S. V. Levizov, Some properties of the Walsh system,
Mat. Zametki, 1980, Volume 27, Issue 5, 715–720

https://www.mathnet.ru/eng/mzm6490

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 27, № 5 (1980)

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СИСТЕМЫ УОЛША

С. В. Левизов

В литературе под названием «система Уолша» обычно подразумевают, вообще говоря, три полные ортонормированные системы, отличающиеся друг от друга нумерацией. Это системы Уолша — Пэли, Уолша — Качмажа и самого Уолша. Некоторые свойства именно этой, последней из вышеназванных систем, рассматриваются в настоящей работе.

Как известно, Уолш в [1] вводил свою систему $\{\varphi_n\}$ следующим образом:

$$\varphi_0(x) \equiv 1, \quad \varphi_1(x) = \begin{cases} +1, & 0 \leqslant x < 1/2, \\ -1, & 1/2 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Для $n \geqslant 1$ имеем $n = 2^{m-1} + l - 1$ $(l = 1, 2, \ldots, 2^{m-1};$ $m = 1, 2, \ldots)$,

$$\varphi_n(x) = \varphi_m^{(l)}(x) \qquad (\varphi_1 = \varphi_1^{(1)}),$$

где при $m \geqslant 2$

$$\varphi_m^{(2k-1)}(x) = \begin{cases} \varphi_{m-1}^{(k)}(2x), & 0 \leqslant x < 1/2, \\ (-1)^k \varphi_{m-1}^{(k)}(2x-1), & 1/2 < x \leqslant 1, \end{cases}$$

$$\varphi_m^{(2k)}(x) = \begin{cases} \varphi_m^{(k)}(2x), & 0 \leqslant x < 1/2, \\ (-1)^k \varphi_{m-1}^{(k)}(2x-1), & 1/2 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Там, где $\varphi_n(x)$ еще не определена, полагаем

$$\varphi_n(x) = (1/2)\,[\varphi_n(x-0) + \varphi_n(x+0)].$$

Это полная ортонормированная система (ПОНС) в $L(0,\ 1)$

функций, каждая из которых принимает лишь значения ± 1 (за исключением некоторых двоично-рациональных точек, где обращается в нуль), обладающая тем свойством, что n-я функция имеет ровно n перемен знака, т. е. n нулей.

В данной работе мы докажем теорему, устанавливающую в известном смысле «единственность» системы Уолша.

ТЕОРЕМА [1]). *Пусть на* $[0, 1]$ *задана система функций* $\{\alpha_n(x)\}$ *со следующими свойствами*:

а) $\{\alpha_n(x)\}$ — *ортогональная система на* $[0, 1]$;

б) $\alpha_n(x) = \pm 1$, *за исключением конечного числа точек скачков, где* $\alpha_n(x) = 0$;

в) $\alpha_n(x)$ *имеет ровно* n *перемен знака на* $(0, 1)$;

г) $\alpha_n(0) = 1$.

Тогда $\alpha_n(x) \equiv \varphi_n(x)$, *где* $\{\varphi_n(x)\}$ — *система Уолша (т. е. других систем со свойствами* а) — г) *не существует*).

Замечание 1. Мы рассматриваем здесь отрезок $[0, 1]$, но все условия, свойства и доказательства сохраняются для произвольного отрезка $[a, b]$ — достаточно сделать линейную замену аргумента.

Доказательство теоремы. Мы будем вести индукцию по номеру функции, как бы «строя» систему $\{\alpha_n(x)\}$ по ее свойствам. Именно, предполагая, что первые k функций $\alpha_0(x), \alpha_1(x), \ldots, \alpha_{k-1}(x)$ уже «построены» и совпадают с соответствующими функциями Уолша $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{k-1}(x)$, и зная, что следующая за ними функция $\alpha_k(x)$ ортогональна к ним, принимает лишь значения ± 1 (кроме точек скачков), имеет k нулей на $(0, 1)$ и $\alpha_k(0) = 1$, мы построим $\alpha_k(x)$ и покажем, что $\alpha_k(x) \equiv \varphi_k(x)$. Тем самым теорема будет доказана.

При $k = 0, 1$ наше утверждение тривиально (проверяется непосредственно). Пусть утверждение справедливо до номера $k = 2^n + m - 1$ (m произвольно зафиксировано, $1 \leqslant m \leqslant 2^n$) включительно, т. е. если имеем набор функций $\alpha_0(x), \ldots, \alpha_p(x)$ (где $p \leqslant 2^n + m - 1$), обладающих свойствами а) — г), то необходимо $\alpha_i(x) \equiv \varphi_i(x)$ для каждого $i \leqslant p$. Покажем, что из этого следует $\alpha_{2^n+m}(x) \equiv \varphi_{2^n+m}(x)$. В дальнейшем вместо $\alpha_{2^n+m}(x)$ будем писать просто $\alpha(x)$. Изучим поведение функции $\alpha(x)$. Нам понадобится

---

[1]) ВРЖ Математика № 2 (1971) 2 Б85 ошибочно указано, что данная теорема доказана ранее Бирнсом и Свиком в [2].

ЛЕММА. *Функция* $\alpha(x)$ *на участках* $[0, 1/2]$ *и* $[1/2, 1]$ *ортогональна ко всем* $\alpha_k(x)$, *где* $0 \leqslant k \leqslant 2^n + m - 2$.

Доказательство. Берем любую $\alpha_k(x)$ $(0 \leqslant k \leqslant 2^n + m - 2)$. По предположению индукции, $\alpha_k(x) = \varphi_k(x)$. Тогда, если k четно, то

$$\varphi_{k+1}(x) = \begin{cases} \varphi_k(x), & x \in [0, 1/2], \\ -\varphi_k(x), & x \in (1/2, 1]; \end{cases}$$

если k нечетно, то

$$\varphi_{k-1}(x) = \begin{cases} \varphi_k(x), & x \in [0, 1/2), \\ -\varphi_k(x), & x \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

Это следует из определения системы $\{\varphi_n(x)\}$. По условию, $\alpha(x)$ ортогональная на $[0, 1]$ к α_{k-1}, α_k, α_{k+1}, т. е. к φ_{k-1}, φ_k, φ_{k+1}. Поэтому имеем

$$\int_0^1 \alpha(x)\alpha_k(x)\,dx = \int_0^{1/2} \alpha(x)\alpha_k(x)\,dx + \int_{1/2}^1 \alpha(x)\cdot\alpha_k(x)\,dx = 0;$$

в то же время

$$\int_0^1 \alpha(x)\alpha_{k\pm1}(x)\,dx = \int_0^{1/2} \alpha(x)\alpha_{k\pm1}(x)\,dx - \\ - \int_{1/2}^1 \alpha(L(x))\alpha_{k\pm1}(x)\,dx = 0$$

(знак «+» или «—» в подынтегральном выражении выбирается в зависимости от четности k: «+», если k четно; «—», если k нечетно).

Из этих двух равенств следует, что

$$\int_0^{1/2} \alpha(x)\alpha_k(x)\,dx = \int_{1/2}^1 \alpha(x)\alpha_k(x)\,dx = 0$$

для $0 \leqslant k \leqslant 2^n + m - 2$. Лемма доказана.

Замечание 2. Если m — четное число, то доказательство леммы можно продолжить и для случая $k = 2^n + m - 1$. Действительно, так как $2^n + m - 1$ — нечетное число, то

$$\alpha_{2^n+m-1}(x) = \begin{cases} \alpha_{2^n+m-1}(x), & 0 \leqslant x < 1/2, \\ -\alpha_{2^n+m-1}(x), & 1/2 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Далее, так же как при доказательстве леммы, показываем, что

$$\int_0^{1/2} \alpha(x)\, \alpha_{2^n+m-1}(x)\, dx = \int_{1/2}^1 \alpha(x)\, \alpha_{2^n+m-1}(x)\, dx = 0,$$

т. е. $\alpha(x)$ ортогональна в этом случае к $\alpha_{2^n+m-1}(x)$ на отрезках [0, 1/2] и [1/2, 1]. Доказывая теорему, рассмотрим два случая:

а) $m = 2l$. Как следует из замечания 2, в этом случае $\alpha(x)$ ортогональна ко всем предыдущим (по номерам) функциям $\alpha_k(x)$ на [0, 1/2] и [1/2, 1]. По условию, $\alpha(x)$ имеет $2^n + m = 2^n + 2l$ нулей. Докажем, что число нулей у нее на промежутках [0, 1/2) и (1,2, 1] (т. е. слева и справа от точки $x = 1/2$) одинаково и равно $2^{n-1} + l$. Допустим противное: пусть число нулей слева (на [0, 1/2]) равно $r < 2^{n-1} + l$ (случай, когда «правых» нулей больше ($r > 2^{n-1} + l$), разбирается совершенно аналогично). Заметим теперь, что из определения $\{\varphi_n(x)\}$ следует, что при $0 \leqslant x < 1/2$

$$\varphi_0(x) = \varphi_1(x) = \varphi_0(2x),$$

$$\varphi_2(x) = \varphi_3(x) = \varphi_1(2x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_{2^n+m-2}(x) = \varphi_{2^n+m-1}(x) = \varphi_{2^{n-1}+l-1}(2x).$$

Но $\varphi_k(x) = \alpha_k(x)$ при $0 \leqslant k \leqslant 2^n + m - 1$; поэтому можем утверждать, что на [0, 1/2) все функции, предшествующие $\alpha(x)$, есть функции Уолша $\varphi_0, \ldots, \varphi_{2^{n-1}+l-1}$, но сжатые по оси абсцисс вдвое. На этом участке функция $\alpha(x)$ ортогональна к ним — это следует из леммы и замечания. Кроме того, $\alpha(0) = 1$; $\alpha(x) = \pm 1$ (кроме точек скачков) и $\alpha(x)$ имеет здесь r перемен знака. Так как $r \leqslant 2^{n-1} + l - 1 < 2^n + m$, то заключаем, что для $\alpha(x)$ на участке [0, 1/2) выполнены все условия индукционного предположения, из которого (с учетом замечания 1) следует, что вышеприведенными свойствами может обладать только функция Уолша φ_r, сжатая по оси абсцисс вдвое. Это значит, что на [0, 1/2) $\alpha(x)$ устроена как функция $\varphi_r(2x)$, т. е. $\alpha(x) \equiv \varphi_r(2x)$ для любого $x \in [0, 1/2)$.

Возьмем теперь $\alpha_{2r}(x)$; так как $2r < 2^n + m$, то $\alpha_{2r}(x)$ предшествует $\alpha(x)$. По лемме имеем

$$\int_0^{1/2} \alpha(x)\, \alpha_{2r}(x)\, dx = 0.$$

В то же время при $x \in [0,\ 1/2)$

$$\alpha(x) = \varphi_r(2x) = \varphi_{2r}(x) = \alpha_{2r}(x) \Rightarrow \int_0^{1/2} \alpha(x)\,\alpha_{2r}(x)\,\mathrm{d}x = 1/2.$$

Мы пришли к противоречию, что и доказывает одинаковость числа «левых» и «правых» нулей у функции $\alpha(x)$, т. е. $r = 2^{n-1} + l$. Опять рассматриваем $\alpha(x)$ на $[0,\ 1/2)$, рассуждая так же, как раньше. Именно, $\alpha(x)$ ортогональна к $\varphi_0(2x)$, $\varphi_1(2x), \ldots, \varphi_{2^{n-1}+l-1}(2x)$; $\alpha(0) = 1$; $\alpha(x)$ принимает лишь значения ± 1, исключая точки скачков, и, наконец, $\alpha(x)$ имеет на этом участке $r = 2^{n-1} + l$ перемен знака. Так как $r < 2^n + m$, то все условия индукционного предположения выполнены и окончательно получаем, что

$$\alpha(x) \equiv \varphi_{2^{n-1}+l}(2x) \text{ для любого } x \in [0,\ 1/2).$$

Далее, в точке $x = 1/2$ у $\alpha(x)$ нет перемены знака, так как всего у нее $2^n + m$ нулей — по $2^{n-1} + l$ слева и справа от точки $x = 1/2$. Поэтому $\alpha(1/2 - 0) = \alpha(1/2) = \alpha(1/2 + 0)$. Эти значения определяются в зависимости от четности l. Если l четно, то $\alpha(1/2 - 0) = \varphi_{2^{n-1}+l} \cdot (1-0) = 1$; если же l нечетно, то $\alpha(1/2 - 0) = \varphi_{2^{n-1}+l} \cdot (1 - 0) = -1$. Это с очевидностью следует из определения системы Уолша $\{\varphi_n(x)\}$.

Теперь, рассматривая $\alpha(x)$ на участке $[1/2,\ 1]$ и повторяя почти дословно наши рассуждения относительно поведения $\alpha(x)$ на $[0,\ 1/2)$, можно показать, что при $x \in [1/2,\ 1]$ $\alpha(x)$ ведет себя как функция $\varphi_{2^n+l}(2x - 1)$ при четном l и как $-\varphi_{2^n+l}(2x - 1)$ при нечетном l.

Построенная нами таким образом функция $\alpha(x)$ есть, как легко убедиться, в точности функция Уолша $\varphi_{2^n+2l}(x) = \varphi_{2^n+m}(x)$, т. е. при $m = 2l$ $\alpha(x) = \alpha_{2^n+m}(x) = \varphi_{2^n+m} \cdot (x)$.

б) $m = 2l + 1$. Как и в случае а), покажем, что число нулей слева и справа от $x = 1/2$ одинаково. Допустим противное: число нулей слева $r < \left[\dfrac{2^n + m}{2}\right] + 1 = 2^{n-1} + l + 1$ (т. е. $r \leqslant 2^{n-1} + l$).

Рассмотрим вначале случай, когда $r = 2^{n-1} + l$. Так же, как в случае а), устанавливаем, что $\alpha(x)$ на $[0,\ 1/2)$ ведет себя как $\varphi_{2^n+l}(2x)$. Далее, в точке $x = 1/2$ нет перемены знака (всего нулей $2^n + 2l + 1$; слева $2^{n-1} + l$ и меньше, чем справа, т. е. справа $2^{n-1} + l + 1$ нуль; тем самым все нули исчерпаны).

Теперь для любого $x \in [0, 1/2)$ имеем, что $\alpha(x) \equiv \equiv \varphi_{2^{n-1}+l}(2x)$. Но по доказанному в а) при этих же x

$$\varphi_{2^{n-1}+l}(2x) \equiv \alpha_{2^n+2l}(x) = \alpha_{2^n+m-1}(x)$$

и у $\alpha_{2^n+2l}(x)$ тоже нет перемены знака в $x = 1/2$. Тогда $\alpha(x)$ не может быть ортогональной к $\alpha_{2^n+2l}(2x) = \alpha_{2^n+m-1} \times \times (x)$ на всем $[0, 1]$, так как эти функции совпадают на отрезке длины, большей, чем $1/2$, и принимают лишь значения ± 1. Это противоречие с условием теоремы показывает, что $r \neq 2^{n-1} + l$ в предположении, что справа нулей больше. Если же допустить, что $r < 2^{n-1} + l$, то в этом случае доказательство идет так же, как в случае а).

Итак, мы доказали, что при $m = 2l + 1$ и число «левых» и «правых» нулей одинаково — по $2^{n-1} + l$ и, таким образом, в точке $x = 1/2$ есть перемена знака. Теперь, так же как в пункте а), устанавливаем, что на $[0, 1/2)$ $\alpha(x) \equiv \varphi_{2^{n-1}+l}(2x)$, а на $(1/2, 1]$ $\alpha(x) \equiv -\varphi_{2^{n-1}+l}(2x - 1)$, если l четно, и $\alpha(x) \equiv \varphi_{2^{n-1}+l}(2x - 1)$, если l нечетно; в точке же $x = 1/2$ $\alpha(1/2) = 0$. Построенная так $\alpha(x)$ есть в точности функция Уолша $\varphi_{2^n+2l+1}(x)$, т. е. $\alpha_{2^n+m}(x) \equiv \equiv \varphi_{2^n+2l+1}(x)$, и в случае $m = 2l + 1$. Теорема доказана.

Примечание. Условия а) — в), как можно заметить из доказательста теоремы, определяют систему $\{\alpha_n(x)\}$ неоднозначно. Именно, если отбросить условие г), т. е. $\alpha_n(0) = 1$, то получим, что условиям теоремы удовлетворяет любая система вида $\{\varepsilon_n \varphi_n(x)\}$, где $\{\varphi_n(x)\}$ — система Уолша, а ε_n принимают значения ± 1 независимо друг от друга. Условие г) устраняет и эту неопределенность.

Владимирский политехнический институт

Поступило 27.IX.1977

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Walsh J. L., Aclosed set of ortogonal functions, Amer. J. Math., 45, № 1 (1923), 5—24.

[2] Byrnes J. S., Swick D. A., Instant Walsh functions, SIAM Rev., 12, № 1 (1970), 131.