Конкретные расчеты выполнены для трубы, состоящей из $N=10$ периодов структуры и при $\alpha=0{,}43$; $\beta=\pi/16$.

На рис. 2, 3 показано изменение со временем максимальных напряжений в первом (рис. 2) и втором (рис. 3) компонентах периода структуры 20-слойной трубы, A — анизотропное и 0 — нулевое приближения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Победря Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. М., 1981.
2. Механика композиционных материалов. Т. 2/Под ред. Дж. Сендецки. М., 1978.
3. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М., 1970.
4. Победря Б. Е. К теории вязкоупругости структурно-неоднородных сред//ПММ. 1983. **47**, вып. 1. 133—139.
5. Омаров С. Е. К определению микронапряжений в слоистых композитах с вязкоупругими компонентами. Деп. в ВИНИТИ № 4815—83. М., 1983.
6. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М.; Л., 1947.

Поступила в редакцию
23.05.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1987. № 6

УДК 624.131+539.215

Ш. М. Тахиров

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ДИФРАКЦИИ НА ЖЕСТКОМ НЕПРОНИЦАЕМОМ КЛИНЕ В СРЕДЕ БИО

В настоящей работе решается трехмерная задача дифракции волн на непроницаемом клине, вставленном без трения в безграничную двухкомпонентную пористую среду. Соответствующая плоская задача решена в [1].

Пусть $\mathbf{u}$ и $\mathbf{U}$ — вектора перемещений частиц твердого скелета и жидкой фазы соответственно; предположим, что они удовлетворяют условиям обобщенной теоремы Гельмгольца [2]. В этом случае динамические уравнения Био, записанные в перемещениях, сводятся к волновым уравнениям (аналогично [1]):

$$\begin{aligned}\Delta\Phi_i &= \alpha_i^{-2}\partial^2\Phi_i/\partial t^2,\\ \Delta\boldsymbol{\psi}_1 &= \alpha_3^{-2}\partial^2\boldsymbol{\psi}_1/\partial t^2,\end{aligned}\quad i=1,\ 2; \tag{1}$$

причем,

$$\mathbf{u}=\operatorname{grad}\varphi_1+\operatorname{rot}\boldsymbol{\psi}_1,\quad \varphi_1=\Phi_1+\Phi_2,$$

$$\mathbf{U}=\operatorname{grad}\varphi_2+\operatorname{rot}\boldsymbol{\psi}_2,\quad \varphi_2=\varkappa_1\Phi_1+\varkappa_2\Phi_2,$$

$$\boldsymbol{\psi}_2=\varkappa_3\boldsymbol{\psi}_1,\quad \varkappa_3=-\rho_{12}/\rho_{22},$$

$$\varkappa_i=-(P-\rho_{11}\alpha_i^2)/(Q-\rho_{12}\alpha_i^2),\quad i=1,\ 2.$$

Здесь α_1, α_2, α_3 — скорости распространения продольных волн первого, второго типов и поперечной волны, соответственно; P, Q, ρ_{11}, ρ_{12}, ρ_{22} — константы, характеризующие двухкомпонентную среду. Как известно, в цилиндрической системе координат, ось z которой направлена вдоль ребра клина, вектор-потенциал поперечных волн представим в виде $\psi_1 = \Psi_1 \mathbf{e}_3 + \operatorname{rot} \Psi_2 \mathbf{e}_3$; причем новые скалярные функции Ψ_1, Ψ_2 удовлетворяют тому же волновому уравнению (1), что и векторный потенциал.

Рассмотрим конкретную задачу падения плоской волны $\Phi_{10} = f(\alpha_1 t - z \sin\theta_1 + r\cos\theta_1 \cos(\theta - \theta_0))$ на клин $\pi/l \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ в бесконечной среде Био. Как и в [3], можно ограничиться решением задачи о падении единичной волны: $f(x) = H(x)$, так как из ее решения легко получается решение для падающей волны произвольного профиля.

На гранях клина равны нулю нормальные смещения твердого скелета и жидкости, а также касательные напряжения, что приводит к разделению условий для потенциалов:

$$\partial\varphi_1/\partial\theta = \partial\varphi_2/\partial\theta = \Psi_1 = \partial\Psi_2/\partial\theta = 0, \text{ при } \theta = 0,\ \pi/l.$$

Считается далее, что $1/2 \leqslant l < 1$. Граничные условия не являются независимыми и связаны условием на ребре:

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{\mathbf{u} = \mathrm{const}} + O(r^\varepsilon),\ \varepsilon > 0, \\ &r\mathbf{U} = O(r^\delta),\ \delta > 0, \text{ при } r \to 0, \end{aligned} \qquad (2)$$

обеспечивающим единственность решения сформулированной задачи.

Перейдя, как и в [3], к подвижной системе координат заменой переменных $\tau = \alpha_1 t/\sin\theta_1 - z$, получим уравнения для потенциалов:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_2\Phi_i &= \beta_i^{-2}\, \partial^2\Phi_i/\partial\tau^2, \\ \Delta_2\Psi_i &= \beta_i^{-2}\, \partial^2\Psi_i/\partial\tau^2, \end{aligned}\right. \quad i = 1,\ 2;$$

где $\beta_i^{-2} = ((\alpha_1^2/\alpha_i^2)\sec^2\theta_1 - 1)$, $\quad i = 1,\ 2,\ 3,$

$$\Delta_2 = \partial^2/\partial r^2 + 1/r\, \partial/\partial r + 1/r^2\, \partial^2/\partial\theta^2.$$

Далее, как доказано в [4], Ψ_2 можно представить в виде

$$\Psi_2 = \int_0^\tau \widehat{\Psi}_2(v,\ r,\ \theta)\, dv,$$

и, следовательно, задача для потенциалов Φ_1, Φ_2, Ψ_1, $\widehat{\Psi}_2$ является автомодельной. Эта задача решается методом функционально-инвариантных решений, подобно плоской задаче [1]. С учетом условия на ребре (2) для перемещений получим окончательный результат в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_a(r,\ \theta,\ \tau) + \cos l\theta\,(a_1 \operatorname{sh} lx_1 + b_1 \operatorname{sh} lx_2)/\pi, \\ \varphi_2 &= \varkappa_1\varphi_a + \cos l\theta\,(a_1\varkappa_1 \operatorname{sh} lx_1 + b_1\varkappa_2 \operatorname{sh} l x_2)/\pi, \\ \Psi_1 &= -c_1 \sin l\theta \operatorname{sh} lx_3/\pi, \\ \Psi_2 &= d_1 \cos l\theta\,(y_3 \cdot \operatorname{sh} lx_3 - l\sqrt{y_3^2 - 1}\operatorname{ch} lx_3)\, r\,(\beta_3(1 - l^2))^{-1}. \end{aligned} \qquad (3)$$

Здесь φ_a — решение акустической задачи и

$$a_1 = \varkappa_{32} a_0,\quad \varkappa_{ij} = \varkappa_i - \varkappa_j,\quad i,\ j = \overline{1,\ 3};$$

$$b_1 = k_2^l \varkappa_{13} a_0,\quad k_i = \beta_1/\beta_i,\quad i = 2,\ 3;$$

$$c_1 = k_3^l \varkappa_{21}(1 + \beta_3^2)\, a_0,$$

$$d_1 = k_3^l \varkappa_{21} \beta_3^2 a_0,$$

$$a_0 = 8 \sin l\pi \cos l\theta_0 / (\varkappa_{32} + \varkappa_{13} k_2^{2l} + \varkappa_{12} k_3^{2l} (1 + 2\beta_3^2)),$$

$$x_i = \operatorname{arcch} y_i, \quad y_i = \beta_i \tau / r, \quad i = 1, 2, 3.$$

Перемещения находятся по формулам, аналогичным известным (см., например, систему (1) в [3]). Для $l > 1$ решение совпадает с акустическим решением [3]. Из системы (3) видно, что добавки к акустическому решению исчезают при $\theta_0 = \pi/2l$ и $l = 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мардонов Б. Дифракция волн на жестком и непроницаемом клине, вставленном без трения в безграничную двухкомпонентную пористую среду//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1973. № 1. 60—68.
2. Чоу П., Кисел X. О теореме Гельмгольца для кусочно-дифференцируемых функций в бесконечных областях//Тр. Амер. об-ва инженеров-механиков. Сер. Е. Прикл. механ. 1970. **37**, № 1. 206—207.
3. Исраилов М. Ш. Точные решения трехмерных задач дифракции плоских волн на клине//Докл. АН СССР. 1979. **247**, № 4. 815—818.
4. Рашидов И. Т. Решение одной трехмерной задачи дифракции плоских упругих волн на клине//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1985. № 4. 87—90.

Поступила в редакцию
24.03.86

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1987. № 6

УДК 539.3+620.171.5

В. В. Дунаев, В. Д. Копытов, Н. С. Назарова, М. В. Спиридонова, Н. А. Четвероус

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЯРИЗАЦИОННО-ОПТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ БОЛТА ПРИ ОСЕВОМ РАСТЯЖЕНИИ

Болтовые соединения являются одним из самых распространенных элементов любой конструкции, и масса болтов может достигать весьма значительной величины. Уменьшить металлоемкость и массу конструкции возможно изменением формы головки болта, но при этом не должны нарушаться прочностные характеристики болта [1]. В связи с этим необходимо изучить пространственное напряженное состояние болтов различной конфигурации, нагруженных осевым растяжением, которое является основным видом нагрузки.

В данной работе поляризационно-оптическим методом исследовано напряженное состояние болтов с выступающей головкой трех видов при осевом растяжении. Особое внимание обращено на область перехода от головки болта к стержню и на распределение нормальных контактных давлений под головкой болта.

Поляризационно-оптический метод [2] позволяет изучать пространственное напряженное состояние деталей сложной формы с помощью «замораживания» объемных моделей с последующим изготовлением из них тонких пластинок-срезов. «Замораживание» позволяет в полимерных оптически чувствительных материалах зафиксировать деформации и соответствующий им оптический эффект при медленном охлаждении от температур высокоэластического до температур стеклообразного состояния под действием постоянной нагрузки. «Замороженная» картина интерференционных полос практически не изменяется