А.С.Благовещенский

ОБРАТНАЯ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ЛЭМБА

§ I. Введение

В данной статье речь пойдет об обратной задаче распространения нестационарных упругих волн в слоисто-неоднородном изотропном полупространстве. Источником волн служит воздействие типа мгновенного вертикально направленного импульса, сосредоточенного в точке на границе полупространства. Такое воздействие порождает волны, обладающие осевой симметрией. Последнее обстоятельство существенно осложняет рассмотрение обратной задачи. Сходная задача решалась ранее в работах [I], [2], однако там осевая симметрия волнового поля была существенно нарушена.

Основными параметрами, характеризующими упругую среду, являются параметры Ламе $\lambda=\lambda(z)$, $\mu=\mu(z)$ и плотность $\rho(z)$. Мы будем предполагать в дальнейшем известными скорость распространения продольных волн $a(z)=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$. (Эта скорость при некоторых дополнительных предположениях может быть найдена с помощью решения кинематической обратной задачи, см. [3], [4]). Известной будем считать также функцию $\sigma(z)=a\rho$. Задача нахождения $\sigma(z)$ не сложна, её решение содержится в работах [I], [2]. Основной искомой функцией для нас будет $\gamma(z)=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\mu}$ – отношение продольной и поперечной скоростей. Так как параметры Ламе являются положительными функциями, то $\gamma(z)>\sqrt{2}$. Это последнее условие всегда ниже будет предполагаться.

Сформулируем точно задачу. Распространение волн описывается системой динамической теории упругости

$$\rho u_{tt}=\frac{\partial}{\partial z}\left((\lambda+2\mu)\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+$$
$$+\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial z\partial r}(\lambda r v)+\frac{\mu}{r}\frac{\partial^2}{\partial z\partial r}(r v) \qquad (I)$$
$$\rho v_{tt}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial z}\right)+(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v)\right)+$$
$$+\lambda\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}u+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial r}\right).$$

© А. С. Благовещенский, 1992

Здесь r, z – цилиндрические координаты, u и v – соответственно вертикальная и радиальная компоненты вектора смещений. Осевая симметрия задачи здесь означает, что а) решение не зависит от угловой переменной, б) отсутствует (равна нулю) угловая компонента вектора смещений. Среда предполагается покоившейся при $t<0$

$$u = v\Big|_{t<0} \equiv 0. \tag{2}$$

Ниже при всех модификациях задачи нулевые начальные условия всегда будут предполагаться, специально мы их, как правило, отмечать не будем. На границе $z=0$ имеют место граничные условия

$$\begin{gathered}(\lambda+2\mu)\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\lambda}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\,rv\right)\Big|_{z=+0}=\frac{\sqrt{\sigma(0)}}{2}\,\frac{\delta(r)}{r}\,\delta(t)\\ \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{z=+0}\equiv 0\,.\end{gathered} \tag{3}$$

Перейдем к преобразованию Фурье-Бесселя, введя вектор-функцию $\vec{W}=(U,V)$:

$$U=\int_0^\infty r\,J_0(kr)\,u(r,z,t)\,dr\,,\quad V=\int_0^\infty r\,J_1(kr)\,v(r,z,t)\,dr\,.$$

Здесь J_0, J_1 – функции Бесселя. Интегрирование реально, ввиду конечности скорости распространения волн, производится в конечных пределах.

Пусть при некотором $k>0$ заданы функции

$$f_1(t)=-2\sqrt{\sigma_0}\,U_t\Big|_{z=0}\,,\quad f_2=-2\sqrt{\sigma_0/\gamma_0}\,V_t\Big|_{z=0}\,. \tag{4}$$

Здесь σ_0, γ_0 – значения функций σ, γ при $z=0$, γ_0 считаем известным. Будем функции $\sigma(z)>0$, $d\sigma/dz$, $d^2\sigma/dz^2$, $a(z)>0$, da/dz, $f_1(t)$, $f_2(t)$, df_1/dt, df_2/dt предполагать ограниченными, $d^2\sigma/dz^2$, da/dz, df_1/dt, df_2/dt удовлетворяют условию Липшица (напишем его, например, для $d^2\sigma/dz^2$: $\left|\frac{d^2\sigma(z+\Delta z)}{dz^2}-\frac{d^2\sigma(z)}{dz^2}\right|<m|\Delta z|$). Решение $\gamma(z)$ ищется в классе дифференцируемых функций, причем $d\gamma/dz$ предполагается а) ограниченной фиксированной постоянной, б) липшицевой с заданной *apriori* константой, входящей в условие Липшица.

Устанавливается справедливость следующих результатов:
а) имеет место теорема единственноси, б) решение, если оно сущест-

вует, непрерывно зависит от данных задачи: малым изменениям в метрике C функций набора $\sigma(z), d\sigma/dz, \dots, df_2/dt$, не препятствующим существованию решения в выделенном классе, отвечают малые в метрике C изменения функции $d\gamma(z)/dz$, в) если постоянные, входящие в описание класса искомых функций не слишком малы, то справедлива теорема существования в малом, то-есть на интервале $[0, c]$ при достаточно малых $c > 0$.

Доказательство основано на использовании довольно специфических нелинейных интегральных уравнений, имеющих сходство с вольтерровскими уравнениями второго рода.

§ 2. Трансформация задачи

Введем вектор-функции $\vec{\Phi}$, $\vec{\Psi}$ определив их равенствами

$$\vec{\Phi} = K\vec{W}_t - R\vec{W}_z + \sigma K^{-1}\mathbb{D}\vec{W}, \quad \vec{\Psi} = K\vec{W}_t + R\vec{W}_z - \sigma K^{-1}\mathbb{D}\vec{W}.$$

Здесь K и R – диагональные матрицы 2×2,

$$K = diag\left[\sqrt{\sigma}, \sqrt{\sigma/\gamma}\right], \quad R = diag\left[a\sqrt{\sigma}, a/\gamma\sqrt{\sigma/\gamma}\right].$$

$\mathbb{D}$ определим как решение матричного уравнения Риккати

$$(\sigma\mathbb{D})'_z = \frac{\sigma K(\gamma^2-1)}{\gamma^2}\begin{pmatrix}0 & -\gamma^2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\mathbb{D} - \frac{\sigma}{a}\mathbb{D}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \gamma^2\end{pmatrix}\mathbb{D} + \begin{pmatrix}\frac{K^2 a\sigma}{\gamma^2}, & -\left(\frac{a\sigma(\gamma^2-2)}{\gamma^2}\right)'_z\\ K\left(\frac{a\sigma}{\gamma^2}\right)'_z, & K^2 a\sigma\end{pmatrix} \qquad (5)$$

удовлетворяющее условию

$$\mathbb{D}\Big|_{z=0} = K\begin{pmatrix}0, & -\frac{a_0(\gamma_0^2-2)}{\gamma_0^2}\\ \frac{a_0}{\gamma_0^2}, & 0\end{pmatrix}.$$

Введем также новые независимые переменные y, t_1:

$$y = y(z) = \int_0^z (\gamma(z)-1)(\gamma_0-1)^{-1}a(z)^{-1}dz, \quad t_1 = t + t(z),$$ где

$$t(z) = \int_0^z (\gamma-\gamma_0)(\gamma_0-1)^{-1}a^{-1}dz.$$

Переменные y и t_1 подобраны так, что скорости распространения волн, бегущих вправо по оси z равны после перехода к новым переменным постоянным единица и γ_0. Дифференцирование по t_1

будем обозначать точкой, по y - штрихом, t_1 будем называть временем (очевидно, это и есть время, только сдвинутое, величина сдвига зависит от точки z, при $z=0$ $t(z)=0$). Далее все рассмотрения будут вестись в координатах y, t_1, индекс 1 у t_1 будем в дальнейшем опускать.

Можно показать, что задача в терминах функций $\vec{\varphi}$, $\vec{\psi}$ в новых координатах приобретает вид

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_0\dot{\vec{\varphi}} + \vec{\varphi}' &= C\vec{\varphi} + S\vec{\psi} \\ -\Lambda_1\dot{\vec{\psi}} + \vec{\psi}' &= S\vec{\varphi} + C\vec{\varphi} \end{aligned}\right\} . \tag{6}$$

Здесь $\Lambda_0 = diag\,[1, \gamma_0]$, $\Lambda_1 = diag\,[2(\gamma_0-1)(\gamma-1)^{-1}, 2(\gamma_0-1)(\gamma-1)^{-1} + \gamma_0 - 2] = diag\,[\lambda_1, \lambda_2]$, $\lambda_2 = \lambda_1 + \gamma_0 - 1$; матрицы C, S определяются равенствами

$$C = \frac{\gamma^{1/2}}{2}(\gamma_0-1)\begin{pmatrix} 0, & -d_{12} \\ d_{21} & 0 \end{pmatrix} - \frac{ka(\gamma+1)(\gamma_0-1)}{2\gamma^{3/2}}\begin{pmatrix} 0, & \gamma \\ -1, & 0 \end{pmatrix}$$

$$S = \frac{a}{2}\,\frac{\gamma_0-1}{\gamma-1}\,\frac{\sigma'_z}{\sigma}\,E - \frac{1}{2}\,\frac{\gamma'_y}{\gamma}\begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} + \frac{\gamma_0-1}{\gamma-1}\,\cdot \tag{7}$$

$$\begin{pmatrix} d_{11}, & 1/2\,\gamma^{1/2}(\gamma+1)d_{12} \\ 1/2\,\gamma^{1/2}(\gamma+1)d_{21}, & \gamma^2 d_{22} \end{pmatrix} + \frac{ka(\gamma_0-1)(\gamma+1)}{2\gamma^{3/2}}\begin{pmatrix} 0, & \gamma \\ -1, & 0 \end{pmatrix}$$

E - единичная матрица, d_{ik} - элементы матрицы D. Отметим сразу важное обстоятельство: матрица S зависит от $\gamma' = \gamma'_y$. Поэтому роль неизвестного коэффициента системы будет в дальнейшем играть γ'. Под встречающейся многократно функцией $\gamma(y)$ мы будем всюду понимать результат применения к γ' интегрального оператора: $\gamma(y) = \int_0^y \gamma'(\eta)\,d\eta + \gamma_0$.

Граничные условия для $\vec{\varphi}$ и $\vec{\psi}$ имеют вид

$$\vec{\psi} - \vec{\varphi}\Big|_{z=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\sigma(t) \tag{8}$$

$$\vec{\varphi} + \vec{\psi}\Big|_{z=0} = f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} . \tag{9}$$

Очевидно, матрица D является решением интегрального уравнения

$$D(y) = \frac{\gamma_0-1}{\sigma(y)}\int_0^y \frac{ka(\eta)(\gamma(\eta)+1)\sigma(\eta)}{\gamma^2(\eta)}\begin{pmatrix} 0, & -\gamma^2 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} D(\eta)\,d\eta -$$

$$-\frac{\gamma_0-1}{\sigma(y)}\int_0^y \frac{\sigma(\eta)}{\gamma(\eta)-1}\mathbb{D}(\eta)\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & \gamma^2(\eta)\end{pmatrix}\mathbb{D}(\eta)\,d\eta +$$

$$+\frac{\gamma_0-1}{\sigma(y)}\int_0^y \frac{\kappa^2 a^2(\eta)\sigma(\eta)}{(\gamma(\eta)-1)\gamma^2(\eta)}\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & \gamma^2\end{pmatrix}d\eta+\frac{\kappa a(y)}{\gamma^2(y)}\begin{pmatrix}0, & \gamma^2-2\\ 1, & 0\end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Матрица $\mathbb{D}$, как можно увидеть из уравнения (10), зависит от неизвестной функции γ. Поэтому $\mathbb{D}$ - неизвестна, и уравнение (10) является одним из уравнений построенной ниже системы уравнений обратной задачи.

ЗАМЕЧАНИЕ. Вместо уравнения Риккати (5), можно рассмотреть линейную матричную систему

$$X'_z=(a\sigma)^{-1}\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & \gamma^2\end{pmatrix}Y, \qquad Y'_z=NX+\frac{\kappa(\gamma^2-1)}{\gamma^2}\begin{pmatrix}0, & \gamma^2\\ -1, & 0\end{pmatrix}Y,$$

$$N=\begin{pmatrix}\kappa^2 a\sigma\gamma^{-2}, & -\kappa(a\sigma(\gamma^2-2)\gamma^{-2})'_z\\ \kappa(a\sigma\gamma^{-2})'_z, & \kappa^2 a\sigma\end{pmatrix}$$

$$X\Big|_{z=0}=E, \quad Y\Big|_{z=0}=\kappa\begin{pmatrix}0, & -a\sigma(\gamma^2-2)\gamma^{-2}\\ a\sigma\gamma^{-2}, & 0\end{pmatrix}\Bigg|_{z=0}$$

и положить $\mathbb{D}=\sigma^{-1}YX^{-1}$.

§ 3. Сингулярности решения

Нетрудно проверить, что решение прямой задачи (6), (8) имеет следующую структуру:

$$\vec{\varphi}\equiv\vec{\psi}\equiv 0\Big|_{t<y} \qquad (11)$$

$$\vec{\varphi}=-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\delta(t-y)+\vec{a}^{(0)}\varepsilon(t-y)+\vec{a}^{(1)}(t-y)_+ +$$

$$+\vec{c}^{(0)}\varepsilon(t-\gamma_0 y)+\vec{c}^{(1)}(t-\gamma_0 y)_+ + \dots \qquad (12)$$

$$\vec{\psi}=\vec{b}^{(0)}\varepsilon(t-y)+\vec{b}^{(1)}(t-y)_+ + \vec{d}^{(1)}(t-\gamma_0 y)_+ + \dots \qquad (13)$$

Здесь $\mathcal{E}(s)$ – функция Хевисайда, $s_+ = s$ при $s > 0$, $s_+ = 0$ при $s < 0$, многоточием обозначены непрерывно дифференцируемые функции. Коэффициенты $\vec{a}^{(0)}, \vec{a}^{(1)}, \ldots \vec{d}^{(1)}$ являются функциями от y. Разложения (I2), (I3) легко доказываются с помощью интегральных уравнений прямой задачи (похожие уравнения, однако приспособленные для решения обратной задачи будут выписываться ниже). Для практического нахождения векторных коэффициентов $\vec{a}^{(i)}, \vec{b}^{(i)}, \vec{c}^{(i)}, \vec{d}^{(i)}$ удобно подставить разложения (I2), (I3) в систему (6) и граничное условие (8) и приравнять коэффициенты в членах, имеющих одинаковую сингулярность. В итоге получаем серию равенств

$$(\Lambda_0 - E)\vec{a}^{(0)} = -C\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \tag{I4$_1$}$$

$$-(\Lambda_1 + E)\vec{b}^{(0)} = -S\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \tag{I4$_2$}$$

$$(\Lambda_0 - E)\vec{a}^{(1)} + \vec{a}^{(0)\prime} = C\vec{a}^{(0)} + S\vec{b}^{(0)} \tag{I4$_3$}$$

$$-(\Lambda_1 + E)\vec{b}^{(1)} + \vec{b}^{(0)\prime} = S\vec{a}^{(0)} + C\vec{b}^{(0)} \tag{I4$_4$}$$

$$(\Lambda_0 - \gamma_0 E)\vec{c}^{(0)} = 0 \tag{I4$_5$}$$

$$(\Lambda_0 - \gamma_0 E)\vec{c}^{(1)} + \vec{c}^{(0)\prime} = C\vec{c}^{(0)} \tag{I4$_6$}$$

$$-(\Lambda_1 + \gamma_0 E)\vec{d}^{(1)} = S\vec{c}^{(0)}, \tag{I4$_7$}$$

из которых, с учетом граничных условий, находим

$$\vec{a}^{(0)} = \begin{pmatrix} \dfrac{a\sigma_z'}{4\sigma}\Big|_{z=0} + \displaystyle\int_0^y \left[-\frac{c_{12}c_{21}}{\gamma_0 - 1} + \frac{\gamma - 1}{\gamma_0 - 1}\left(\frac{s_{11}^2}{2} + \frac{s_{12}s_{21}}{\gamma + 1}\right)\right] d\eta \\ -(\gamma_0 - 1)^{-1} c_{21} \end{pmatrix} \tag{I5}$$

$$\vec{b}^{(0)} = \frac{\gamma - 1}{\gamma_0 - 1}\begin{pmatrix} 1/2 \cdot s_{11} \\ (\gamma+1)^{-1} \cdot s_{21} \end{pmatrix} \tag{I6}$$

$$\vec{b}^{(1)} = \frac{\gamma - 1}{(\gamma_0 - 1)^2}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{4}\left((\gamma - 1)s_{11}\right)' \\ (\gamma+1)^{-1}\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}s_{21}\right)' \end{pmatrix} - \right.$$

$$-\begin{pmatrix} \frac{\gamma_0-1}{2} s_{11} a_1^{(0)} - \frac{1}{2} s_{12} c_{21} + \frac{1}{2}\frac{\gamma-1}{\gamma+1} c_{12} s_{21} \\ \frac{\gamma_0-1}{\gamma+1} s_{21} a_1^{(0)} - \frac{s_{22} c_{21}}{\gamma+1} + \frac{\gamma-1}{2(\gamma+1)} c_{21} s_{11} \end{pmatrix} \tag{17}$$

$$\vec{c}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\kappa a_0 \gamma_0^{3/2} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Приведем также выражение для второй компоненты вектора $a^{(1)}$:

$$a_2^{(1)} = \frac{c_{21}'}{(\gamma_0-1)^2} + \frac{c_{21} a_1^{(0)}}{\gamma_0-1} + \frac{\gamma-1}{(\gamma_0-1)^2}\left(\frac{s_{21} s_{11}}{2} + \frac{s_{22} s_{21}}{\gamma+1}\right). \tag{19}$$

Для нас представляют интерес величины $\vec{b}_2^{(1)}$ и $\vec{a}_2^{(1)}$, поскольку они алгебраически зависят от γ'. Можно показать, что

$$\vec{a}_2^{(1)} = -2\kappa a \gamma' (\gamma_0-1)^{-1} \gamma^{-5/2} + r(\gamma),$$

$$\vec{b}_2^{(1)} = -2(\gamma-1)\kappa a \gamma' (\gamma_0-1)^{-1} (\gamma+1)^{-1} \gamma^{-5/2} + s(\gamma),$$

где $r(\gamma)$ и $s(\gamma)$ зависят от γ, а также от функций $\sigma(z)$, $a(z)$ и их производных. Последние две формулы перепишем в виде

$$\gamma' = -\frac{\gamma^{-5/2}(\gamma+1)(\gamma_0-1)}{2\kappa a(\gamma-1)} \dot{\psi}_2(y,y) + \tilde{r}(\gamma) \tag{20}$$

$$\dot{\varphi}_2(y,y) = -\frac{2\kappa a \gamma'}{(\gamma_0-1)\gamma^{5/2}} - s(\gamma). \tag{21}$$

Здесь, а также всюду ниже под $\dot{\varphi}_i(y,y)$, $\dot{\psi}_i(y,y)$ понимается предел соответствующей функции при $t \to y+0$.

§ 4. Основные интегральные уравнения обратной задачи

Продифференцируем каждое уравнение системы (6) по t. Ввиду того, что коэффициенты в (6) не зависят от t, функции $\vec{\varphi}$, $\vec{\psi}$ также удовлетворяют системе (6). Введем функции θ_i ($i=\overline{1,4}$), $\theta_i = y_0 \dot{\varphi}_i$ при $i=1,2$, $\theta_i = y_0 \dot{\psi}_{i-2}$ при $i=3,4$, где $y_0 > 0$ – некоторое фиксированное значение y. Проинтегрируем каждое из четырех уравнений системы (6) вдоль соот-

ветствующей характеристики от точки, лежащей на оси t или, быть может, на прямой $t = y$ до произвольной точки плоскости y, t $(t > y)$. В результате придем к системе интегральных уравнений

$$\theta_1(y,t)=\int_0^y \Big(c_{12}(\eta)\theta_2(\eta,t+\eta-y)+\sum_{j=1}^{2} s_{1j}(\eta)\theta_{j+2}(\eta,t+\eta-y)\Big)d\eta + \tag{22}$$

$$+\frac{y_0}{\gamma_0-1}\,\varepsilon\Big(y-\frac{t}{\gamma_0}\Big)\,c_{12}\Big(\frac{t-y}{\gamma_0-1}\Big)+\frac{1}{2}\dot{f}_1(t-y)\,y_0\,,$$

$$\theta_2(y,t)=\int_{(\gamma_0-1)^{-1}(\gamma_0 y-t)_+}^{y} \Big(c_{21}(\eta)\theta_1(\eta,t+\gamma_0(\eta-y)+\sum_{j=1}^{2} s_{2j}(\eta)\theta_{j+2}(\eta,t+\gamma_0(\eta-y))\Big)d\eta + \tag{23}$$

$$+\varepsilon(\gamma_0 y-t)\,\theta_2\Big(\frac{\gamma_0 y-t}{\gamma_0-1},\frac{\gamma_0 y-t}{\gamma_0-1}\Big)+\frac{y_0}{2}\,\varepsilon(t-\gamma_0 y)\,\dot{f}_2(t-\gamma_0 y)\,,$$

$$\theta_3(y,t)=\int_0^y\Big(\sum_{j=1}^{2} s_{1j}(\eta)\theta_j(\eta,t+\int_\eta^y \lambda_1(\eta_1)\,d\eta_1)+$$

$$+c_{12}(\eta)\,\theta_4(\eta,t+\int_\eta^y \lambda_1(\eta_1)\,d\eta_1)\Big)\,d\eta + \tag{24}$$

$$+\varepsilon(\gamma_0 y-t)\,s_{12}(y^*)\,\frac{2\kappa a_0\gamma_0^{-3/2}y_0(\gamma(y^*)-1)}{(\gamma_0-1)(\gamma(y^*)+1)}+\frac{y_0}{2}\,\dot{f}_1\Big(t+\int_0^y \lambda_1(\eta)\,d\eta\Big),$$

$$\theta_4(y,t)=\int_0^y\Big(\sum_{j=1}^{2} s_{2j}(\eta)\theta_j(\eta,t+\int_\eta^y \lambda_2(\eta_1)\,d\eta_1)+$$

$$+c_{21}(\eta)\,\theta_3(\eta,t+\int_\eta^y \lambda_2(\eta_1)\,d\eta_1)\Big)\,d\eta + \tag{25}$$

$$+\varepsilon(\gamma_0 y-t)\,s_{22}(y^{**})\,\frac{\kappa a_0\gamma_0^{-3/2}y_0(\gamma(y^{**})-1)}{(\gamma_0-1)\gamma(y^{**})}+\frac{y_0}{2}\,\dot{f}_2\Big(t+\int_0^y \lambda_2(\eta)\,d\eta\Big).$$

Необходимые комментарии к уравнениям (22)-(25):

I. Эти уравнения имеют существенно различный вид в зависимости от знака $t-\gamma_0 y$ (от того, находится точка y, t выше (см. рис.Iа) или ниже (рис.Iб) характеристики $t=\gamma_0 y$) .

2. Функции $\theta_i(y,t)$ с точностью до множителя y_0 совпадают с $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$, $\dot{\psi}_1$, $\dot{\psi}_2$; $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\psi}_1$, $\dot{\psi}_2$ являются производными по t от φ_1, ψ_1, ψ_2. Функция φ_2 имеет скачок на характеристике $t=\gamma_0 y$, производная от φ_2 по t имеет

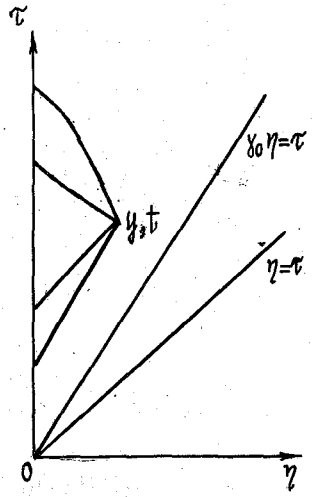

Рис.Iа

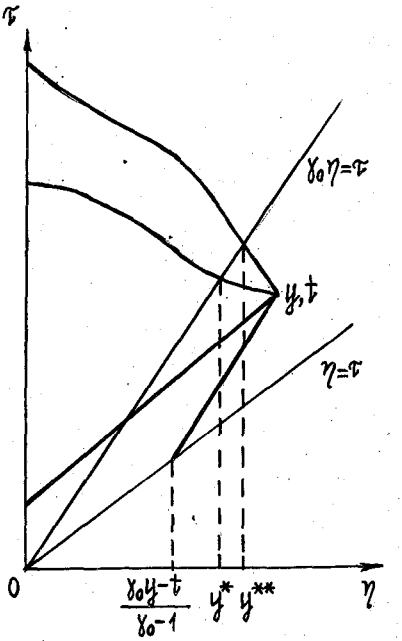

Рис.Iб

δ - образную особенность при $t=\gamma_0 y$:

$\partial\varphi_2/\partial t=2\kappa a_0\gamma_0^{-3/2}\delta(t-\gamma_0 y)+\dot{\varphi}_2(t,y)$, где $\dot{\varphi}_2(t,y)$ - кусочно непрерывная функция (непрерывная при $y<t<\gamma_0 y$ и при $t>\gamma_0 y$). Эта функция и фигурирует в уравнениях (22)-(25). Вклад от δ - образного слагаемого выделен в них явно, он присутствует в уравнениях (22), (24), (25) при $t<\gamma_0 y$ (внеинтегральные члены с множителем $\varepsilon(\gamma_0 y-t)$).

3. В уравнении (23) начальная точка интегрирования, в зависимости от знака $(\gamma_0 y-t)$, лежит на характеристике $t=y$ или на оси t . В соответствии с этим в уравнении (23) присутствуют члены различной природы (известная функция f_2 с множителем $\varepsilon(t-\gamma_0 y)$ или значение θ_2 при $t=y$, выражающееся с помощью формулы (2I) через коэффициенты уравнения (6).

4. В уравнениях (24), (25) участвуют величины y^* , y^{**} - координаты точек пересечения характеристик, отвечающих волнам, бегущим влево (вдоль этих характеристик ведется интегрирование в указанных уравнениях) с характеристикой $t=\gamma_0 y$ - носителем δ - образной особенности $\partial\varphi_2/\partial t$; y^*, y^{**}

являются корнями соответственно уравнений относительно τ

$$t+\int_{\eta}^{y}\lambda_1(\eta_1)\,d\eta_1-\gamma_0\eta=0,\qquad t+\int_{\eta}^{y}\lambda_2(\eta_1)\,d\eta_1-\gamma_0\eta=0. \tag{26}$$

Итак, основная система интегральных уравнений состоит из матричного интегрального уравнения (I0), уравнения (20), в котором вместо $\dot{\psi}_2(y,y)=y_0^{-1}\theta_4(y,y)$ подставлено его выражение из (25), и уравнений (22)-(25). Неизвестными являются функция $\gamma'(y)$, матрица-функция $D(y)$ и функции $\theta_i(y,t)$ $(i=1,\dots 4,\ t\geq y)$.

Систему (I0),(20),(22)-(25) запишем в абстрактной форме. Рассмотрим область на плоскости переменных y,t : Δ_c - треугольник, ограниченный отрезками оси t, характеристики $t=y$ системы (6) и прямой $t=-\lambda_0(y-c)+c$, где $\lambda_0\geq \max\lambda_2(y)$. Очевидно, что в силу условия $\gamma>\sqrt{2}$

$$\lambda_2(y)=\gamma_0-2+\frac{2(\gamma_0-1)}{\gamma-1}<\gamma_0-2+\frac{2(\gamma_0-1)}{\sqrt{2}-1}=\gamma_0(2\sqrt{2}+3)-2\sqrt{2}-4\approx 5{,}8284\gamma_0-6{,}8284$$

последнюю величину можно выбрать в качестве λ_0. Область Δ_c выбрана так, что любая характеристика системы (6), вдоль которой ведется интегрирование в системе (22)-(25) для любой точки $y,t\in\Delta_c$ целиком принадлежит Δ_c.

Введем функциональное пространство Φ_c, элементами которого являются тройки $X=\{D(y),\gamma'(y),\vec{\theta}(y,t)\}$, где $D(y)$ - матрица-функция размерности 2x2, $D(y)$ и функция $\gamma'(y)$ определены и непрерывны при $y\in[0,c]$, четырехмерная вектор-функция $\vec{\theta}(y,t)\in\mathbb{R}^4$ определена и непрерывна при $y,t\in\Delta_c$ всюду, кроме прямой $t=\gamma_0 y$, где они могут иметь особенность типа скачка первого рода. Введем норму в Φ_c, положив

$$\|X\|=\max\Big(\max_{y\in[0,c],\,i,k=1,2}(|d_{ik}(y)|,|\gamma'(y)|),\ \max_{i=\overline{1,4},\,y,t\in\Delta_c}|\theta_i(y,t)|\Big).$$

Очевидно, что система (I0),(20),(22)-(25) может быть записана в виде

$$X=AX. \tag{27}$$

где A - нелинейный оператор $A:\Phi_c\to\Phi_c$.

§ 5. Свойства системы (27)

Укажем на ряд особенностей системы (27), некоторые из этих особенностей столь существенны, что даже квалификация системы (27) как системы интегральных уравнений возможна с некоторой натяжкой, несмотря на внешнее сходство.

Начнем с самой простой части системы (27): матричного уравнения (10). Оно имеет вид

$$\mathbb{D}(y)=\int_0^y \mathcal{F}_1(y,a,\sigma,\gamma(\eta),\mathbb{D}(\eta))\,d\eta+\mathcal{F}_2(a,\sigma,\gamma).$$

Напомним, что под $\gamma(y)$ всюду понимается выражение $\gamma_0+\int_0^y \gamma'(\eta)\,d\eta$. Обратим внимание, что функции a и σ предполагаются известными, но известными как функции координаты z, а не y. Связь между z и y устанавливается с помощью формулы $z=\tau^{-1}\left(\int_0^y(\gamma_0-1)(\gamma-1)^{-1}d\eta\right)=z(y)$, где τ^{-1} – функция, обратная к $\tau(z)=\int_0^z a^{-1}(z)\,dz$. Поэтому под a (аналогично – под σ) следует понимать $a(z(\eta))$ или $a(z(y))$. Отметим, что последнее замечание относится и к другим уравнениям системы (27).

Предположение о дифференцируемости функций $a(z)$ и $\sigma(z)$, ограниченности $\mathbb{D}(y)$ и ограниченности $\gamma(y)$ как сверху, так и снизу (постоянной $\sqrt{a}$), приводит к выполнению стандартных для вольтерровских интегральных уравнений оценок

$$\Big|\int_0^y\big(\mathcal{F}_1(y,a(z(\eta)),\sigma(z(\eta)),\gamma(\eta),\mathbb{D}(\eta))-\mathcal{F}_1(y,a(\tilde z(\eta)),\sigma(\tilde z(\eta)),\tilde\gamma(\eta),\mathbb{D}(\eta))\big)\,d\eta+$$

$$+\mathcal{F}_2(a(z(y)),\sigma(z(y)),\gamma(y))-\mathcal{F}_2(a(\tilde z(y)),\sigma(\tilde z(y)),\tilde\gamma(y))\Big|\leqslant$$

$$\leqslant My\max_{i,k,\eta}\left(|\gamma'(\eta)-\tilde\gamma'(\eta)|,\,|d_{ik}(\eta)-\tilde d_{ik}(\eta)|\right).$$

Более существенной особенностью системы (27) является то, что в уравнениях (20),(22)-(25) интегрирование производится вдоль кривых, которые сами зависят от неизвестной функции γ. Размер статьи не позволяет полностью проводить все оценки, поэтому рассмотрим систему уравнений, в которой эта ситуация моделируется.

Пусть рассматривается система уравнений

$$\varphi(y,t)=\int_0^y a(\eta)\varphi(\eta,t+\int_\eta^y \lambda(\eta_1)d\eta_1)\,d\eta+f(t+\int_0^y \lambda(\eta_1)d\eta_1) \tag{28}$$

$$\lambda(y)=\int_0^y a(\eta)\varphi(\eta,y+\int_\eta^y \lambda(\eta_1)d\eta_1)\,d\eta+f(y+\int_0^y \lambda(\eta_1)d\eta_1)\,. \tag{29}$$

Здесь $y\in[0,c]$, $y,t\in\Delta_c$. Функции $\varphi(y,t)$ и $\lambda(y)$ неизвестны, $a(y)$ и $f(t)$ заданы, a – непрерывна, f – липшицева. Легко проверить, что система (28),(29) построена аналогично системе (20),(22)-(25) применительно к обратной задаче для системы дифференциальных уравнений

$$\psi_t+\psi_y=0$$

$$-\lambda(y)\varphi_t+\varphi_y=a\varphi+b\psi$$

при условиях

$$\psi\Big|_{y=0}=-\sigma(t),\quad \varphi\Big|_{y=0}=f(t),\quad \varphi=\psi\Big|_{t=0}\equiv 0$$

$-1<\lambda<\lambda_0$, $b=\lambda^2+\lambda$. Пространство Φ_c применительно к рассматриваемому случаю – пространство пар непрерывных функций $X=\{\varphi(y,t),\lambda(y)\}$ с нормой

$$\|X\|=\max\Big(\max_{y,t\in\Delta_c}|\varphi(y,t)|,\ \max_{y\in[0,c]}|\lambda(y)|\Big).$$

Система (28),(29) может быть записана в виде $X=AX$. Относительно заданных функций $f(t)$, $a(y)$ предполагаем

$$|f(t)|<m_1,\ \min f(t)>-1,\ |a(y)|<m_1,\ |f(t+\Delta t)-f(t)|<m_2(\Delta t).$$

Выделим в Φ_c компакт K – множество пар функций X таких, что

$$\|X\|\leqslant M_1,\ -1\leqslant\lambda(y)\leqslant\lambda_0,\ |\varphi(y,t_1)-\varphi(y,t_2)|\leqslant M_2|t_1-t_2|.$$

Легко проверить, что при достаточно малых $c>0$ оператор A переводит K в K. Проверим, что сужение $A|_K$ является при достаточно малых c сжимающим оператором. Пусть $X=(\varphi,\lambda)$ и $\tilde X=(\tilde\varphi,\tilde\lambda)\in K$. Оценим первую компоненту $AX-A\tilde X$:

$$\Big| \int_0^y a(\eta)(\varphi(\eta,t+\int_\eta^y \lambda(\eta_1)d\eta_1) - \tilde{\varphi}(\eta,t+\int_\eta^y \tilde{\lambda}(\eta_1)d\eta_1))\,d\eta +$$

$$+ f(t+\int_0^y (\lambda(\eta_1)d\eta_1) - f(t+\int_0^y \tilde{\lambda}(\eta_1)\,d\eta_1)\Big| \leq$$

$$\leq m_1 \int_0^y (|\varphi(\eta,t+\int_\eta^y \lambda(\eta_1)\,d\eta_1) - \varphi(\eta,t+\int_\eta^y \tilde{\lambda}(\eta_1)d\eta_1)| + |\varphi(\eta,t+\int_\eta^y \tilde{\lambda}(\eta_1)\,d\eta_1) -$$

$$- \tilde{\varphi}(\eta,t+\int_\eta^y \tilde{\lambda}(\eta_1)d\eta_1)|)\,d\eta + |f(t+\int_0^y \lambda(\eta_1)\,d\eta_1) - f(t+\int_0^y \tilde{\lambda}(\eta_1)\,d\eta_1)| \leq$$

$$\leq m_1 M_2 \int_0^y d\eta \int_\eta^y |\lambda(\eta_1) - \tilde{\lambda}(\eta_1)|\,d\eta_1 + m_1 \max_{y,t} |\varphi(y,t) - \tilde{\varphi}(y,t)| +$$

$$+ m_2 \int_0^y |\lambda(\eta_1) - \tilde{\lambda}(\eta_1)|\,d\eta_1 \leq (m_1 M_2 y^2 2^{-1} + m_2 y + m_1 y)\,\| X - \tilde{X} \| .$$

Аналогично оценивается вторая компонента $AX - A\tilde{X}$, откуда при $X,\ \tilde{X} \in K$ $\| AX - A\tilde{X} \| \leq \alpha \| X - \tilde{X} \|$, где $\alpha = m_1 M_2 c^2 2^{-1} + (m_1 + m_2)\,c$. Очевидно, что если $c < (m_1 M_2)^{-1} (\sqrt{(m_1+m_2)^2 + 2 m_1 M_2} - m_1 - m_2)$, то $\alpha < 1$.

Из фактов инвариантности K относительно применения A, замкнутости K, а также того, что $A|_K$ есть оператор сжатия вытекает теорема существования и единственности решения в классе K, непрерывная зависимость решения от функций $a(y)$ и $f(t)$. Сходные, хотя и более громоздкие рассмотрения применимы и в случае системы (27). Укажем на одно обстоятельство, существенно усложняющее изучение этой системы.

§ 6. Исследование внеинтегральных членов

Упомянутое выше обстоятельство связано с присутствием в правых частях уравнений (20),(22)-(25) внеинтегральных членов. Эти внеинтегральные члены в уравнениях (24),(25) содержат значения искомых функций в точках y^* и y^{**}. Отметим, что y^* и y^{**} являются функциями от y и t, в (20) входит фактически значение y^{**} при $t = y$. Величины y^* и y^{**} являются корнями уравнений (26), которые запишем в виде

$$\eta = \eta - \varkappa \chi_k(\eta), \tag{30}$$

где $\chi_k(\eta) = \gamma_0 \eta - t - \int_\eta^y \lambda_k(\eta_1)\, d\eta_1$, $k=1$ если ищется y^*, $k=2$, если - y^{**}. Рассмотрим, например, случай $k=1$. Производная от правой части в (30) в этом случае есть $1-\varkappa(\gamma_0-1)(2(\gamma-1)^{-1}+1)$. Очевидны неравенства

$$1-\varkappa(\gamma_0-1)(2(\sqrt{2}-1)^{-1}+1) \leqslant 1-\varkappa(\gamma_0-1)(2(\gamma-1)^{-1}+1) \leqslant 1-\varkappa(\gamma_0-1).$$

Требуем, чтобы постоянные, стоящие в этих оценках справа и слева совпадали по модулю, откуда $\varkappa^* = (1-\sqrt{2}/2)(\gamma_0-1)^{-1}$ и $|1-\varkappa^*\chi_1'(\eta)| \leqslant \alpha^* = 1-\varkappa^*(\gamma_0-1) = \sqrt{2}/2 \approx 0.707$. Аналогичные оценки в случае $k=2$ дают $\varkappa^{**} = (3-\sqrt{2})(7(\gamma_0-1))^{-1}$, $|1-\varkappa^{**}\chi_2'(\eta)| \leqslant \alpha^{**} = (1+2\sqrt{2})\cdot 7^{-1} \approx 0.547$. Отсюда легко получаем, что разность решений уравнений (26), соответствующих различным оценивается при $y, t \in \Delta_c$

$$|\tilde{y}^* - y^*| \leqslant 5.829\, c^2 \max_{\eta\in[0,c]} |\gamma'(\eta) - \tilde{\gamma}'(\eta)|$$

$$|\tilde{y}^{**} - y^{**}| \leqslant 2.186\, c^2 \max_{\eta\in[0,c]} |\gamma'(\eta) - \tilde{\gamma}'(\eta)|.$$

Аналогично проверяются липшицевы оценки для функций $y^*(y,t)$, $y^{**}(y,t)$:

$$|y^*(\tilde{y},\tilde{t}) - y^*(y,t)| \leqslant \left|\frac{\tilde{t}-t}{\gamma_0-1} + (\tilde{y}-y)\left(\frac{2}{\gamma_{cp}-1} - \frac{1}{\gamma_0-1}\right)\right|$$

$$|y^{**}(\tilde{y},\tilde{t}) - y^{**}(y,t)| \leqslant \left|\frac{\tilde{t}-t}{2(\gamma_0-1)} - (\tilde{y}-y)\left(\frac{1}{\gamma_{cp}-1} - \frac{1}{2(\gamma_0-1)} + \frac{1}{2}\right)\right|$$

$$|y^{**}(\tilde{y},\tilde{y}) - y^{**}(y,y)| \leqslant |\tilde{y}-y|\left(\frac{1}{\gamma_{cp}-1} + \frac{1}{2}\right)$$

γ_{cp} - значение $\gamma(y)$ в некоторой точке между $\tilde{y}$ и y. Отметим также легко проверяемую оценку

$$y^{**}(y,y) < q_0 y_2, \quad q_0 = (2+\sqrt{2})/4 \approx 0.8536. \tag{31}$$

В правой части системы (27) присутствуют значения γ' в точках $y^{**}(y,y)$ (в уравнении (20)), $(\gamma_0 y - t)(\gamma_0 - 1)^{-1}$ (в уравнении (23)) и в точке $y^{**}(y,t)$ – в уравнении (25). Коэффициент при γ' в этих точках есть соответственно

$$\frac{a_0}{4\gamma_0^{3/2}} \left.\frac{\gamma^{5/2}(\eta)(\gamma(\eta)+1)}{(\gamma(\eta)-1)\,a(\eta)}\right|_{\eta=y} \cdot \left.\frac{\gamma(\eta)-1}{\gamma^2(\eta)}\right|_{\eta=y^{**}(y,y)} \tag{32}$$

$$-2(\gamma_0-1)^{-1} k y_0\, a(\eta)\gamma^{-1}(\eta)\Big|_{\eta=(\gamma_0 y_0 - t)(\gamma_0-1)^{-1}} \tag{33}$$

$$-\frac{k a_0 y_0}{2(\gamma_0-1)\gamma_0^{3/2}} \cdot \left.\frac{\gamma(\eta)-1}{\gamma^2(\eta)}\right|_{\eta=y^{**}(y,t)} . \tag{34}$$

Заметим, что коэффициент (32) при $y \to 0$ стремится к $(\gamma_0+1)(4\gamma_0)^{-1} < 0.427$. Поэтому, учитывая непрерывность функций a и γ, можно гарантировать, что при некотором $c > 0$ при $y \in (0,c)$ коэффициент (32) оценивается постоянной, меньшей единицы. Выражения (33), (34) также могут быть сделаны сколь угодно малыми за счет выбора постоянных k или y_0.

§ 7. Основные результаты

Используя приведенные выше оценки, проведя рассмотрения, аналогичные выполненным в модельной ситуации, можно придти к следующим результатам.

Пусть функции σ''_{zz}, a'_z, $\dot{f}_1$, $\dot{f}_2$ удовлетворяют условию Липшица. Будем искать решение системы (27) в множестве $\mathcal{K}$ пространства Φ_c а) функций, ограниченных фиксированной константой, таких, что б) γ' удовлетворяет условию Липшица с фиксированной константой, в) функции θ_i ($i=\overline{1,4}$) удовлетворяют при $t > \gamma_0 y$ и $t < \gamma_0 y$ условию Липшица с фиксированной константой, г) функция $\gamma(y) = \gamma_0 + \int_0^y \gamma'(\eta)\,d\eta$ ограничена снизу постоянной $\sqrt{2}$. Тогда при подходящем соотношении между постоянными, входящими в описание класса $\mathcal{K}$, класса заданных функций и достаточно малом c оператор $A|_{\mathcal{K}}$ является оператором сжатия. Следовательно, имеют место теоремы существования и единственности в классе $\mathcal{K}$ и непрерывной зависимости решения от данных задачи.

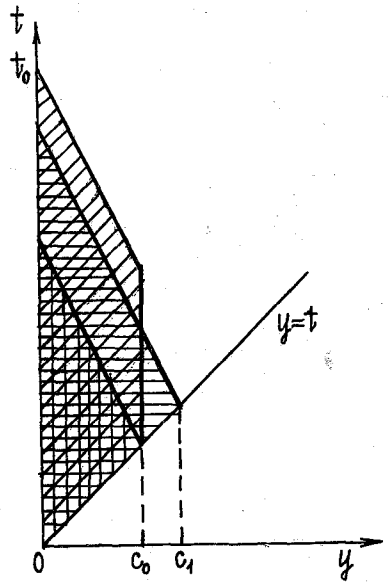

Рис.2. Вертикальной штриховкой обозначена область Δ_{c_0}, горизонтальной Δ_{c_1}, наклонной – $\Omega_{c_0 t_0}$.

Пусть уравнение (27) решено, функции $\mathcal{D}$, γ' найдены при $y \in (0, c_0)$. Рассмотрим систему уравнений (22)-(25) в области $\Omega_{t_0, c_0} = \{y, t: y < t < t_0 - \lambda_0 y\}$ ($t_0 > c_0 + \lambda_0 c_0$). При известных $\mathcal{D}$, γ' это система линейных вольтерровских интегральных уравнений второго рода. Решив ее, найдем функции θ_i ($i=\overline{1,4}$) в Ω_{t_0, c_0} (см.рис.2). Следующим шагом рассмотрим систему (27) при $y \in [0, c_1]$, $(y,t) \in \Delta_{c_1}$ ($c_1 > c_0$). Система (27) удовлетворяется автоматически, если $y \in (0, c_0)$, $(y,t) \in \Omega_{c_0} \cap \Delta_{c_1}$. Если $y \in (c_0, c_1)$, $(y,t) \in \Delta_{c_1} \setminus \Omega_{c_0}$, то все входящие в (27) интегралы запишем в виде $\int_0^y = \int_0^{c_0} + \int_{c_0}^y$, причем в интегралах $\int_0^{c_0}$ все подинтегральные функции являются известными, известны также внеинтегральные члены, если $y^*(y,t) < c_0$, $y^{**}(y,t) < c_0$ и т.д. Неизвестными являются значения функций при $y \in (c_0, c_1]$, $(y,t) \in \Delta_{c_1} \setminus \Omega_{c_0}$. В итоге приходим к системе интегральных уравнений относительно $\mathcal{D}(y)$, $\gamma'(y)$ $(y \in (c_0, c_1])$, $\theta_i(y,t)$ $(y,t \in \Delta_{c_1} \setminus \Omega_{c_0, t_0})$. Отметим, что из оценки (31) легко вывести, что при $c_1 \leqslant 4c_0(2+\sqrt{2})^{-1} = 2(2-\sqrt{2})c_0 \approx 1.172 c_0$ все точки $y^*(y,t)$, $y^{**}(y,t)$, $y^{**}(y,y)$, $(t-y)(\gamma_0-1)^{-1}$ лежат левее c_0. Это означает, что реально получившаяся система существенно проще системы (27)(единственный внеинтегральный член в правой части (27), включающий неизвестную функцию, содержится в уравнении (23), при этом точка, в которой следует вычислять этот внеинтегральный член, не зависит от неиз-

вестных функций). Решив последнюю систему, найдем $\gamma'(y)$ и $D(y)$ при $y \in (c_0, c_1]$, после чего можно повторять указанную процедуру, находя последовательно искомые функции при $y \in [0, c_2] \supset [0, c_1]$, $[0, c_3] \supset [0, c_2]$ и т.д.

Замечание. По сути дела, тот же способ решения обратной задачи при $y \in [c_0, c_1]$ можно изложить так: Найденные на предыдущем шаге значения $\theta_i \big|_{y=c_0}$ будем рассматривать как новые данные обратной задачи для области $y > c_0$. Проинтегрировав систему (6) вдоль соответствующих характеристик, взяв в качестве начальной точки интегрирования $y = c_0$ (или, в аналоге уравнения (23), точку на характеристике $y = t$) и использовав (20) и (21), получим систему интегральных уравнений обратной задачи, совпадающую с описанной выше.

Тем самым устанавливаются теоремы единственности и непрерывной зависимости решения от данных задачи "в большом" (на любую конечную глубину) в классе липшицевых функций. Теорема существования таким способом доказывается лишь в малом: при движении шагами оценочные константы для пересчитанных при $y = c_0$, $y = c_1$ и т.д. данных обратной задачи могут расти, что приводит к сжиманию возможных шагов $c_1 - c_0$, $c_0 - c_1$ и т.д.

Отметим в заключение, что близкие по своим свойствам к системе (27) интегральные уравнения возникали при изучении обратной задачи акустики движущейся среды [5].

Литература

1. А л е к с е е в А.С. Некоторые обратные задачи теории распространения волн. ИАН СССР, сер.геофиз., 1962, № 11, с.1514--1531.
2. Б л а г о в е щ е н с к и й А.С. Об обратной задаче теории распространения сейсмических волн. - В кн.: Проблемы математической физики. Л., 1966, вып.1, с.68-81.
3. H e r g l o t z G. Über die Elastizität der Erde bei Berücksichtigung ihrer variablen Dichte. Zeitschr.für Math. und Phys., 52, N 3, 1905, p.275-299.
4. Г е р в е р М.Л., М а р к у ш е в и ч В.М. Определение по годографу скорости распространения сейсмической волны. - В кн.: Методы и проблемы для анализа сейсмических наблюдений. М., 1967, с.3-51.
5. Б л а г о в е щ е н с к и й А.С. Обратные задачи акустики в движущейся среде.-В кн.:Пробл.мат.физ., в.11,Л.,1986,с.46-58.