А. П. Терехин, Оценка кратного интеграла интегралами меньшей кратности,
Матем. заметки, 1979, том 25, выпуск 3, 379–392

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 25, № 3 (1979)

ОЦЕНКА КРАТНОГО ИНТЕГРАЛА ИНТЕГРАЛАМИ МЕНЬШЕЙ КРАТНОСТИ

А. П. Терехин

Целью устанавливаемого неравенства (1) является вывод новых мультипликативных оценок для смешанных производных, модулей гладкости и приближений. Частные случаи приведены в [1]; там фигурирует неравенство со степенным весом в интегралах, а не с показательным, как в (1), но соответствующая замена переменной преобразует один вес в другой (см. ниже). Возможны и другие приложения неравенства (1) и его обобщений на произвольные веса (например, непосредственное — при решении вопроса о суммируемости функции, мажоранты, которых могут зависеть от меньшего числа переменных).

Обозначения:

$$x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n,\quad ax=\sum\nolimits_{i=1}^n a_ix_i \quad (a\in\mathbf{R}^n);$$

$$\operatorname{supp} x=\{i\in\{1,\ldots,n\}\mid x_i\neq 0\};$$

$e\subset\{1,\ldots,n\}$, $|e|$ — число элементов множества e;

$e'=\{1,\ldots,n\}\setminus e$;

$\mathbf{R}^e=\{x\in\mathbf{R}^n\mid \operatorname{supp} x\subset e\}$;

x^e, E^e — проекции на $\mathbf{R}^e$ соответственно x и множества E.

Определение. Пусть J — конечное множество индексов j; σ и σ_j — меры в пространствах $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^{e_j}$, соответственно; $\theta_j>0$.

Условиями неравенства вида

$$\int_E f d\sigma\leqslant C\Pi_{j\in J}\left(\int_{E_j} f_j d\sigma_j\right)^{\theta_j}$$

называем те условия на семейства (σ, σ_j) и (θ_j), $j \in J$, при которых существует постоянная C такая, что неравенство будет выполнено, как только для всех $j \in J$ и $x \in E$ имеем: $0 \leqslant f(x) \leqslant f_j(x^{e_j})$, $E^{e_j} \subset E_j$, функции f и f_j измеримы на E и E_j относительно мер σ и σ_j, соответственно (таким образом, $E_j \subset \mathbf{R}^{e_j}$, f_j не зависит от x_j с $i \notin e_j$).

ТЕОРЕМА. *Пусть* $a \in \mathbf{R}^n$, $a^j \in \mathbf{R}^{e_j}$, $\theta_j > 0$ $(j \in J)$. *Необходимыми и достаточными условиями неравенства*

$$\int_{\mathbf{R}^n} f e^{ax} dx \leqslant C \Pi_{j \in J} \left(\int_{\mathbf{R}^{e_j}} f_j e^{a^j x} dx_{e_j} \right)^{\theta_j} \tag{1}$$

являются в совокупности следующие:

1) $$\sum\nolimits_{j \in J} \theta_j = 1 \qquad (|\theta| = 1);$$

2) *для всех* $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$a_i = \sum\nolimits_{j \in J} \theta_j a_i^j \qquad (a = \theta A);$$

3) *для всякого* $s \in J$

$$\operatorname{rang} \| a_i^j \|_{i \in e_s'} = | e_s' | \qquad (\operatorname{rang})$$

(*считаем* $\operatorname{rang} \| \cdot \|_{i \in \varnothing} = 0$).

Неравенство (1) *выполняется с коэффициентом*

$$C = |J| \prod\nolimits_{j \in J} |\Delta_j|^{-\theta_j},$$

где Δ_s — *базисный минор матрицы* $\| \theta_j a_i^j \|_{i \in e_s'}$.

При наличии равных e_j, *выбрав разбиение* $(J_k)_{k=1}^m$ *индексного множества* J *на подмножества постоянства семейства* (e_j) *такое, что* $\operatorname{rang} \left\| \sum_{j \in J_k} \theta_j a_i^j \right\|_{i \in e_s'} = |e_s'|$, *можно положить*

$$C = m \prod\nolimits_{k=1}^m |\Delta_k|^{-\sum_{j \in J_k} \theta_j},$$

Δ_k — *базисный минор матрицы* $\left\| \sum_{j \in J_k} \theta_j a_i^j \right\|_{i \in e_s'}$.

Замечание. Тот факт, что J_k есть подмножество постоянства семейства (e_j) означает: если $j, s \in J_k$, то $e_j = e_s$ (обратное необязательно).

Доказательство. Достаточность. Пусть выполнены как условия теоремы, так и предпосылки неравенства. Для удобства на каждую из функций f_j: $\mathbf{R}^{e_j} \to \mathbf{R}$, не вводя нового обозначения, будем смотреть как на функцию f_j: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, считая $f_j(x) \equiv f_j(x^{e_j})$.

Положим

$$G_s = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \varphi_j(x) \leqslant \varphi_s(x) \ \forall\, j \in J\},$$

где φ_j $(j \in J)$ — действительные функции, измеримые на $\mathbf{R}^n$. Очевидно, для любой точки x найдется такой номер $s \in J$, что $\varphi_j(x) \leqslant \varphi_s(x)$ для всех $j \in J$; следовательно, $\bigcup_{s \in J} G_s = \mathbf{R}^n$. Поскольку $0 \leqslant f \leqslant f_s$, то

$$\int_{\mathbf{R}^n} f e^{ax} dx \leqslant \sum_{s \in J} \int_{G_s} f_s e^{ax} dx. \tag{2}$$

Оценим каждый интеграл в сумме, положив $\varphi_j(x) = a^j x - b_j$, где b_j — неопределенные слагаемые. Система неравенств $\varphi_j \leqslant \varphi_s$ примет вид

$$(a^j - a^s)x \leqslant b_j - b_s \qquad (\forall j \in J).$$

Так как функция f_s не зависит от переменных x_i с $i \in e'_s$, то

$$\int\limits_{G_s} f_s e^{ax} dx = \int_{\mathbf{R}^{e_s}} f_s \exp(ax^{e_s})\, dx^{e_s} \int_{G_s(x^{e_s})} \exp(ax^{e'_s})\, dx^{e'_s}. \tag{3}$$

Здесь $G_s(x^{e_s})$ — сечение множества G_s плоскостью $y_i = x_i$, $i \in e_s$; это сечение определяется неравенствами

$$(a^j - a^s)\, x^{e'_s} \leqslant b_j - b_s - (a^j - a^s)x^{e} \qquad (\forall j \in J).$$

Запишем неравенства в эквивалентном виде

$$a^j x^{e'_s} \leqslant c_j \qquad (\forall j \in J), \tag{4}$$

положив

$$c_j = b_j - b_s - (a^j - a^s)\, x^{e_s} \tag{5}$$

и заметив, что $a^s x^{e'_s} = 0$, так как $a^s \in \mathbf{R}^{e_s}$.

Оценим внутренний интеграл в правой части (3). С этой целью, воспользовавшись равенством $a = \theta A$

(см. условия теоремы), разложим вектор a на два

$$a = \sum_{j \in J_0} \theta_j a^j + \sum_{j \in J_0'} \theta_j a^j,$$

выбрав, пока произвольно, множество $J_0 \subset J$, $J_0' = J \setminus J_0$. Ввиду (4) будем иметь

$$ax^{e_s'} \leqslant \sum_{j \in J_0} \theta_j a^j x^{e_s'} + \sum_{j \in J_0'} \theta_j c_j.$$

Следовательно

$$\int_{G_s(x^{e_s})} \exp(ax^{e_s'})\, dx^{e_s'} \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left(\sum_{j \in J_0'} \theta_j c_j\right) \int_{G_s'(x^{e_s})} \exp(a' x^{e_s'})\, dx^{e_s'}, \tag{6}$$

где

$$a' = \sum_{j \in J_0} \theta_j a^j, \tag{7}$$

множество $G_s'(x^{e_s})$ задано неравенствами

$$a^j x^{e_s'} \leqslant c_j, \quad j \in J_0. \tag{8}$$

Это часть неравенств (4), задающих сечение $G_s(x^{e_s})$, поэтому $G_s(x^{e_s}) \subset G_s'(x^{e_s})$.

Пусть теперь J_0 — множество номеров строк $\theta_j a^j$ базисного минора Δs матрицы $\| \theta_j a_i^j \|_{i \in e_s'}$. По условию (rang) матрица $\| \theta_j a_i^j \|_{i \in e_s'}^{j \in J_0}$ невырожденная. Заменим переменную в интеграле правой части (6) по формуле $y_j = \theta_j a^j x^{e_s'}$, $j \in J_0$. Учитывая (7) и (8), найдем

$$\int_{G_s'(x^{e_s})} \exp(a' x^{e_s'})\, dx^{e_s'} =$$
$$= |\Delta_s^{-1}| \prod_{j \in J_0} \int_{-\infty}^{\theta_j c_j} e^{y_j} dy_j = |\Delta_s^{-1}| \prod_{j \in J_0} e^{\theta_j c_j}.$$

Подставив найденное значение в правую часть (6), преобразуем ее в следующую величину:

$$| \Delta_s^{-1} | \exp \left(\sum_{j \in J_0'} \theta_j c_j + \sum_{j \in J_0} \theta_j c_j \right) =$$

$$= | \Delta_s^{-1} | \exp \sum_{j \in J} \theta_j [b_j - b_s - (a^j - a^s) x^{e_s}] =$$

$$= | \Delta_s^{-1} | \exp \left[\sum_{j \in J} \theta_j b_j - b_s - (a - a^s) x^{e_s} \right].$$

Здесь заменили c_j по формуле (5) и учли условия теоремы $(| \theta | = 1)$, $(a = \theta A)$.

Используя в (3) оценку (6) с преобразованной правой частью, находим

$$\int_{G_s} f_s e^{ax} dx \leqslant | \Delta_s^{-1} | \int_{\mathbf{R}^{e_s}} f_s \exp \left(\sum_{j \in J} \theta_j b_j - b_s + a^s x^{e_s} \right) dx^{e_s} =$$

$$= | \Delta_s^{-1} | \exp \left(\sum_{j \in J} \theta_j b_j - b_s \right) \int_{\mathbf{R}^{e_s}} f_s e^{a^s x} dx^{e_s}.$$

Обозначив

$$J_s = \int_{\mathbf{R}^{e_s}} f_s e^{a^s x} dx^{e_s},$$

воспользуемся найденной оценкой в (2)

$$\int_{\mathbf{R}^n} f e^{ax} dx \leqslant \exp \left(\sum_{j \in J} \theta_j b_j \right) \sum_{s \in J} | \Delta_s |^{-1} e^{-b_s} J_s.$$

Числа b_s определим из условия равенства (единице) всех слагаемых в сумме:

$$e^{b_s} = | \Delta_s |^{-1} J_s.$$

Тогда

$$\int_{\mathbf{R}^n} f e^{ax} dx \leqslant | J | \sum_{j \in J} (| \Delta_j |^{-1} J_j)^{\theta_j}.$$

Этим доказано неравенство (1) и получено значение для коэффициента C. Оно соответствует разбиению индексного множества J на одноэлементные подмножества. Достаточность условий доказана.

Необходимость. 1) Условие $(| \theta | = 1)$ необходимо, так как при выполнении неравенства (1) для функций f и f_j оно должно выполняться и для функций λf и λf_j с любыми $\lambda > 0$.

2) Условие $(a = \theta A)$ необходимо для выполнения неравенства (1) на классе характеристических функций

параллелепипедов с ребрами $(\ln t_i, \ln 2t_i)$. Действительно, при любых a_i

$$\int_{\ln t_i}^{\ln 2t_i} e^{a_i x_i} dx_i = c_i t_i^{a_i},$$

где c_i от t_i не зависит. Тогда

$$\prod_{i=1}^{n} t_i^{a_i} \leqslant C \prod_{j \in J} \left(\prod_{i \in e_j} t_i^{a_i^j} \right)^{\theta_j} = C \prod_{i=1}^{n} t_i^{\sum_{j \in J} \theta_j a_i^j}$$

(учли, что $\operatorname{supp} a^j \subset e_j$). Отсюда, в силу произвольности $t_i > 0$, следует равенство $a = \theta A$.

3) Допустим, что не выполнено условие (rang) и для некоторого $s \in J$ имеем $\operatorname{rang} \| a_i^j \|_{i \in e_s'} < | e_s' |$.

Обозначим

$$Q = \{x \mid -1 \leqslant a^j x \leqslant 1 \quad \forall j \in J\}. \tag{9}$$

Из линейной зависимости столбцов a_i, $i \in e_s'$, следует существование ненулевого вектора c, ортогонального всем a^j и такого, что

$$\operatorname{supp} c \subset e_s'. \tag{10}$$

Пусть $L = \{tc\}_{t \in \mathbf{R}}$ и $L^{\perp}$ — ортогональное дополнение к L. Имеем $Q = Q \cap L^{\perp} \oplus L$. Действительно, любая точка $x \in \mathbf{R}^n$ представима в виде суммы $x = x^{\perp} + tc$, $x^{\perp} \in L^{\perp}$, и для нее отношения $x \in Q$ и $x^{\perp} \in Q$ равносильны, поскольку $a^j x = a^j x^{\perp}$ в силу выбора вектора c.

Так как многогранник Q является n-мерным (ноль — его внутренняя точка), то сечение $Q \cap L^{\perp}$ $(n-1)$-мерно. Выбрав в нем ограниченное множество G_0 положительной меры (размерности $n-1$), положим $G_N = G_0 \oplus [0, Nc]$ $(N > 0)$.

Допустим, что неравенство (1) все же выполняется. Применим его к функциям $f = \chi(G_N)$ и $f_j = \chi(G_N^j)$, где G_N^j — проекция G_N на $\mathbf{R}^{e_j}$, $\chi(E)$ — характеристическая функция множества E. Из неравенства (9) следует, что экспоненты $e^{a^j x}$ ограничены на многограннике Q, тем более на G_N (по построению $G_N \subset Q$). Умножив j-ое неравенство (9) на θ_j и сложив по $j \in J$, получим $-1 \leqslant ax \leqslant 1$ (воспользовались равенствами $a = \theta A$ и $|\theta| = 1$). Следовательно, ограничена на G_N и экспонента e^{ax}. Тогда, в силу неравенства (1),

$$\int_{G_N} dx \leqslant C \prod_{j \in J} \left(\int_{G_N^j} dx^{e_j} \right)^{\theta_j}. \qquad (11)$$

Но $mG_N \asymp N$ (оценивается сверху и снизу с положительными коэффициентами, не зависящими от N). Аналогично, если $e_j \cap \operatorname{supp} c \neq \varnothing$, то $mG_N^j \asymp N$. Ввиду (10) $e_s \cap \operatorname{supp} c = \varnothing$. Следовательно, $mG_N^s \asymp 1$ (всюду меры соответствующей размерности).

Учитывая это в (11), получаем

$$N \leqslant C' \prod_{j \neq s} N^{\theta_j} = C' N^{1-\theta_s}.$$

Противоречие: $\theta_s > 0$, N как угодно большое. Доказана необходимость последнего условия (rang).

Доказываем заключительную часть теоремы — о коэффициенте C в неравенстве (1).

Пусть $(J_k)_{k=1}^m$ — разбиение множества J, упомянутое в формулировке теоремы. Для каждого k положим

$$\bar{\theta}_k = \sum_{j \in J_k} \theta_j, \quad \bar{\theta}_k \bar{a}^k = \sum_{j \in J_k} \theta_j a^j, \quad \bar{e}_k = e_j \quad (j \in J_k).$$

Из второго равенства однозначно определяется $\bar{a}^k$.

Новые семейства $(\bar{e}_k)$, $(\bar{\theta}_k)$ и $(\bar{a}^k)$ удовлетворяют всем условиям теоремы:

$$\sum_{k=1}^m \bar{\theta}_k = \sum_{k=1}^m \sum_{j \in J_k} \theta_j = \sum_{j \in J} \theta_j = 1,$$

$$\sum_{k=1}^m \bar{\theta}_k \bar{a}^k = \sum_{k=1}^m \sum_{j \in J_k} \theta_j a^j = \sum_{j \in J} \theta_j a^j = a,$$

$$\operatorname{rang} \| \bar{\theta}_k \bar{a}_i^k \|_{i \in \bar{e}_s'} = |\bar{e}_s'|.$$

Последнее является условием выбора разбиения.

Допустив $0 \leqslant f \leqslant f_j$, $f_j(x) = f_j(x^{e_j})$, положим $\bar{f}_k(x) = \min\limits_{j \in J_k} f_j(x)$. Очевидно, $0 \leqslant f \leqslant \bar{f}_k$ и $\bar{f}_k(x) = \bar{f}_k(x^{\bar{e}_k})$, так как $\bar{e}_k = e_j$ $(\forall j \in J_k)$. На основании доказанного

$$\int_{\mathbf{R}^n} f e^{ax} dx \leqslant m \left(\prod_{k=1}^m |\Delta_k|^{-\theta_k} \right) \cdot \prod_{k=1}^m \left(\int_{\mathbf{R}^{\bar{e}_k}} \bar{f}_k e^{\bar{a}^k x} dx^{\bar{e}_k} \right)^{\bar{\theta}_k}.$$

По неравенству Гельдера

$$\int_{\mathbf{R}^{\bar{e}_k}} \bar{f}_k e^{\bar{a}^k x} dx^{\bar{e}_k} \leqslant \prod_{j \in J_k} \left(\int_{\mathbf{R}^{\bar{e}_k}} \bar{f}_k e^{a^j x} dx^{\bar{e}_k} \right)^{\theta_j / \bar{\theta}_k}.$$

Поскольку $(\forall_j \in J_k)\ \bar{f}_k \leqslant f_j$ и $\bar{e}_k = e_j$, то из последних двух неравенств следует неравенство (1), причем с искомым коэффициентом C. Теорема доказана полностью.

ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА. *Пусть* $a \in \mathbf{R}^n$, $a^j \in \mathbf{R}^{e_j}$, $\theta_j > 0$ $(j \in J)$; σ_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ — *функции, каждая из которых не убывает на своем промежутке* P_i (*ограниченном или неограниченном*),

$$\sigma_{i, a_i}(\beta) - \sigma_{i, a_i}(\alpha) = \int_{\sigma_i(\alpha)}^{\sigma_i(\beta)} e^{a_i x_i} dx_i \qquad (\alpha, \beta \in P_i). \qquad (12)$$

Тогда условия неравенства (1) (*см. определение и теорему*) *являются также условиями общего неравенства*

$$\int_E f \prod_{i=1}^{n} d\sigma_{i, a_i} \leqslant C \prod_{j \in J} \left(\int_{E_j} f_j \prod_{i \in e_j} d\sigma_{i, a_i^j} \right)^{\theta_j}. \qquad (13)$$

С непрерывными функциями σ_i *неравенство таково:*

$$\int_E f \exp\left[\sum_{i=1}^{n} a_i \sigma_i(x_i)\right] \prod_{i=1}^{n} d\sigma_i(x_i) \leqslant$$
$$\leqslant C \prod_{j \in J} \left\{ \int_{E_j} f_j \exp\left[\sum_{i \in e_j} a_i^j \sigma_i(x_i)\right] \cdot \prod_{i \in e_j} d\sigma_i(x_i) \right\}^{\theta_j}. \qquad (14)$$

Коэффициент C *тот же, что и в неравенстве* (1).

Доказательство. 1. Общее неравенство с интегрированием по мере Лебега, но произвольным множеством E, следует из неравенства (1), примененного к функциям f и f_j, продолженным нулем за E и E_j, соответственно.

2. Допустим, что функции σ_i на своих промежутках P_i непрерывны, $E = P \equiv \prod_{i=1}^{n} P_i$, $E_j = P^{e_j}$.

Пусть σ_i^{-1} — функция, правая обратная к σ_i, т. е. определяемая из условия: $\sigma_i[\sigma_i^{-1}(y_i)] = y_i$ при всех $y_i \in \sigma_i(P_i)$ (понятно, для непрерывной функции σ_i такая существует, она единственна и равна обратной, если σ_i строго возрастает).

В силу известной связи между интегралами Лебега и Лебега — Стилтьеса с непрерывными σ_i имеем

$$\int_P f \exp\left[\sum_{i=1}^n a_i\sigma_i(x_i)\right] \prod_{i=1}^n d\sigma_i(x_i) = \int_{\sigma(P)} f\circ\sigma^{-1}(y)\, e^{ay}\, dy,$$

где $\sigma(P) = \prod_{i=1}^n \sigma_i(P_i)$, $\sigma^{-1}(y) = (\sigma_1^{-1}(y_1), \ldots, \sigma_n^{-1}(y_n))$. Последний интеграл, согласно случаю 1, оценивается произведением

$$C\prod_{j\in J}\left[\int_{\sigma(P)^{e_j}} f_j\circ\sigma^{-1} e^{a^j y} dy\right]^{\theta_j}.$$

Осталось от интегралов Лебега снова перейти к интегралам Лебега — Стилтьеса по мерам $\prod_{i\in e_j} d\sigma_i(x_i)$. Обобщенная теорема для непрерывных функций σ_i доказана.

Установленное неравенство (14) равносильно неравенству (13), так как в силу упомянутой выше связи между интегралами с непрерывными функциями

$$\int_{\sigma_i(\alpha)}^{\sigma_i(\beta)} e^{a_i x_i} dx_i = \int_\alpha^\beta e^{a_i\sigma_i(x_i)} d\sigma_i(x_i),$$

так что, ввиду (12),

$$d\sigma_{i,a_i}(x_i) = e^{a_i\sigma_i(x_i)} d\sigma_i(x_i).$$

Аналогично с a_i^j вместо a_i.

3. Освободимся от условия непрерывности функций σ_i, но потребуем их ограниченности; по-прежнему $E = P \equiv \prod_{i=1}^n P_i$, $E_j = P^{e_j}$. Здесь воспользуемся тем фактом, что всякая ограниченная неубывающая функция σ есть поточечный предел последовательности σ_m равномерно ограниченных непрерывных неубывающих функций. Ввиду доказанного (случай 2) достаточно убедиться в справедливости предельного перехода в однократных интегралах вида $\int_P f d\sigma_{m,a}$, где $\sigma_{m,a}$ определена по σ_m согласно формуле (12). Но ясно, что подходящим образом нормированная последовательность $\sigma_{m,a}$ удовлетворяет условиям теоремы Хелли (σ ограничена) и пределом

последовательности $\sigma_{m,a}$ является функция σ_a. Таким образом, предельный переход верен.

4. Пусть некоторые функции σ_i на P_i не ограничены. Но они будут ограниченными на промежутках $P_{i,\,m}$ некоторой последовательности, исчерпывающей промежуток P_i. Тогда станут выполненными условия случая 3. Осуществив предельный переход при $m \to \infty$ в неравенстве с $P_{i,\,m}$, распространим его на случай неограниченных σ_i.

5. Обобщение неравенства на произвольные множества E и E_j обосновывается как в пункте 1. Теорема доказана полностью.

Замечание. Условия неравенства (1) не всегда необходимы для неравенств (13), (14). Так, с ограниченными функциями σ_i выполняется более общее неравенство (правда, менее интересное) и лишь при условии $|\theta| = 1$. В самом деле, пусть мера $d\sigma_i$ удовлетворяет условию Липшица относительно меры $d\varphi_i$ (т. е. $d\sigma_i \leqslant K_i d\varphi_i$; в таком отношении при ограниченной σ_i находятся, например, $\sigma_{i,\,a}$ и $\sigma_{i,\,b}$ с любыми вещественными a и b, см. (12)). Тогда, если $0 \leqslant f \leqslant f_j$, то

$$\int_E f \prod_{i=1}^n d\sigma_i = \prod_{j\in J}\Big(\int_E f \prod_{i=1}^n d\sigma_i\Big)^{\theta_j} \leqslant$$
$$\leqslant C' \prod_{j\in J}\Big(\int_{E_j} f_j \prod_{i\in e_j} d\varphi_i\Big)^{\theta_j}.$$

Таким образом, для этого неравенства достаточно условия $|\theta| = 1$. Оно необходимо по той же причине, что и для неравенства (1) (см. доказательство теоремы, пункт 2, случай 1).

Если функции σ_i строго возрастают на P_i и $\sigma_i(P_i) = \mathbf{R}$ (σ_i заведомо непрерывны), то условия неравенства (1) являются не только достаточными, как утверждает обобщенная теорема, но и необходимыми для неравенства (14) с $E = \prod_{i=1}^n P_i$ (тогда $E_j = \prod_{j\in e_j} P_i$). Действительно, в этом случае оба неравенства, (1) и (14), равносильны, что следует из связи между интегралами Лебега и Лебега — Стильтьеса с непрерывными σ_i (см. пункт 2 доказательства обобщенной теоремы). Следовательно, условия неравенств (1) и (14) общие.

Следствие. *Необходимые и достаточные условия для выполнения неравенства* (1) (*см. определение и теорему*) *являются необходимыми и достаточными и для выполнения следующего неравенства*

$$\int_{\mathbf{R}_+^n} f\left(\prod_{i=1}^n x_i^{a_i-1}\, dx_i\right) \leqslant$$
$$\leqslant C \prod_{j\in J} \left[\int_{\mathbf{R}_+^{e_j}} f_j\left(\prod_{i\in e_j} x_i^{a_i^j-1}\, dx_i\right)\right]^{\theta_j}, \qquad (15)$$

где $\mathbf{R}_+^n$ *и* $\mathbf{R}_+^{e_j}$ *— положительные ортанты пространств* $\mathbf{R}^n$ *и* $\mathbf{R}^{e_j}$. *Коэффициент* C *тот же, что и в неравенстве* (1).

Для доказательства достаточно неравенство (14) записать с $\sigma_i(x_i) = \ln x_i$ и учесть замечание к обобщенной теореме о необходимости условий в случае возрастающих функций σ_i со значениями на R.

Пример 1. Пусть для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ $a_i \neq 0$, $\theta_i > 0$ и пусть $\sum_{i=1}^n \theta_i = 1$. Если для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $x \in \mathbf{R}_+^n$ $0 \leqslant f(x) \leqslant f_i(x_i)$, то

$$\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty f(x)\left(\prod_{i=1}^n x_i^{a_i-1} dx_i\right) \leqslant$$
$$\leqslant n \prod_{i=1}^n |a_i|^{\theta_i-1}\left[\int_0^\infty f_i(x_i)\, x_i^{a_i/\theta_i-1} dx_i\right]^{\theta_i}.$$

Это частный случай неравенства (15) с $J = \{1, \ldots, n\}$, $e_i = \{i\}$ и вычисленными a^i и C согласно теореме. Из предпосылки $a^i \in \mathbf{R}^{\{i\}}$ следует, что вектор a^i может иметь ненулевой лишь компоненту a_i^i, условие $a = \theta A$ означает, что $a_i^i = a_i/\theta_i$. Матрица $\| \theta_i a^i \|$ — диагональная и $\Delta_i = \prod_{k\neq i} a_k \neq 0$. Таким образом, выполнено условие (rang). Далее,

$$C = n \prod_{i=1}^n |\Delta_i|^{-\theta_i} = n \prod_{i=1}^n \left(\prod_{k\neq i} |a_k|\right)^{-\theta_i} = n \prod_{i=1}^n |a_i|^{\theta_i-1}.$$

Множитель n в коэффициенте C уменьшить нельзя. Так, применив неравенство с $a_i = 1$ к характеристическим функциям единичного куба и его ребер $[0, 1]$, получим

$$1 \leqslant n \prod_{i=1}^n \theta_i^{\theta_i}.$$

При $\theta_i = 1/n$ это будет равенство.

З а м е ч а н и е. С любыми a_i

$$\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty f(x)\Big(\prod_{i=1}^n x_i^{a_i-1}dx_i\Big) \leqslant \prod_{i=1}^n \int_0^\infty f_i^{\theta_i}(x_i)\, x_i^{a_i-1}dx_i$$

(учли очевидное неравенство $f = \Pi f^{\theta_i} \leqslant \Pi f_i^{\theta_i}$). Но для монотонной функции g, как известно,

$$\Big(\int_0^\infty g(x)\, x^{a/\theta-1}dx\Big)^\theta \leqslant M(a, \theta) \int_0^\infty g^\theta(x)\, x^{a-1}dx.$$

При $a > 0$ левая часть конечна, а правая — бесконечна для функции $g(x) = x^{-a/\theta}\ln^{-1/\theta}x$, если $x \geqslant e$, и $g(x) = e^{-a/\theta}$, если $0 < x < e$.

П р и м е р 2 (варианты вычисления коэффициента C при наличии равных e_j — см. формулировку теоремы). Пусть $n = 2$, $J = \{1, 2, 3\}$; $e_1 = \{1\}$, $e_2 = e_3 = \{1, 2\}$; $a^1 = (a_1^1, 0)$, a^2, a^3 — любые из $\mathbf{R}^2$. Одноточечному разбиению множества J соответствуют $\Delta_1 = \theta_2 a_2^2$ или $\Delta_1 = \theta_3 a_2^3$, $\Delta_2 = \Delta_3 = 1$; имеет смысл положить $C = 3(\max |\theta_2 a_2^2|, |\theta_3 a_2^3|)^{-\theta_1}$. Возможно другое разбиение: $J = \{1\} \cup \{2, 3\}$. В этом случае

$$\Delta_1 = \theta_2 a_2^2 + \theta_3 a_2^3, \quad \Delta_2 = 1, \quad C = 2\,|\theta_2 a_2^2 + \theta_3 a_2^3|^{-\theta_1}.$$

Меньшим может оказаться и первое и второе значение C.

П р и м е р 3. Для семейства $e_1 = \{1\}$, $e_2 = \{2, 3\}$ ($n = 3$) неравенство (1) невозможно, так как невыполнимо условие о ранге

$$\| a_i^j \|_{i \in e_1'} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ a_2^2 & a_3^2 \end{Vmatrix}, \quad \operatorname{rang} < |e_1'| = 2.$$

С л е д с т в и е. *Пусть σ_i — неубывающая на своем промежутке функция скачков, $\sigma_i(m_i) \equiv \sigma_i(x_{i,m_i})$ — ее значение в точке разрыва с номером m_i, $h_i(m_i) \equiv h_i(x_{i,m_i})$ — величина скачка в этой точке; $m_i \in M_i$, где M_i — либо множество $\mathbf{N}$ натуральных чисел, либо множество $\mathbf{Z}$ целых чисел; $m = (m_1, \ldots, m_n)$.*

Если для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ скачки $h_i(m_i)$ как функции m_i ограничены, то в условиях неравенства (1) (*см. теорему*) *существует постоянная C' такая, что из соотношений $0 \leqslant u(m) \leqslant u_j(m)$, $u_j(m) = u_j(m^{e_j})$, выполненных* *для всех* $j \in J$, *и* $m \in M \subset \prod_{i=1}^{n} M_i$ *следует неравенство*

$$\sum_{m\in M} u(m)\Bigl(\prod_{i=1}^{n} h_i(m_i)\, e^{a_i\sigma_i(m_i)}\Bigr) \leqslant$$
$$\leqslant C' \prod_{j\in J} \Bigl[\sum_{m\in M^{e_j}} u_j(m)\cdot\Bigl(\prod_{i\in e_j} h_i(m_i)\, e^{a_i^j\sigma_i(m_i)}\Bigr)\Bigr]^{\theta_j} \tag{16}$$

(M^{e_j} *— проекция* M *на* $\mathbf{R}^{e_j}$).

В частности,

$$\sum_{m\in \mathbf{N}^n} u(m)\Bigl(\prod_{i=1}^{n} m_i^{a_i-1}\Bigr) \leqslant$$
$$\leqslant C' \prod_{j\in J} \Bigl[\sum_{m\in \mathbf{N}^{e_j}} u_j(m)\Bigl(\prod_{i\in e_j} m_i^{a_i^j-1}\Bigr)\Bigr]^{\theta_j}. \tag{17}$$

Если для каждого $i \in \{1,\ldots,n\}$ *и* $j \in J$ $a_i \geqslant 1$, $a_i^j \geqslant 1$, *то в последнем неравенстве* $C' = C\prod_{i=1}^{n} a_i$, *где* C *— коэффициент в неравенстве* (1).

Доказательство. Чтобы воспользоваться неравенством (13), определим по функции σ_i, согласно формулы (12), функцию σ_{i,a_i}. Для простоты записи индекс i опускаем.

Понятно, что точками разрыва функции σ_a являются точки разрыва x_m функции σ. По формуле (12) находим скачок $h_a(m)$ функции σ_a в точке x_m

$$h_a(m) = \int_{\sigma(x_m-0)}^{\sigma(x_m+0)} e^{ax}\,dx = e^{a\sigma(x_m)}\,(e^{a\theta h(m)} - e^{-a\mu h(m)})/a. \tag{18}$$

Здесь $0 \leqslant \theta,\ \mu \leqslant 1,\ \theta + \mu = 1$, поскольку $\sigma(x_m - 0) \leqslant \sigma(x_m) \leqslant \sigma(x_m + 0)$.

Так как на любом ограниченном промежутке

$$0 < c_1 \leqslant (e^{\theta x} - e^{-\mu x})\,/\,x \leqslant c_2 < +\infty,$$

то $h_a(m) \asymp h(m)\, e^{a\sigma(x_m)}$. Заменив в неравенстве (13) меры $d\sigma_{i,a_i}(m_i) = h_{i,a_i}(m_i)$ эквивалентными $h_i(m_i)e^{a_i\sigma_i(m_i)}$, получим неравенство (16).

Для доказательства неравенства (17) положим $\sigma_i(x_i) = \ln[x_i]$, $x_i \geqslant 1$; снова индекс i далее опускаем. Нумеруя точки разрыва $x_m = m + 1$, $m \in \mathbf{N}$, имеем $\sigma(m) = \ln(m+1)$, $h(m) = \ln(m+1) - \ln m = \ln(1 +$

$+ 1/m) \asymp 1/m$. Скачки ограничены, следовательно, с выбранными функциями σ_i верно неравенство (16), которое с учетом равенства $e^{a\sigma(m)} = (m+1)^a \asymp m^a$, дает неравенство (17).

Осталось оценить коэффициент C' в неравенстве (17), когда a_i, $a_i^j \geqslant 1$. В этом случае доопределим функцию $\sigma(x) = \ln [x] = -\infty$ для $x \in (0, 1)$ и по-иному занумеруем точки разрыва: $x_m = m$, $m \in N$. Теперь $\sigma(m) = \ln m$, $h(m) = \ln m - \ln(m-1) = -\ln(1 - 1/m)$. По формуле (18)

$$h_a(m) = m^{a-1}(1 - (1 - 1/m)^a) / (am^{-1}).$$

Но при $a \geqslant 1$ и $x \in [0, 1]$

$$1 / a \leqslant (1 - (1 - x)^a) / (ax) \leqslant 1.$$

Следовательно, $a^{-1}m^{a-1} \leqslant h_a(m) \leqslant m^{a-1}$. Соответствующая замена мер в неравенстве (13) приведет к неравенству (17) с новым коэффициентом $C' = C\prod_{i=1}^n a_i$. Следствие доказано.

Пример 4. Пусть для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ $a_i \geqslant 1$, $\theta_i > 0$ и пусть $\sum_{i=0}^n \theta_i = 1$. Если для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $m \in N^n$ $0 \leqslant u(m) \leqslant u_i(m_i)$, то

$$\sum_{m\in\mathbf{N}^n} u(m)\left(\prod_{i=1}^n m_i^{a_i-1}\right) \leqslant$$
$$\leqslant n\prod_{i=1}^n a_i^{\theta_i}\left[\sum_{m=1}^\infty u_i(m)\, m^{a_i/\theta_i-1}\right]^{\theta_i}.$$

Достаточно учесть последнее следствие (утверждение о коэффициенте) и подсчитанное в примере 1 значение C для соответствующих семейств (e_i) и (a^i).

Саратовский государственный университет

Поступило 30.IV.1976

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Терехин А. П., Многопараметрическая полугруппа операторов, смешанные модули и частные приближения, Теория приближения функций, Труды Международной конференции по теории приближения функций, М., «Наука», 1977, 351—356.