УДК 517.956.3

И. Е. Плещинская, Н. Б. Плещинский

ОБ УПРАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯМИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ЧЕРЕЗ ГРАНИЧНЫЕ ФУНКЦИИ

1°. Рассмотрим линейную гиперболическую систему уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} u_x - v_y &= au + bv + r, \\ u_y - v_x &= cu + dv + s \end{aligned} \tag{1}$$

с непрерывными коэффициентами и свободными членами в характеристическом треугольнике ABC, который расположен в нижней полуплоскости и ограничен отрезком вещественной оси $AB = [0, 1]$ и отрезками характеристик $AC: x + y = 0$ и $BC: y - x + 1 = 0$ системы (1). Пусть L_1, L_2 — два участка границы $\triangle ABC$, на которых заданы граничные условия

$$F_j[u(t),\ v(t)] = f_j(t),\ t \in L_j,\ j = 1,2. \tag{2}$$

Будем предполагать, что условия (2) заданы так, что граничная задача (1), (2) имеет единственное решение. Таким образом, каждой паре граничных функций f_1, f_2 соответствует вполне определенное решение u, v системы (1) в $\triangle ABC$.

Рассмотрим задачу оптимального управления решением системы (1) через граничные функции при наличии дополнительных ограничений. Требуется найти такие функции f_1^0, f_2^0, при которых решение u^0, v^0 граничной задачи (1), (2) доставляет экстремум заданному квадратичному интегральному функционалу

$$I(u,\ v) = \int\limits_{AB} ([u(x,\ 0) - \tilde{u}(x)]^2 + [v(x,\ 0) - \tilde{v}(x)]^2)\, dx, \tag{3}$$

где $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ — заданные функции.

Если поставить на первый план задачу минимизации функционала (3), то уравнения системы (1) можно рассматривать как ограничения задачи, причем достаточно сложные. Чтобы снять эти ограничения проделаем следующее. Воспользуемся каким-либо представлением решений системы (1) через две произвольные (дифференцируемые) функции φ_1, φ_2. Тогда от функционала (3) можно перейти к новому функционалу, зависящему от функций φ_1, φ_2. Его минимум нужно искать при дополнительных ограничениях на φ_1, φ_2, которые легко получить заменой в соответствующих условиях функций f_1, f_2 на их выражения через φ_1, φ_2, полученные из граничных условий (2).

Чтобы получить для решений системы (1) нужное нам представление через две произвольные функции, рассмотрим в $\triangle ABC$ задачу Коши для системы (1):

$$u(x,\ 0)=\varphi_1(x),\ v(x,\ 0)=\varphi_2(x),\ x\in AB.$$

Решение этой задачи построено О. М. Теутом [1]. Запишем его в удобной для нас форме

$$u(x,\ y)=\Omega_1(x,\ y),\ v(x,\ y)=\Omega_2(x,\ y), \tag{4}$$

$$\Omega_j(x,\ y)=\Phi_1(\xi)A_1(\xi,\ \eta)+(-1)^{j+1}\Phi_2(\eta)A_2(\xi,\ \eta)+$$

$$+\int_{1-\eta}^{\xi}\Phi_1(\xi_1)K_j(\xi_1;\ \xi,\ \eta)\,d\xi_1+\int_{1-\xi}^{\eta}\Phi_2(\eta_1)L_j(\eta_1;\ \xi,\ \eta)\,d\eta_1+G_j(\xi,\ \eta),\ j=1,\ 2,$$

где

$$\xi=x+y,\ \eta=y-x+1,$$

$$\Phi_1(\xi)=2\varphi_1(\xi)+2\varphi_2(\xi),\ \Phi_2(\eta)=2\varphi_1(1-\eta)-2\varphi_2(1-\eta),$$

функции A_j, K_j, L_j, G_j, $j=1, 2$, выражаются через коэффициенты a, b, c, d системы (1), причем свободные члены r, s уравнений входят только в выражения для функций G_j. В выражениях для функций K_j, L_j, G_j, $j=1,2$, содержатся под знаком интеграла функции Римана (см. [1]) системы (1).

Таким образом, решение u, v системы (1) в $\triangle ABC$ мы выразили через две функции φ_1, φ_2 — граничные функции задачи Коши, или, что удобнее, через функции Φ_1, Φ_2. Правая часть формул (4) представляет собой сумму линейных интегральных операторов, примененных к этим функциям. Переход к функциям Φ_1, Φ_2 в исходной задаче оптимального управления для системы (1) приводит к задаче интегрального вариационного исчисления.

Отметим, что вместо представлений (4) можно рассматривать любые другие интегральные представления, которые могут быть получены при решении некоторых других граничных задач с линейными граничными условиями. Например, представления решений задач Гурса и Коши — Гурса, для системы (1), полученные Т. В. Чекмаревым [2], [3].

2°. Пусть

$$I_j(\varphi_1\ \varphi_2)=\int_a^b f_j(x,\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ (K_j\ \varphi_1)(x),\ (L_j\varphi_2)(x))\,dx,\ j=\overline{0,\ m}.$$

Рассмотрим задачу об отыскании в пространстве непрерывных функций $C([a,\ b])$ экстремумов интегрального функционала $I_0(\varphi_1,\ \varphi_2)$ при дополнительных ограничениях

$$I_j(\varphi_1,\ \varphi_2)=c_j,\ j=\overline{1,\ m}, \tag{5}$$

c_j — заданные постоянные, и

$$F_j(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), (K_j\varphi_1)(x), (L_j\varphi_2)(x)) = 0, \ x \in [a, b], \ j = \overline{1, n}. \quad (6)$$

Здесь

$$(K_\alpha\varphi)(x) \equiv \int_a^b \varphi(t) K_\alpha(t, x)\, dt, \ (L_\beta\varphi)(x) \equiv \int_a^b \varphi(t) L_\beta(t, x)\, dt$$

— линейные интегральные операторы. Будем предполагать, что функции K_α, L_β непрерывны по совокупности переменных, функции $f_j(x, y_1, y_2, z_1, z_2)$, $j = \overline{0, m}$, $F_j(x, y_1, y_2, z_1, z_2)$, $j = \overline{1, n}$, непрерывны по совокупности переменных x, y_1, y_2, z_1, z_2 вместе с первыми частными производными.

Для исследования задачи на условный экстремум воспользуемся правилом неопределенных множителей Лагранжа: если функции φ_1^0, φ_2^0 доставляют локальный экстремум функционалу I_0 при условиях (5), (6), то найдутся числа λ_j, $j = \overline{0, m}$, и функции $\mu_j(x)$, $j = \overline{1, n}$, такие, что функции φ_1^0, φ_2^0 будут стационарной точкой функционала

$$I(\varphi_1, \varphi_2) \equiv \int_a^b L(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x))\, dx, \quad (7)$$

где

$$L(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j f_j(x) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j(x) F_j(x),$$

$$f_j(x) \equiv f_j(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), (K_j\varphi_1)(x), (L_j\varphi_2)(x)), \ j = \overline{0, m},$$

$$F_j(x) \equiv F_j(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), (K_j\varphi_1)(x), (L_j\varphi_2)(x)), \ j = \overline{1, n}.$$

Вычислим вариацию функционала (7),

$$\delta I = \int_a^b \Big[\sum_{j=0}^{m} \lambda_j \partial_{y_1} f_j(x) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j(x)\, \partial_{y_1} F_j(x)\Big] h_1(x)\, dx +$$

$$+ \int_a^b \Big[\sum_{j=0}^{m} \lambda_j \partial_{y_2} f_j(x) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j(x)\, \partial_{y_2} F_j(x)\Big] h_2(x)\, dx +$$

$$+ \int_a^b \Big[\sum_{j=0}^{m} \lambda_j \partial_{z_1} f_j(x) \cdot (K_j h_1)(x) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j(x)\, \partial_{z_1} F_j(x) \cdot (K_j h_1)(x)\Big] dx +$$

$$+ \int_a^b \Big[\sum_{j=0}^{m} \lambda_j \partial_{z_2} f_j(x) \cdot (L_j h_2)(x) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j(x)\, \partial_{z_2} F_j(x) \cdot (L_j h_2)(x)\Big] dx.$$

Изменим порядки интегрирования и переобозначим переменные интегрирования в двух последних интегралах. Тогда получим выражение вида

$$\delta I = \int_a^b h_1(x) H_1(x)\,dx + \int_a^b h_2(x) H_2(x)\,dx.$$

Из основной леммы вариационного исчисления следует, что если функции φ_1^0, φ_2^0 являются стационарной точкой функционала (7), то они удовлетворяют системе интегральных уравнений

$$\begin{gathered}
H_1(x) \equiv \sum_{j=0}^{m} \lambda_j \partial_{y_1} f_j(x) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j(x)\, \partial_{y_1} F_j(x) + \\
+ \int_a^b \Big[\sum_{j=0}^{m} \lambda_j \partial_{z_1} f_j(t) \cdot K_j(x, t) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j(t)\, \partial_{z_1} F_j(t) \cdot K_j(x, t)\Big] dt = 0, \\
H_2(x) \equiv \sum_{j=0}^{m} \lambda_j \partial_{y_2} f_j(x) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j(x)\, \partial_{y_2} F_j(x) + \\
+ \int_a^b \Big[\sum_{j=0}^{m} \lambda_j \partial_{z_2} f_j(t) \cdot L_j(x, t) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j(t)\, \partial_{z_2} F_j(t) \cdot L_j(x, t)\Big] dt = 0.
\end{gathered} \tag{8}$$

Поскольку в уравнения (8) входят неопределенные множители Лагранжа λ_j и $\mu_j(x)$, эти уравнения рассматриваются вместе с уравнениями (5) и (6).

Итак, система уравнений (5), (6), (8) представляет собой необходимые условия в задаче на условный экстремум.

Легко видеть, что если все рассматриваемые функции f_j, F_j являются квадратичными, то интегральные уравнения (8) будут линейными уравнениями относительно функции φ_1, φ_2.

3°. В общем случае о явном решении системы уравнений (5), (6), (8) не может быть и речи, тем более что в ядрах содержатся функции, которые не удается записать явно. Как показано в [1], ядра интегральных операторов выражаются через функцию Бесселя нулевого порядка, если a, b, c, d постоянны. Если же выполняется хотя бы одно из двух соотношений

$$a(x) + b(x) + c(x) + d(x) \equiv 0, \quad a(x) - b(x) - c(x) + d(x) \equiv 0,$$

то функции Римана задачи Коши записываются явно.

Для некоторых частных случаев системы (1) в [4] получены удобные неинтегральные представления решений через две произвольные дифференцируемые функции. Рассмотрим некоторые простые примеры задач оптимального управления через граничные функции решениями таких систем.

Для системы простейшего типа

$$
\begin{aligned}
u_x - v_y &= au + bv, \\
u_y - v_x &= -bu - av
\end{aligned}
\tag{9}
$$

справедливо следующее представление решений через две дифференцируемые функции:

$$
\begin{aligned}
u(x, y) &= -\Delta_1(\xi, \eta) M(\eta) - \Delta_2(\xi, \eta) N(\xi), \\
v(x, y) &= \Delta_1(\xi, \eta) M(\eta) - \Delta_2(\xi, \eta) N(\xi),
\end{aligned}
$$

где

$$\xi = x + y, \quad \eta = y - x + 1,$$

$$\ln \Delta_1(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\int_0^{\xi} [a(\xi, \eta) - b(\xi, \eta)]\, d\xi, \quad \ln \Delta_2(\xi, \eta) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\eta} [a(\xi, \eta) + b(\xi, \eta)]\, d\xi.$$

Рассмотрим задачу оптимального управления решением системы (9) в характеристическом треугольнике через граничные функции задачи Гурса

$$u = f_1(x) \text{ на } AC, \quad v = f_2(x) \text{ на } BC.$$

Требуется найти такие функции f_1^0, f_2^0, при которых достигает минимума функционал

$$I(u, v) \equiv \int_0^1 [u^2(x, 0) + v^2(x, 0)]\, dx.$$

Искомые функции должны удовлетворять условию

$$\int_0^1 \left[f_1\left(\frac{x}{2}\right) + f_2\left(\frac{1+x}{2}\right)\right] dx = 1. \tag{10}$$

Перейдем к новым управляющим функциям M и N. Тогда новый минимизируемый функционал будет иметь вид

$$I(M, N) = 2\int_0^1 [\Delta_1^2(x, 1-x)\, M^2(1-x) + \Delta_2^2(x, 1-x)\, N^2(x)]\, dx.$$

Так как из граничных условий

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= -M(1-2x) - \Delta_2(0{,}1-2x) N_0, \\
f_2(x) &= \Delta_1(2x-1{,}0) M_0 - N(2x-1),
\end{aligned}
\tag{11}
$$

где $M_0 = M(0)$, $N_0 = N(0)$, то условие (10) запишется следующим образом:

$$\int_0^1 [-M(1-x) - \Delta_2(0,1-x)N_0 + \Delta_1(x,0)M_0 - N(x)]\,dx = 1. \tag{12}$$

Применяя правило множителей Лагранжа, получим систему уравнений для определения искомых функций $M^0(x)$, $N^0(x)$ и множителя Лагранжа λ

$$4\Delta_1^2(x,1-x)M(1-x) - \lambda = 0, \quad 4\Delta_2^2(x,1-x)N(x) - \lambda = 0,$$

которые должны рассматриваться вместе с уравнением (12). Подставляя полученные из (13) выражения функций M и N в (12), получим

$$\begin{aligned}-\frac{\lambda}{4}\int_0^1 [\Delta_1^{-2}(x,1-x) + \Delta_2^{-2}(x,1-x) + \Delta_2(0,1-x)\cdot\Delta_2^{-2}(0,1) -\\ - \Delta_1(x,0)\cdot\Delta_1^{-2}(1,0)]\,dx = 1.\end{aligned} \tag{13}$$

Отсюда определяется λ, по λ из (13) определяются $M^0(x)$ и $N^0(x)$, и, наконец, из (11) — f_1^0, f_2^0.

В качестве второго примера рассмотрим аналогичную задачу, когда вместо дополнительного условия (10) функции f_1, f_2 должны удовлетворять условию

$$f_1^2\left(\frac{x}{2}\right) + f_2^2\left(\frac{1+x}{2}\right) = 1, \quad x \in [0,\ 1]. \tag{14}$$

Соответствующая система уравнений для определения $M^0(x)$, $N^0(x)$ и множителя Лагранжа $\lambda(x)$ имеет вид

$$\begin{gathered}2\Delta_1^2(x,1-x)M(1-x) + \lambda(x)[M(1-x) + \Delta_2(0,1-x)N_0] = 0,\\ 2\Delta_2^2(x,1-x)N(x) + \lambda(x)[\Delta_1(x,0)M_0 - N(x)] = 0,\\ [M(1-x) + \Delta_2(0,1-x)N_0]^2 + [\Delta_1(x,0)M_0 - N(x)]^2 = 1.\end{gathered} \tag{15}$$

Записав систему уравнений (15) при $x = 0$ и $x = 1$, получим систему уравнений для определения постоянных M_0 и N_0, эквивалентную алгебраическому уравнению 4-го порядка. Далее, из первых двух уравнений системы (15)

$$M(1-x) = \frac{-N_0\Delta_2(0,1-x)\lambda(x)}{2\Delta_1^2(x,1-x) + \lambda(x)}, \quad N(x) = \frac{M_0\Delta_1(x,0)\lambda(x)}{2\Delta_2^2(x,1-x) + \lambda(x)}$$

и тогда, из третьего уравнения,

$$\frac{4N_0^2\Delta_1^4(x,1-x)\Delta_2^2(0,1-x)}{[2\Delta_1^2(x,1-x) + \lambda(x)]^2} + \frac{4M_0^2\Delta_1^2(x,0)\Delta_2^4(x,1-x)}{[2\Delta_2^2(x,1-x) + \lambda(x)]^2} = 1. \tag{16}$$

Уравнение (16) относительно неизвестной функции $\lambda(x)$ также эквивалентно алгебраическому уравнению 4-го порядка. Чтобы убедиться в том, что его решение существует, фиксируем x и построим график функции $f(\lambda)$, $\lambda=\lambda(x)$, стоящей в левой части уравнения. Так как график неотрицательной функции $f(\lambda)$ имеет две вертикальные асимптоты $\lambda=-2\Delta_1(x, 1-x)$, $\lambda=-2\Delta_2(x, 1-x)$ и горизонтальную асимптоту $\lambda=0$, то он пересекает линию уровня $f=1$ по крайней мере два раза. Кроме того расположенная между вертикальными асимптотами ветвь графика также может пересекать линию уровня $f=1$, но не более двух раз. Таким образом, существуют по крайней мере две функции $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$, удовлетворяющие уравнению (16) при всех $x\in[0, 1]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Теут О. М. Задача Коши для одной системы гиперболического типа.— В кн.: Краевые задачи теории аналитических функций.— Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1962, с. 54—70.
2. Чекмарев Т. В. Решение системы дифференциальных уравнений смешанного типа в области гиперболичности.— Изв. вузов. Матем., 1967, № 5.
3. Чекмарев Т. В. Решение в квадратурах задач Коши и Гурса для линейной системы дифференциальных уравнений в частных производных.— Ученые записки Горьковск. ун-та, ч. 11, 1967.
4. Плещинская И. Е. Некоторые неинтегральные представления решений эллиптических и гиперболических систем уравнений с частными производными первого порядка.— В кн.: Дифференциальные уравнения в частных производных.— Рязань, 1980, с. 63—72.
5. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление.— М.: Наука, 1971.— 432 с.

Доложено на семинаре 30 января 1984 года.