переносятся на произвольные плезиокомпактные пространства, и тем, которые усиливают аналогичные результаты о компактных однородных пространствах (см. [1]).

Теорема 1. *Пусть $M=G/H$ — квазикомпактное однородное пространство связной группы Ли G. Тогда существует такое квазикомпактное однородное пространство $M'=G'/H'$, что M' конечнолистно накрывает M и $N_{G'}(H_0')\cdot S_к'=G'$, где $S_к'$ — компактная часть подгруппы Леви S' группы Ли G'.*

Под компактной частью $S_к'$ полупростой группы Ли S' понимается максимальная связная компактная нормальная подгруппа в S'; имеем разложение $S'=S_к'\cdot S_H'$, где S_H' — некомпактная часть S' — дополнительная к $S_к$ нормальная подгруппа в S' (для нее $(S_H')_к=\{e\}$). Доказательство теоремы 1 проводится аналогично доказательству в [1], [2] более слабого утверждения о существовании в плезиокомпактном случае правильного действия и использует результаты из [3]. Теорема 1 позволяет для квазикомпактных однородных пространств ввести и использовать целый набор расслоений, построенных автором в компактном и плезиокомпактном случаях [4].

Следствие. Пусть $M=G/H$ — квазикомпактное однородное пространство связной группы Ли G, компактная часть $S_к$ подгруппы Леви S которой тривиальна. Тогда существует конечнолистно накрывающее многообразие M однородное пространство вида $M'=G'/\Gamma'$ где Γ' — решетка в некоторой группе Ли G'.

Под решеткой понимается дискретная квазиравномерная подгруппа. Утверждение этого следствия при более сильных ограничениях на G ранее было доказано в [5].

Транзитивное действие группы Ли G на однородном пространстве M называется несократимым, если оно локально эффективно и в G нет собственных подгрупп, транзитивных на M.

Теорема 2. *Пусть $M=G/H$ — квазикомпактное однородное пространство группы Ли G, причем действие G на M несократимо. Тогда $H_0\subset(S_к\cdot R, S_к\cdot R)$, а $R\cap H_0\subset N$.*

Здесь H_0 — связная компонента единицы подгруппы H, R — радикал, N — нильрадикал, а $S_к$ — компактная часть подгруппы Леви S группы Ли G. Связная группа Ли G называется группой Ли типа (I), если для любого $g\in G$ все собственные значения линейного оператора Ad_g по модулю равны единице. Строение групп Ли типа (I) можно подробно описать (см [6]); с его помощью из теоремы 2 получаем

Следствие. В условиях теоремы 2 подгруппа H_0 является группой Ли типа (I).

Для произвольного квазикомпактного однородного пространства $M=G/H$ в силу [1] существуют два расслоения: $M_c\to M'\to M_a$ и $M_r\to M_a\to M_s$, где M' — некоторое однородное пространство, конечнолистно накрывающее M. Как и в [4], выделяются три широки класса квазикомпактных однородных пространств: асферичные (для них $\pi_i(M)=0$ при $i \geqslant 2$ или, что эквивалентно, M_c вырождается в точку), разрешимые (для них фундаментальная группа $\pi_1(M)$ разрешима или, что эквивалентно, M_s — точка) и полупростые (для них M_r вырождается в точку или, что эквивалентно, в $\pi_1(M)$ нет бесконечных разрешимых нормальных подгрупп). Ниже приведены результаты, позволяющие выделить квазикомпактные однородные пространства указанных трех классов среди всех плезиокомпактных однородных пространств.

Предложение 1. *Пусть M — асферичное плезиокомпактное однородное пространство. Тогда существует квазикомпактное однородное пространство вида $M'=G'/\Gamma'$ (где Γ' — решетка в некоторой асферичной группе Ли G'), конечнолистно накрывающее многообразие M.*

Доказательство аналогично доказательству, приведенному в [7], и использует [2].

Предложение 2. *Если $M=G/H$ — плезиокомпактное однородное пространство, причем действие связной группы Ли G на M локально эффективно, то M квазикомпактно и разрешимо тогда и только тогда, когда $S_H=\{e\}$ (где S_H — некомпактная часть подгруппы Леви S в G).*

Доказательство. Если $S_H=\{e\}$, то разложение Леви для G имеет вид $G=S_K\cdot R$ (R — радикал). Положим $P=N_G(H_0)$; тогда на G/P и P/H, как легко показать, существуют инвариантные меры, а поэтому и на G/H существует G-инвариантная мера μ, причем $\mu(G/H)<\infty$. Разрешимость M вытекает из [2]. Обратно, пусть G/H квазикомпактно и разрешимо. Тогда $\Gamma=(H\cap P_0)/H_0$ — разрешимая решетка в связной группе Ли $F=P_0/H_0$, где $P=N_G(H_0)$ почти связна в силу теоремы 1. Имеем $P\supset S_H$ [3], но тогда из разрешимости Γ следует, что $S_H\subset H_0$. Рассмотрим множество всех подалгебр вида $\mathfrak{s}_H$, и пусть $\mathfrak{b}$ — подалгебра Ли в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G, порожденная всеми $\mathfrak{s}_H$. Все подалгебры $\mathfrak{s}_H$ сопряжены с помощью элементов из нильрадикала N группы Ли G. Но $N_G(H_0)\supset N$, отсюда выводится, что $\mathfrak{b}$ — идеал в $\mathfrak{g}$, причем $\mathfrak{s}\subset\mathfrak{x}$. Но тогда в силу локальной эффективности действия G на M должно быть $\mathfrak{b}=\{0\}$; отсюда следует, что $\mathfrak{s}_H=\{0\}$, а поэтому $S_H=\{e\}$.

Если группа Ли G несократима на полупростом квазикомпактном однородном пространстве M, то G полупроста [1], [4], хотя не всякое, даже компактное, однородное пространство полупростой группы Ли будет полупросто.

Предложение 3. *Если $M=G/H$ — плезиокомпактное однородное пространство полупростой группы Ли G, причем действие G на M локально эффективно, то M квазикомпактно тогда и только тогда, когда $H_0\subset S_K$, где S_K—компактная часть группы Ли G.*

Доказательство выводится из [2] и того факта, что $N_G(H_0)\supset S$.

В условиях предложения 3 рассмотрим расслоение $S_K/S_K\cap H\to G/H\to G/H\cdot S_K=S^*_H/\Gamma^*$, где $S^*_H=G/S_K$, а $\Gamma^*=H/H_0\cap S_K$ — решетка в группе Ли S^*_H, локально изоморфной S_H. Подгруппа $S_H\subset G$ транзитивна на базе этого расслоения, а ее действие на G/H послойно. Поэтому структурной группой этого расслоения будет Γ^*, в частности, расслоение это оказывается плоским. Его слой — почти односвязное компактное однородное пространство, а база S^*_H/Γ является модельным многообразием для M (см. ниже).

Теорема 3. *Если M — однородное пространство и $\dim M\leqslant 3$, то M квазикомпактно (относительно транзитивного действия некоторой группы Ли) тогда и только тогда, когда M либо компактно, либо диффеоморфно многообразию вида $\mathbf{A}/\Gamma$, где Γ — решетка в группе Ли $\mathbf{A}=\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\boldsymbol{R})$ — универсальной накрывающей для $\mathrm{SL}_2(\boldsymbol{R})$.*

Доказательство основано на классификации всех однородных многообразий размерности $\leqslant 3$ (см. [8]). Пусть однородное пространство M квазикомпактно, но не компактно. Тогда из [8] следует, что либо M диффеоморфно однородному пространству вида $\mathbf{A}/\Gamma$, либо база M_a натурального расслоения для M диффеоморфна $\boldsymbol{R}^k\times T^l$, где T^l — тор, $k+l\leqslant 3$ и $k\geqslant 1$. Если $M_a=\boldsymbol{R}^k\times T^l$, то M разрешимо, но тогда оно должно быть компактно, что невозможно, поскольку $k\geqslant 1$. Поэтому $M=\mathbf{A}/\Gamma$. Обратно, если M компактно, то из перечисления в [8] всех односвязных групп Ли, несократимых на M при $\dim M\leqslant 3$, получаем, используя [3], что на M всегда существует конечная инвариантная мера.

Переходим к более подробному изучению фундаментальной группы $\pi_1(M)$ квазикомпактного однородного пространства, рассматривая ее с точностью до слабой соизмеримости (или, как еще говорят, с точностью до конечных групп), о которой см. [4].

Теорема 4. *Пусть π — некоторая абстрактная группа. Группа π слабо соизмерима с $\pi_1(M)$ для некоторого квазикомпактного однородного пространства M тогда и только тогда, когда π слабо соизмерима с решеткой в некоторой односвязной группе Ли F, для которой $S_K = \{e\}$.*

Доказательство аналогично приведенному в [4] для компактного случая, но в квазикомпактном случае для $M = G/H$ имеем $N_G(H_0) \supset S_H$, что позволяет решетку, слабо соизмеримую с $\pi_1(M)$, вложить в односвязную группу Ли, используя [9].

В силу теоремы 4 группе $\pi_1(M)$ для квазикомпактного M можно сопоставить некоторую односвязную группу Ли $F = F(\pi_1(M))$, для которой компактная часть подгруппы Леви тривиальна. Положим $M(\pi_1(M)) = F/\Gamma$, где Γ — решетка в Γ, слабо соизмеримая с $\pi_1(M)$; квазикомпактное однородное пространство M назовем модельным для M (и для $\pi_1(M)$).

Теорема 5. *Пусть M — квазикомпактное однородное пространство и $\pi_1(M)$ слабо соизмерима с решеткой Γ в некоторой односвязной группе Ли F. Тогда многообразие F/Γ определяется группой $\pi_1(M)$ однозначно с точностью до конечнолистного накрытия.*

Доказательство теоремы вытекает из следующего усиления теоремы А из [9] (где на G, G' накладывались дополнительные условия).

Предложение 4. *Пусть Γ, Γ' — решетки в односвязных группах Ли G, G' соответственно, $S_K = S'_K = \{e\}$. Если Γ и Γ' слабо соизмеримы, то существуют такие подгруппы конечных индексов Γ_*, Γ'_* в Γ, Γ' соответственно, что G/Γ_* диффеоморфно G'/Γ'_*.*

Доказательство предложения 4 проводится так же, как в [9], но только в дополнение к [9] нам нужно доказать его справедливость и для случая, когда $G \approx G' \approx \mathbf{A}$, а G/Γ и G'/Γ', некомпактны. Пусть Γ — решетка в группе Ли $\mathbf{A}$, а C — связная подгруппа в $\mathbf{A}$, соответствующая подалгебре $so_2 \subset sl_2(R)$. Положим $X = C \diagdown \mathbf{A}/\Gamma \cdot Z(\mathbf{A})$, тогда X — поверхность конечного типа, причем можно доказать, что $\mathbf{A}/\Gamma$ диффеоморфно $S^1 \times X$ (используя некомпактность $\mathbf{A}/\Gamma$). Аналогично получим $\mathbf{A}/\Gamma' = S^1 \times X'$. Поверхность конечного типа однозначно с точностью до диффеоморфизма определяется двумя инвариантами g, $h \in N$, где g — род (в нашем случае $g \geqslant 2$), h — число дыр. Из критерия существования конечнолистного накрытия над поверхностью (см. [10]) следует, что существует поверхность $\hat{X}$, конечнолистно накрывающая как X, так и X'. Отсюда сразу получаем, что для подходящих подгрупп конечных индексов $\Gamma_* \subset \Gamma$, $\Gamma'_* \subset \Gamma'$ многообразия $\mathbf{A}/\Gamma_*$ и $\mathbf{A}/\Gamma'_*$ диффеоморфны.

Роль модельного однородного пространства при изучении произвольных квазикомпактных однородных пространств показывает следующее

Предложение 5. *Пусть M — квазикомпактное однородное пространство. Тогда для некоторого M', конечнолистно накрывающего M, и некоторого модельного пространства $\mathbf{M}(\pi_1(M))$ существует расслоение $\mathbf{M}(\pi_1(M)) \to M \to B$, база которого — некоторое компактное односвязное однородное пространство.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбацевич В. В. О некоторых классах однородных пространств, близких к компактным // ДАН СССР.— 1988.— Т. 303.— № 4.— С. 785—788.

2. Горбацевич В. В. О плезиокомпактных однородных пространствах // Сиб. матем. журн.— 1989.— Т. XXX.— № 2.— С. 61—72.

3. Mostow G. D. Homogeneous spaces with finite invariant measure // Ann. Math.—1962.— V. 75.— № 1.— P. 17—37.

4. Горбацевич В. В., Онищик А. Л. Группы Ли преобразований // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Современ. пробл. матем.— 1988.— Т. 20.— С. 103—240.

5. Wang S. P. Homogeneous spaces with finite invariant measure // Amer. J. Math.— 1976.— V. 98.— № 2.— P. 311—324.

6. Винберг Э. Б., Горбацевич В. В., Онищик А. Л. Строение групп Ли // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Современ. пробл. матем.— 1989.— Т. 41.— 254 с.

7. Gorbačevič V. V. Compact aspherical homogeneous spaces up to a finite covering // Ann. Global. Anal. and Geom.— 1983.— V. 1.— № 3.— P. 103—118.

8. Горбацевич В. В. О трехмерных однородных пространствах // Сиб. матем. журн.— 1977.— Т. XVIII.— № 2.— С. 280—293.

9. Mostow G. D. On the topology of homogeneous spaces of finite measure // Symp. math. Jnst. naz. alta mat. V. 16.—London— New York, 1975.— P. 375—398.

10. Цишанг Х., Фогт Э., Колдевай Х.-Д. Поверхности и разрывные группы.— М.: Наука, 1988.— 685 с.

г. Москва

Поступила
06.06.1990