В. А. Кофанов, О наилучшем равномерном приближении дифференцируемых функций алгебраическими многочленами, *Матем. заметки*, 1980, том 27, выпуск 3, 381–390

https://www.mathnet.ru/mzm6522

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 27, № 3 (1980)

О НАИЛУЧШЕМ РАВНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

В. А. Кофанов

Пусть функция f задана на отрезке $[a, b]$. По определению $f \in W^r H^{\omega}_{[a,b]}$ $(r = 0, 1, 2, \ldots)$, если $f^{(r)} \in C_{[a,b]}$ $(f^{(0)} = f)$ и

$$\forall\, x_1,\ x_2 \in [a, b] \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \omega(|x_1 - x_2|),$$

где ω — заданный модуль непрерывности. Вместо $W^0 H^{\omega}[a, b]$ будем писать $H^{\omega}[a, b]$.

Аналогично определяется класс $W^r_* H^{\omega}$ $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ 2π-периодических функций f. Через $W^{r+1}_{[a,b]}K$ $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ будем обозначать класс функций f, заданных на отрезке $[a, b]$, r-я производная которых абсолютно непрерывна, а $(r + 1)$-я производная ограничена в метрике M числом K, т. е.

$$\sup_{a\leqslant x\leqslant b} \operatorname{vrai} |f^{(r+1)}(x)| \leqslant K.$$

Аналогично определяется класс $W^{r+1}_* K$ 2π-периодических функций. Очевидно, что $W^{r+1}_* K = W^r_* H^{\omega}$ и $W^{r+1}_{[a,b]} K = W^r H^{\omega}_{[a,b]}$, если $\omega(t) = Kt$.

Пусть $E_n(f)_{C_{[a,b]}}$ обозначает наилучшее равномерное приближение функции f, заданной на отрезке $[a, b]$, алгебраическими многочленами степени не выше n, а $E^*_n(f)_C$ наилучшее равномерное приближение 2π-периодической функции f тригонометрическими полиномами степени не выше $n - 1$.

Пусть, далее,

$$E_n(W^r H^{\omega}_{[a,\, b]})_C = \sup_{f \in W^r H^{\omega}_{[a,\, b]}} E_n(f)_{C[a,\, b]}$$

и

$$E_n^*(W_*^r H^{\omega})_C = \sup_{f \in W_*^r H^{\omega}} E_n(f)_C.$$

Нам понадобятся также стандартные функции $f_{n,\, r}$ и $\Phi_{a,\, r}$, введенные в работах [1], [2].

$f_{n,\, 0}$ — нечетная $2\pi/n$-периодическая функция, определенная на $[0,\ \pi/n]$ равенствами

$$f_{n,\, 0}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,\omega(2t), & 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2n}, \\ \frac{1}{2}\,\omega\left(\frac{2\pi}{n} - 2t\right), & \frac{2\pi}{n} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{n}, \end{cases}$$

а $f_{n,\, r}$ r-й $\frac{2\pi}{n}$-периодический интеграл от $f_{n,\, 0}$ со средним значением на периоде, равным нулю.

Пусть $a > 0$,

$$\Phi_{a,\, 0}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leqslant x < a, \\ 0, & x \geqslant a, \end{cases}$$

$$\Phi_{a,\, r}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^{a-x} \Phi_{a,\, r-1}(t)\,\mathrm{d}t, & 0 \leqslant x < a, \\ 0, & x \geqslant a,\ r = 1, 2, 3, \ldots \end{cases} \qquad (1)$$

Отметим некоторые свойства функции $\Phi_{a,\, r}$, вытекающие непосредственно из определения, и используемые в дальнейшем:

1) $\forall x \in [0,\ a)\quad \forall r \geqslant 1\quad \Phi_{a,\, r}(x) > 0,\quad \Phi_{a,\, r}(a) = 0;$

2) $\forall x \in (0,\ a)\quad \forall r \geqslant 2\quad \Phi'_{a,\, r}(x) = -\frac{1}{2}\,\Phi_{a,\, r-1}(x) =$
$= -\frac{1}{4}\int_0^{a-x} \Phi_{a,\, r-2}(t)\,\mathrm{d}t;$

3) $\forall x \in (0,\ a)\quad \forall r \geqslant 1\ \frac{\partial}{\partial a}\Phi_{a,\, r}(x) > 0,$
$\frac{\partial}{\partial a}\Phi_{a,\, r}(a-) > 0;$

4) $\forall r \geqslant 1\ \frac{\partial}{\partial a}\Phi_{a,r}(x)$ убывает по $x \in (0, a)$;

5) $\Phi_{a,r}(x)$ является многочленом вида $\sum_{i+j=r}\alpha_{ij}a^i x^j$ при $x < a$, причем $\alpha_{r,0} > 0$, так как $\Phi_{a,r}(0) > 0$.

С. Н. Бернштейном в работе [3] доказано асимптотическое равенство величин $E_n(W^r H^{\omega}_{[-1,1]})_C$ и $E_n^*(W_*^r H^{\omega})_C$ для $\omega(t) = t^{\alpha}$, $0 < \alpha \leqslant 1$. В частности,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{r+1}E_n(W^{r+1}_{[-1,1]}K) = K\cdot K_{r+1}, \tag{2}$$

где $K_r = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}}$ — константы Фавара.

Для $r = 0, 1, 2$ и выпуклого вверх модуля непрерывности ω асимптотическое равенство величин $E_n(W^r H^{\omega}_{[-1,1]})_C$ и $E_n(W_*^r H^{\omega})_C$ установил А. И. Половина [4]. В работе [5] получена следующая оценка снизу:

$$E_n(W^r H^{\omega}_{[-1,1]})_C \geqslant \| f_{n+1,r}\|_C(1-\varepsilon_n) \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

где $\varepsilon_n = O(1/\ln n)$, а ω — выпуклый вверх модуль непрерывности.

В настоящей заметке методом промежуточного приближения доказывается

ТЕОРЕМА. *Пусть ω — выпуклый вверх модуль непрерывности* [1]). *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{E_n(W^r H^{\omega}_{[-1,1]})_C}{\| f_{n,r}\|_C} = 1 \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

При доказательстве этой теоремы используется нижеследующая лемма. Прежде чем ее сформулировать, введем следующие обозначения:

$$f_r(a, K) = \int_0^a \Phi_{a,r}(t)\,[\omega'(t) - K]^{\cdot} dt,$$

$$f_r(K) = \max_{0\leqslant a\leqslant\pi} f_r(a, K) \qquad (0 \leqslant K < \infty).$$

1) Всюду в дальнейшем считаем это условие выполненным.

ЛЕММА [1]. *Фиксируем* $r = 0, 1, 2, \ldots$. *Для любого* $a \in (0, \pi)$ *существует* $K \in (0, \infty)$ *такое, что*

$$f_r(a, K) = f_r(K). \tag{5}$$

Доказательство. Фиксируем произвольное $a_0 \in (0, \pi)$. Для того чтобы при некотором K имело место равенство (5), необходимо, чтобы

$$\frac{\partial}{\partial a} f_r(a_0, K) = \int_0^{a_0} \frac{\partial}{\partial a} \Phi_{a_0, r}(t)\,[\omega'(t) - K] = 0.$$

Из последнего, линейного относительно K уравнения, однозначно определяется

$$K = K_0 = \frac{\displaystyle\int_0^{a_0} \frac{\partial}{\partial a} \Phi_{a_0, r}(t)\,\omega'(t)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^{a_0} \frac{\partial}{\partial a} \Phi_{a_0, r}(t)\,\mathrm{d}\,t}.$$

Заметим, что $0 < K_0 < \infty$, как это следует из свойства 3 функции $\Phi_{a, r}$. Функция $f_r(a, K_0)$ достигает своего максимума в точке $a = a_0$, если функция

$$F_r(a) = \frac{\displaystyle\int_0^{a} \frac{\partial}{\partial a} \Phi_{a, r}(t')\,\omega'(t)\,\mathrm{d}\,t}{\displaystyle\int_0^{a} \frac{\partial}{\partial a} \Phi_{a, r}(t)\,\mathrm{d}\,t}$$

убывает в интервале $(0, \pi)$. В этом случае функция $\frac{\partial}{\partial a} f_r(a, K_0)$ меняет знак с плюса на минус не более одного раза.

Дифференцируя по a рекуррентную формулу (1), нетрудно получить равенства:

$$\int_0^a \frac{\partial}{\partial a} \Phi_{a, r}(t)\,\mathrm{d}\,t = 2 \cdot \frac{\partial}{\partial a} \Phi_{a, r+1}(0) \tag{6}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial a} \int_0^a \frac{\partial}{\partial a} \Phi_{a, r}(t)\,\mathrm{d}\,t =$$

$$= \frac{\partial}{\partial a} \Phi_{a, r}(a-) + \int_0^a \frac{\partial^2}{\partial a^2} \Phi_{a, r}(t)\,\mathrm{d}\,t = 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial a^2} \Phi_{a, r+1}(0). \tag{7}$$

---

[1]) Заметим, что для случая $a = \pi/n$ утверждение леммы содержится в работе [2]. К сожалению, доказательство Н. П. Корнейчука нам не известно.

Из свойства 5) функции $\Phi_{a,r}$ вытекает равенство

$$\frac{r}{a}\frac{\partial}{\partial a}\Phi_{a,\,r+1}(0)=\frac{\partial^2}{\partial a^2}\Phi_{a,\,r+1}(0). \qquad (8)$$

Введем следующее обозначение:

$$P_r(a,\,t)=\frac{r}{a}\frac{\partial}{\partial a}\Phi_{a,\,r}(t)-\frac{\partial^2}{\partial a^2}\Phi_{a,\,r}(t) \qquad (0\leqslant t\leqslant a). \qquad (9)$$

Используя равенства (6)—(8), имеем

$$\int_0^a P_r(a,\,t)\,\mathrm{d}t=\frac{\partial}{\partial a}\Phi_{a,\,r}(a-). \qquad (10)$$

Вычисление производной $F_r'(a)$ с учетом соотношений (6) — (10) дает следующее равенство:

$$2\cdot\frac{\partial}{\partial a}\Phi_{a,\,r+1}(0)\cdot F_r'(0)=$$

$$=\omega'(a)\int_0^a P_r(a,\,t)\,\mathrm{d}t-\int_0^a P_r(a,\,t)\,\omega'(t)\,\mathrm{d}t. \qquad (11)$$

(В тех точках a, где $\omega'(a)$ не существует, доопределим его равенством $\omega'(a)=\omega'(a-)$.)

Докажем индукцией по r, что при фиксированном a многочлен $P_r(a,\,t)$ убывает по t.

В самом деле, при $r=2$ и $r=3$ непосредственные вычисления дают:

$$P_2(a,\,t)=\frac{1}{8};\quad P_3(a,\,t)=\frac{a}{16}-\frac{3t^2}{32a}.$$

Предположим, что $P_{r-2}(t)$ $(r\geqslant 4)$ убывает по t. Используя рекуррентную формулу (1), имеем

$$P_r'(a,\,x)=-\frac{1}{2a}\int_0^x\frac{\partial}{\partial a}\Phi_{a,\,r-2}(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{4}\int_0^x P_{r-2}(t)\,\mathrm{d}t. \qquad (12)$$

В силу равенства (10) свойства 3) функции $\Phi_{a,r}$ и предположения индукции будет $\int_0^x P_{r-2}(a,\,t)\mathrm{d}t>0$ и $\int_0^x\frac{\partial}{\partial a}\Phi_{a,r-2}(t)\mathrm{d}t>0$ для любого $x\in[0,\,a]$. Поэтому из равенства (12) следует, что многочлен $P_r(a,\,t)$ убывает по t $(0<t<a)$. Кроме того, ввиду равенств (8), (9) и свойства 3

$$P_r(a,\,0)=\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial a}\Phi_{a,\,r}(0+)>0.$$

Следовательно, функция $P_r(a, t)$ (при фиксированном a) меняет знак с плюса на минус не более одного раза.

Из равенства (10) следует, что существует точка $t_0 \in (0, a)$ такая, что $P_r(a, t_0) > 0$. Если для любого $t \in (0, a)$ $P_r(a, t) > 0$, то из (11) в силу выпуклости вверх модуля непрерывности ω сразу следует, что функция $F_r(a)$ убывает. Если же $P_r(a, t)$ (при фиксированном a) меняет знак с плюса на минус, то возьмем ту единственную точку t_a, в которой $P_r(a, t_a) = 0$. Снова используя выпуклость вверх ω, получим

$$\int_0^a P_r(a, t)\,\omega'(t)\,dt =$$
$$= \int_0^{t_a} P_r(a, t)\,\omega'(t)\,dt + \int_{t_a}^a P_r(a, t)\,\omega'(t)\,dt \geqslant$$
$$\geqslant \omega'(t_a) \int_0^{t_a} P_r(a, t)\,dt + \omega'(t_a) \int_{t_a}^a P_r(a, t)\,dt =$$
$$= \omega'(t_a) \int_0^a P_r(a, t)\,dt \geqslant \omega'(a) \int_0^a P_r(a, t)\,dt.$$

Учитывая последние соотношения и равенство (11), видим, что и в этом случае $F_r(a)$ убывает, а следовательно, имеет место равенство (5) при $a = a_0$, $K = K_0$. Итак, для $r = 2, 3, 4, \ldots$ лемма доказана.

Для $r = 0, 1$ она очевидна.

Доказательство теоремы. Предположим вначале, что $f \in W^r H^{\omega}_{[0,\pi]}$. Тогда $f^{(r)} \in H^{\omega}_{[0,\pi]}$. Продолжим $f^{(r)}$ четным образом на отрезок $[-\pi, \pi]$ и далее 2π-периодически на всю ось. Из полученной таким образом функции $f_*^{(r)}$ вычтем такую константу C, чтобы $f_*^{(r)} - C$ в среднем равнялась 0 на периоде.

Введем в рассмотрение r-й и 2π-периодический интеграл от $f_*^{(r)} - C$, который обозначим через φ. Очевидно,

$$\varphi(x) = f(x) - P_r(x) \quad \text{для} \quad x \in [0, \pi], \tag{13}$$

где P_r — некоторый многочлен степени не выше r. φ, очевидно, принадлежит классу $W_*^r H^{\omega}$. Поэтому, как доказано в работе [2] для функции φ найдется последовательность функций $\{\psi_n\}$, $\psi_n \in W_*^{r+1} K_n$, такая, что

$$\| \varphi(x) - \psi_n(x) \|_C \leqslant f_r(K_n). \tag{14}$$

Выбор констант K_n произведем позднее.

Так как $\psi_n \in W^{r+1}_{[0,\pi]}K_n$, то в силу результата С. Н. Бернштейна (2) существует последовательность алгебраических многочленов $\bar{P}_n$, удовлетворяющих соотношениям:

$$\| \psi_n(x) - \bar{P}_n(x) \|_{C_{[0,\pi]}} \leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^{r+1} K_n \cdot \frac{\mathcal{K}_{r+1}}{n^{r+1}} + K_n \cdot o\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right). \tag{15}$$

В оценке (15) множитель $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{r+1}$ появился в связи с переходом от отрезка $[-1, 1]$ к отрезку $[0, \pi]$.

Пусть $n > r$. Тогда $\bar{\bar{P}}_n(x) = \bar{P}_n(x) + P_r(x)$ является многочленом степени не выше n. Учитывая (13)—(15), получим следующую оценку:

$$\| f(x) - \bar{\bar{P}}_n(x) \|_{C[0,\pi]} \leqslant$$
$$\leqslant f_r(K_n) + \left(\frac{\pi}{2}\right)^{r+1} \cdot K_n \cdot \frac{\mathcal{K}_{r+1}}{n^{r+1}} + K_n \cdot o\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right). \tag{16}$$

Из равенств (см. [2])

$$\int_0^{\pi} \Phi_{\pi,r}(x)\,dx = \mathcal{K}_{r+1},$$
$$\Phi_{\pi,r}(\lambda x) = \lambda^r \Phi_{\pi/\lambda,r}(x) \qquad (\lambda > 0), \tag{17}$$

заменой переменных $x = \frac{2n}{\pi} t$ легко найти, что при $b_n = \frac{\pi^2}{2n}$ имеет место равенство

$$\int_0^{b_n} \Phi_{b_n,r}(t)\,dt = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{r+1} \frac{\mathcal{K}_{r+1}}{n^{r+1}}. \tag{18}$$

Пользуясь леммой, выберем константы K_n так, чтобы

$$f_r(K_n) = f_r(b_n, K_n). \tag{19}$$

Из доказательства леммы следует, что $K_n = F_r(b_n)$, а потому в силу равенства (6) и свойств 4) и 5) функции $\Phi_{a,r}$ имеет место оценка

$$K_n \leqslant \frac{\frac{\partial}{\partial a}\Phi_{b_n,r}(0) \cdot \omega(b_n)}{2 \cdot \frac{\partial}{\partial a}\Phi_{b_n,r+1}(0)} = C_r \cdot \frac{\omega(b_n)}{b_n},$$

где

$$C_r = a\,\frac{\frac{\partial}{\partial a}\Phi_{a,\,r}(0)}{2\cdot\frac{\partial}{\partial a}\Phi_{a,\,r+1}(0)} = \frac{r\cdot \alpha_{r,\,0}}{2\,(r+1)\,\alpha_{r+1,\,0}}\,.$$

Следовательно, $\exists M_r:\ K_n \leqslant M_r\cdot n\omega\left(\frac{1}{n}\right)$.

Теперь из соотношений (16), (18) и (19) получим оценку

$$\| f(x) - \overline{\overline{P}}_n(x)\|_{C_{[0,\,\pi]}} \leqslant \int_0^{b_n} \Phi_{b_n,\,r}(t)\,\omega'(t)\,\mathrm{d}t + o\left(\frac{1}{n^r}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Производя справа в этом неравенстве замену переменных $t = \frac{\pi}{2}x$ и учитывая равенство (17), имеем

$$\| f(x) - \overline{\overline{P}}_n(x)\|_{C_{[0,\,\pi]}} \leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^{r+1} \int_0^{\pi/n} \Phi_{\pi/n,\,r}(x)\,\omega'\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x + o\left(\frac{1}{n^r}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad (20)$$

Пусть теперь $f \in W^r H^{\omega}_{[-1,1]}$. Тогда

$$\varphi(x) = f\left(\frac{2}{\pi}x - 1\right) \in W^r H^{\omega_1}_{[0,\,\pi]},$$

где $\omega_1(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^r \omega\left(\frac{2}{\pi}x\right)$. Согласно полученной оценке (20) для $\varphi(x)$ найдется последовательность многочленов $\overline{\overline{P}}_n$ $(n > r)$, обладающих тем свойством, что

$$\|\varphi(x) - \overline{\overline{P}}_n(x)\|_{C_{[0,\,\pi]}} \leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^{r+1} \int_0^{\pi/n} \Phi_{\pi/n,\,r}(x)\,\omega_1'\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x + o\left(\frac{1}{n^r}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad (21)$$

Учитывая, что почти всюду

$$\omega_1'\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{r+1}\omega'(x),$$

из соотношений (21) имеем

$$\|\varphi(x) - \overline{\overline{P}}_n(x)\|_{C_{[0,\,\pi]}} \leqslant \int_0^{\pi/n} \Phi_{\frac{\pi}{n},\,r}(x)\,\omega'(x)\,\mathrm{d}x + o\left(\frac{1}{n^r}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad (22)$$

Далее, в силу того, что

$$E_n(f)_{C_{[-1,1]}} \leqslant \| f(x) - P_n(x) \|_{C_{[-1,1]}} = \| \varphi(x) - \bar{\bar{P}}_n(x) \|_{C[0,\pi]},$$

где

$$P_n(x) = \bar{\bar{P}}_n\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right) \text{ и } \int_0^{\pi/n} \Phi_{\frac{\pi}{n},r}(x)\,\omega'(x)\,dx = \| f_{n,r} \|_C,$$

из (22) получаем окончательную оценку сверху

$$E_n(W^r H^{\omega}_{[-1,1]})_C \leqslant \| f_{n,r} \|_C + o\left(\frac{1}{n^r}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right). \qquad (23)$$

Сопоставляя оценки (23) и (3), получаем доказываемое равенство (4).

В заключение приведем одно следствие из полученного результата.

Пусть $L_n(f;x)$ — некоторый линейный оператор, отображающий множество непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ функций в пространство алгебраических многочленов. Тогда согласно известному неравенству Лебега:

$$|f(x) - L_n(f;x)| \leqslant (1 + L_n(x)) \cdot E_n(f)_{C_{[-1,1]}}, \qquad (24)$$

где $L_n(x) = \sup\limits_{\|\,\|\leqslant 1} |L_n(f;x)|$ — функции Лебега.

Соотношение (24) и доказанная теорема позволяют получить оценку сверху скорости сходимости $L_n(f;x)$ к $f(x)$ на классе $W^r H^{\omega}_{[-1,1]}$ для тех операторов, для которых известны оценки сверху величин $L_n(x)$.

Рассмотрим, в частности, линейные средние $M_n(f;x)$ интерполяционных алгебраических многочленов по системам узлов Чебышева. В этом случае функция Лебега имеет вид

$$M_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu^{(n)} \cos \nu \arccos \nu \frac{2k+1}{2(n+1)}\pi \right|,$$

где $\lambda_\nu^{(n)}$ — некоторая треугольная матрица чисел.

А. А. Захаровым в работе [6] получена асимптотическая оценка величины $M_n(x)$. Используя его результат, получаем

Следствие. *Равномерно относительно n и $x \in [-1, 1]$ справедливо соотношение*

$$\sup_{f \in W^r H^{\omega}_{[-1,1]}} |f(x) - M_n(f; x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi^{r+1}} |\cos n \arccos x| \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_{n-k}^{(n)}}{k+1} \int_0^{\pi} \Phi_{\pi, r}(x)\, \omega'\left(\frac{x}{n}\right) dx +$$

$$+ O\left[\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n^r}\left(|\lambda_0^{(n)}| + \sum_{k=1}^{n} \frac{k(n+1-k)}{n+1} |\Delta^2 \lambda_{k-1}^{(n)}|\right)\right].$$

Днепропетровский государственный университет

Поступило 29.IX.1976

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Корнейчук Н. П., Экстремальные значения функционалов и наилучшее приближение на классах периодических функций, Изв. АН СССР, Сер. матем., **35** (1971), 93—124.

[2] Корнейчук Н. П., О методах исследования экстремальных задач теории наилучшего приближения, Успехи матем. наук, **29**, № 3 (1974), 9—42.

[3] Бернштейн С. Н., О предельных зависимостях между константами теории наилучшего приближения, Собр. соч., т. 2, М., 1952, 413—415.

[4] Половина А. И., Приближение функций, заданных на отрезке, алгебраическими многочленами, Сб., Первая Республиканская математическая конференция молодых исследователей, № 2, Киев, 1965, 560—569.

[5] Половина А. И., О наилучшем равномерном приближении алгебраическими многочленами дифференцируемых функций, Изв. вузов, Математика, № 12 (1969), 76—82.

[6] Захаров А. А., Асимптотическое поведение функций Лебега линейных средних интерполяционных процессов, Матем. сб., **75**, № 3 (1968), 335—348.