



Общероссийский математический портал

В. А. Щербаков, А. Х. Табаров, Д. И. Пушкашу, О конгруэнциях группоидов, тесно связанных с квазигруппами, *Фундамент. и прикл. матем.*, 2008, том 14, выпуск 5, 237–251

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.175

19 марта 2025 г., 22:37:28



О конгруэнциях группоидов, тесно связанных с квазигруппами

В. А. ЩЕРБАКОВ

*Институт математики и информатики
Академии наук Молдовы
e-mail: scerb@math.md*

А. Х. ТАБАРОВ

*Таджикский национальный государственный университет
e-mail: tabarov63@rambler.ru*

Д. И. ПУШКАШУ

*Институт математики и информатики
Академии наук Молдовы
e-mail: pushkashu@yandex.ru*

УДК 512.548+512.53

Ключевые слова: левая квазигруппа, правая квазигруппа, группоид с делением, группоид с сокращением, конгруэнция, трансляция.

Аннотация

Приведены условия замкнутости («нормальности») конгруэнций левого (правого) группоида с делением, левого (правого) группоида с сокращением. Найдены условия простоты этих группоидов.

Abstract

V. A. Shcherbacov, A. Kh. Tabarov, D. I. Puşcaşu, On congruences of groupoids closely connected with quasigroups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 5, pp. 237–251.

Conditions when a congruence of a left (right) division groupoid and a left (right) cancellation groupoid is closed ("normal") are given. Conditions for the simplicity of the above-mentioned groupoids are obtained.

1. Введение

Первые определения левой и правой бинарной квазигруппы были даны Руфи Муфанг на языке существования решений некоторых уравнений [27] (см. также [10, 17]). Эти экзистенциальные определения (см. определение 7) используются и в настоящее время.

После публикации статьи [13] в алгебре достаточно естественно появились понятия левого и правого группоида с сокращением и делением. Позже Т. Ивэнс дал эквивалентное определение квазигруппы [1, 19, 20, 33] (см. определение 10).

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 5, с. 237–251.

© 2008 *Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»*

В данной работе приведены условия замкнутости («нормальности») конгруэнций левого (правого) группоида с делением, левого (правого) группоида с сокращением. Найдены условия простоты этих группоидов.

В [32] даны некоторые новые определения квазигруппы и группоидов, тесно связанных с квазигруппами. Другие условия, при выполнении которых группоид является квазигруппой, даны в [8, 15, 25, 28].

Для удобства читателей мы начинаем с определений, которые можно найти в [1, 4, 29, 33].

Бинарная операция — определённое на непустом множестве Q отображение $A: Q^2 \rightarrow Q$, такое что $D(A) = Q^2$, т. е. это отображение определено для любого элемента множества $Q \times Q$. Часто используются более традиционные обозначения бинарной операции; например, выражение $A(x, y) = z$ может быть записано в форме $x \cdot y = z$.

Определение 1. Бинарный группоид — это пара (Q, A) , где Q — множество, A — бинарная операция, определённая на Q .

Как обычно, произведение отображений — это их последовательное выполнение. Мы будем использовать такой порядок умножения отображений: если μ, ν — некоторые отображения, то $(\mu\nu)(x) = \mu(\nu(x))$.

Пусть (Q, \cdot) — группоид. Отображение $L_a: Q \rightarrow Q$, $L_ax = a \cdot x$ для всех $x \in Q$, является левой трансляцией группоида (Q, \cdot) относительно фиксированного элемента $a \in Q$. Отображение $R_a: Q \rightarrow Q$, $R_ax = x \cdot a$, является правой трансляцией.

Дадим следующие определения (см. [1, 4, 23, 24, 29]).

Определение 2. Группоид (G, \cdot) называют группоидом с левым сокращением, если выполнена импликация $a \cdot x = a \cdot y \implies x = y$ для всех $a, x, y \in G$, т. е. трансляция L_a — инъективное отображение для любого $a \in G$.

Пример 1. Пусть $x \circ y = 0 \cdot x + 3 \cdot y$ для всех $x, y \in \mathbb{Z}$, где $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ — кольцо целых чисел. Можно проверить, что (\mathbb{Z}, \circ) — группоид с левым сокращением.

Определение 3. Группоид (G, \cdot) называют группоидом с правым сокращением, если выполнена импликация $x \cdot a = y \cdot a \implies x = y$ для всех $a, x, y \in G$, т. е. трансляция R_a — инъективное отображение для любого $a \in G$.

Пример 2. Пусть $x \circ y = 2 \cdot x + 0 \cdot y$ для всех $x, y \in \mathbb{Z}$, где $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ — кольцо целых чисел. Можно проверить, что (\mathbb{Z}, \circ) — группоид с правым сокращением.

Определение 4. Группоид (G, \cdot) называют группоидом с сокращением, если это группоид с левым и правым сокращением.

Пример 3. Пусть $x \circ y = 2 \cdot x + 3 \cdot y$ для всех $x, y \in \mathbb{Z}$, где $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ — кольцо целых чисел. Можно проверить, что (\mathbb{Z}, \circ) — группоид с сокращением.

Определение 5. Группоид (G, \cdot) называется левым (правым) группоидом с делением, если отображение L_x (R_x) сюръективно для каждого $x \in G$.

Пример 4. Пусть $x \circ y = 0 \cdot x + [y/3]$ для всех $x, y \in \mathbb{Z}$, где $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ — кольцо целых чисел, $[3n] = n$, $[(3n + 1)] = n$, $[(3n + 2)] = n$. Можно проверить, что (\mathbb{Z}, \circ) — группоид с левым делением.

Пример 5. Пусть $x \circ y = [x/2] + 0 \cdot y$ для всех $x, y \in \mathbb{Z}$, где $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ — кольцо целых чисел, $[2n] = n$, $[(2n + 1)] = n$. Можно проверить, что (\mathbb{Z}, \circ) — группоид с правым делением.

Определение 6. Группоид (G, \cdot) называется группоидом с делением, если он одновременно левый и правый группоид с делением.

Пример 6. Пусть $x \circ y = [x/2] + [y/3]$ для всех $x, y \in \mathbb{Z}$, где $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ — кольцо целых чисел. Можно проверить, что (\mathbb{Z}, \circ) — группоид с делением.

Пример 7. Пусть $x \circ y = x^2 + y^3$ для всех $x, y \in \mathbb{C}$, где $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ — поле комплексных чисел. Можно проверить, что (\mathbb{C}, \circ) — группоид с делением.

Определение 7. Группоид (Q, \circ) называют *правой квазигруппой* (*левой квазигруппой*), если для любых фиксированных элементов $a, b \in Q$ существует единственное решение $x \in Q$ уравнения $x \circ a = b$ (соответственно $a \circ x = b$).

В этом случае любая правая (соответственно левая) трансляция группоида (Q, \circ) является биективным отображением множества Q в себя.

Пример 8. Пусть $x \circ y = 0 \cdot x - y$ для всех $x, y \in \mathbb{Z}$, где $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ — кольцо целых чисел. Можно проверить, что (\mathbb{Z}, \circ) — левая квазигруппа.

Определение 8. Квазигруппу, являющуюся одновременно левой и правой, называют *квазигруппой*.

Пример 9. Пусть $x \circ y = x - y$ для всех $x, y \in \mathbb{Z}$, где $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ — кольцо целых чисел. Можно проверить, что (\mathbb{Z}, \circ) — квазигруппа.

Замечание 1. Группоиды из примеров 1, 2, 3, 4, 5, 8 и 9 медиальны, т. е. в этих группоидах выполняется тождество медиальности $(x \circ y) \circ (u \circ v) = (x \circ u) \circ (y \circ v)$ и, в частности, выполняется тождество $(x \circ x) \circ (u \circ v) = (x \circ u) \circ (x \circ v)$.

Определение 9 [3, 27]. Бинарный группоид (Q, A) с такой бинарной операцией A , что в равенстве $A(x_1, x_2) = x_3$ любые два элемента из множества $\{x_1, x_2, x_3\}$ однозначно определяют третий элемент, называют *бинарной квазигруппой*.

Из определения 9 следует, что с любой квазигруппой (Q, A) можно связать ещё $(3! - 1) = 5$ квазигрупп, называемых парастрофами квазигруппы (Q, A) :

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2) = x_3 &\iff A^{(12)}(x_2, x_1) = x_3 \iff A^{(13)}(x_3, x_2) = x_1 \iff \\ &\iff A^{(23)}(x_1, x_3) = x_2 \iff A^{(123)}(x_2, x_3) = x_1 \iff A^{(132)}(x_3, x_1) = x_2. \end{aligned}$$

Обозначим:

- операцию (12)-парастрофа квазигруппы (Q, \cdot) через $*$;
- операцию (13)-парастрофа квазигруппы (Q, \cdot) через $/$;
- операцию (23)-парастрофа квазигруппы (Q, \cdot) через \backslash ;
- операцию (123)-парастрофа квазигруппы (Q, \cdot) через $//$;
- операцию (132)-парастрофа квазигруппы (Q, \cdot) через $\backslash\backslash$.

Мы определили левые и правые трансляции группоида и, следовательно, квазигруппы. Но для квазигрупп можно определить и третий вид трансляций, а

именно средние трансляции. Отображение $P_a: Q \rightarrow Q, x \cdot P_x = a$ для всех $x \in Q$ называется средней трансляцией квазигруппы (Q, \cdot) относительно элемента a [2, 32].

В таблице 1 приведены соотношения между различными видами трансляций в различных парастрофах квазигруппы (Q, \cdot) [11, 18]. Фактически эта таблица в неявном виде есть в [2].

Таблица 1

	ε	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
R	R	L	R^{-1}	P	P^{-1}	L^{-1}
L	L	R	P^{-1}	L^{-1}	R^{-1}	P
P	P	P^{-1}	L^{-1}	R	L	R^{-1}
R^{-1}	R^{-1}	L^{-1}	R	P^{-1}	P	L
L^{-1}	L^{-1}	R^{-1}	P	L	R	P^{-1}
P^{-1}	P^{-1}	P	L	R^{-1}	L^{-1}	R

В данной статье под алгеброй (алгебраической структурой) будем понимать множество A с некоторым набором операций, определённых на A .

Т. Ивэнс [20] определил бинарную квазигруппу как алгебру с тремя бинарными операциями и тождествами

$$x \cdot (x \setminus y) = y, \quad (1)$$

$$(y / x) \cdot x = y, \quad (2)$$

$$x \setminus (x \cdot y) = y, \quad (3)$$

$$(y \cdot x) / x = y. \quad (4)$$

Определение 10 [1, 4, 5, 15, 20, 29]. Алгебра $(Q, \cdot, \setminus, /)$ с тождествами (1)–(4) называется *квазигруппой*.

В [5] алгебры $(Q, \cdot, \setminus, /)$ с тождествами (1)–(4) названы *e-квазигруппами* (эквациональными квазигруппами). А. И. Мальцев [8, 9] назвал такие квазигруппы *примитивными квазигруппами*.

Эквивалентность определений 8 и 10 — хорошо известный факт [1, 5, 9, 15].

Используя таблицу 1 легко проверить, что если (Q, \cdot) — квазигруппа, то в алгебре $(Q, \cdot, //)$ выполнены тождества

$$(x // y) \cdot x = y, \quad (5)$$

$$x // (y \cdot x) = y; \quad (6)$$

если (Q, \cdot) — квазигруппа, то в алгебре $(Q, \cdot, \setminus \setminus)$ выполнены тождества

$$x \cdot (y \setminus \setminus x) = y, \quad (7)$$

$$(x \cdot y) \setminus \setminus x = y. \quad (8)$$

Действительно, переписав тождества (1)–(8) на языке трансляций, мы получим

$$x \cdot (x \setminus y) = y \iff L_x L_x \setminus y = y, \quad (9)$$

$$(y / x) \cdot x = y \iff R_x R_x / y = y, \quad (10)$$

$$x \setminus (x \cdot y) = y \iff L_x \setminus L_x y = y, \quad (11)$$

$$(y \cdot x) / x = y \iff R_x / R_x y = y, \quad (12)$$

$$(x // y) \cdot x = y \iff R_x L_x // y = y, \quad (13)$$

$$x // (y \cdot x) = y \iff L_x // R_x y = y, \quad (14)$$

$$x \cdot (y \setminus \setminus x) = y \iff L_x R_x \setminus \setminus y = y, \quad (15)$$

$$(x \cdot y) \setminus \setminus x = y \iff R_x \setminus \setminus L_x y = y. \quad (16)$$

Теорема 1 [32].

1. Группоид (Q, \cdot) является левым группоидом с делением, если и только если существует такой левый группоид с сокращением (Q, \setminus) , что в алгебре (Q, \cdot, \setminus) выполнено тождество (1).
2. Группоид (Q, \cdot) является правым группоидом с делением, если и только если существует такой правый группоид с сокращением $(Q, /)$, что в алгебре $(Q, \cdot, /)$ выполнено тождество (2).
3. Группоид (Q, \cdot) является левым группоидом с сокращением, если и только если существует такой левый группоид с делением (Q, \setminus) , что в алгебре (Q, \cdot, \setminus) выполнено тождество (3).
4. Группоид (Q, \cdot) является правым группоидом с сокращением, если и только если существует такой правый группоид с делением $(Q, /)$, что в алгебре $(Q, \cdot, /)$ выполнено тождество (4).
5. Группоид (Q, \cdot) является левой квазигруппой, если и только если существует такой группоид (Q, \setminus) , что в алгебре (Q, \cdot, \setminus) выполнены тождества (1) и (3).
6. Группоид (Q, \cdot) является правой квазигруппой, если и только если существует такой группоид $(Q, /)$, что в алгебре $(Q, \cdot, /)$ выполнены тождества (2) и (4).
7. Группоид (Q, \cdot) является группоидом с делением, если и только если существуют такой правый группоид с сокращением $(Q, /)$ и такой левый группоид с сокращением (Q, \setminus) , что в алгебре $(Q, \cdot, /, \setminus)$ выполнены тождества (1) и (2).
8. Группоид (Q, \cdot) является группоидом с сокращением, если и только если существуют такой правый группоид с делением $(Q, /)$ и такой левый группоид с делением (Q, \setminus) , что в алгебре $(Q, \cdot, /, \setminus)$ выполнены тождества (3) и (4).

9. группоид (Q, \cdot) является правым группоидом с делением, если и только если существует такой левый группоид с сокращением $(Q, //)$, что в алгебре $(Q, \cdot, //)$ выполнено тождество (5).
10. группоид (Q, \cdot) является правым группоидом с сокращением, если и только если существует такой левый группоид с делением $(Q, //)$, что в алгебре $(Q, \cdot, //)$ выполнено тождество (6).
11. группоид (Q, \cdot) является левым группоидом с сокращением, если и только если существует такой левый группоид с делением $(Q, \backslash\backslash)$, что в алгебре $(Q, \cdot, \backslash\backslash)$ выполнено тождество (7).
12. группоид (Q, \cdot) является левым группоидом с делением, если и только если существует такой правый группоид с сокращением $(Q, \backslash\backslash)$, что в алгебре $(Q, \cdot, \backslash\backslash)$ выполнено тождество (8).
13. группоид (Q, \cdot) является правой квазигруппой, если и только если существует такой группоид $(Q, //)$, что в алгебре $(Q, \cdot, //)$ выполнены тождества (5) и (6).
14. группоид (Q, \cdot) является левой квазигруппой, если и только если существует такой группоид $(Q, \backslash\backslash)$, что в алгебре $(Q, \cdot, \backslash\backslash)$ выполнены тождества (7) и (8).
15. группоид (Q, \cdot) является группоидом с делением, если и только если существуют такой левый группоид с сокращением $(Q, //)$ и такой правый группоид с сокращением $(Q, \backslash\backslash)$, что в алгебре $(Q, \cdot, //, \backslash\backslash)$ выполнены тождества (5) и (8).
16. группоид (Q, \cdot) является группоидом с сокращением, если и только если существуют такой правый группоид с делением $(Q, //)$ и такой левый группоид с делением $(Q, \backslash\backslash)$, что в алгебре $(Q, \cdot, //, \backslash\backslash)$ выполнены тождества (6) и (7).

Некоторые случаи теоремы 1, например 5–7, хорошо известны (случай 5 — см. [30], случай 7 — см. [6]).

2. Конгруэнции некоторых классов группоидов

Известно, что гомоморфным образом квазигруппы (Q, \cdot) является группоид с делением [13]. Поэтому в квазигруппе (Q, \cdot) была определена «обычная» с точки зрения универсальной алгебры [15] конгруэнция и так называемая нормальная конгруэнция. Нормальная конгруэнция квазигруппы (Q, \cdot) является «обычной» конгруэнцией квазигруппы $(Q, \cdot, /, \backslash)$ [1, 4].

Одним из самых важных свойств е-квазигруппы $(Q, \cdot, \backslash, /)$ (примитивной квазигруппы) является следующее: любая конгруэнция е-квазигруппы $(Q, \cdot, \backslash, /)$ — нормальная конгруэнция квазигруппы (Q, \cdot) ; любая нормальная конгруэнция квазигруппы (Q, \cdot) — конгруэнция примитивной квазигруппы $(Q, \cdot, \backslash, /)$ [1, 4, 5, 9].

Аналогично случаю квазигрупп мы изучаем связи между конгруэнциями некоторых группоидов, которые определены экзистенциально и эквационоально.

Обратим внимание на следующую проблему Брака—Белоусова: какие лупы G обладают свойством, что при любом мультипликативном гомоморфизме их гомоморфный образ является лупой [14, с. 92]? Каковы квазигруппы или лупы, в которых все конгруэнции являются нормальными [1, проблема 20, с. 221]?

Определение 11 [15]. Предположим, что (Q, \circ) и $(G, *)$ — два бинарных группоида. Отображение $h: Q \rightarrow G$ называется гомоморфным отображением из (Q, \circ) в $(G, *)$, если $h(a_1 \circ a_2) = ha_1 * ha_2$ для каждого a_1, a_2 из Q .

Если, кроме того, отображение h — сюръекция, то тогда $(G, *)$ является гомоморфным образом (Q, \circ) .

Определение 12 [16]. Эквивалентность θ является конгруэнцией группоида (Q, \circ) , если следующие импликации верны для всех $x, y, z \in Q$:

$$x \theta y \implies (z \circ x) \theta (z \circ y), \quad x \theta y \implies (x \circ z) \theta (y \circ z).$$

По аналогии эквивалентность θ — конгруэнция алгебры $(Q, \circ, /)$, где $\circ, /$ — бинарные операции, если θ допустима относительно любой левой и правой трансляции любой операции из сигнатуры этой алгебры, т. е. следующие импликации верны для всех $x, y, z \in Q$ [5, 16]:

$$\begin{aligned} x \theta y &\implies (z \circ x) \theta (z \circ y), & x \theta y &\implies (x \circ z) \theta (y \circ z), \\ x \theta y &\implies (z/x) \theta (z/y), & x \theta y &\implies (x/z) \theta (y/z). \end{aligned}$$

Определение 13 [1, 4]. Конгруэнция θ квазигруппы (Q, \circ) называется нормальной, если для всех $x, y, z \in Q$ верны импликации

$$(z \circ x) \theta (z \circ y) \implies x \theta y, \quad (x \circ z) \theta (y \circ z) \implies x \theta y.$$

Определения различных бинарных отношений в некоторых классах группоидов можно найти в [23, 24]. Например, на группоиды обобщено понятие нормальной конгруэнции квазигруппы: конгруэнция θ — нормальная конгруэнция группоида (Q, \circ) , если для всех $x, y, z \in Q$ верны импликации

$$(z \circ x) \theta (z \circ y) \implies x \theta y, \quad (x \circ z) \theta (y \circ z) \implies x \theta y.$$

Понятия конгруэнции, фактор-алгебры и гомоморфизма тесно связаны (см. подробнее [15, 16]). Напомним, что любой гомоморфизм h группоида (Q, \cdot) определяет конгруэнцию θ по следующему правилу: $a \theta b \iff h(a) = h(b)$ для всех $a, b \in Q$. Конгруэнцию θ называют ядром гомоморфизма h и обозначают $\ker(h)$.

Теорема 2 [1, 9, 15]. Пусть $h: A \rightarrow B$ — гомоморфизм алгебры A на всю алгебру B . Тогда существует изоморфизм β из $A/\ker(h)$ в B , определённый по правилу $h = \beta \circ \nu$, где ν — естественный гомоморфизм из A в $A/\ker(h)$.

Пусть h — гомоморфизм квазигруппы (Q, \cdot) на группоид (H, \circ) . Если (H, \circ) — квазигруппа, то $\ker(h)$ — нормальная конгруэнция [1, 29].

С другой стороны, если θ — нормальная конгруэнция квазигруппы (Q, \cdot) , то θ определяет гомоморфизм h квазигруппы (Q, \cdot) на некоторую квазигруппу (Q', \circ) в соответствии с правилом $\theta(x) \circ \theta(y) = \theta(x \cdot y)$, где $\theta(x), \theta(y), \theta(x \cdot y) \in Q/\theta$ [1, 29].

Определение 14. Пусть h — гомоморфизм некоторого группоида (Q, \cdot) со свойством T , $\theta = \ker(h)$. Мы будем называть θ и h T -замкнутыми (часто просто «замкнутыми»), если $h(Q, \cdot)$ обладает свойством T .

Например, мы назовём конгруэнцию $\theta = \ker(h)$ левого группоида с сокращением (Q, \cdot) замкнутой относительно сокращения слева, если $h(Q, \cdot)$ — левый группоид с сокращением.

Приведём условия замкнутости конгруэнций в классах группоидов, которые связаны с квазигруппами. Иными словами, приведём условия, когда конгруэнция левого (правого) группоида с делением (с сокращением) (Q, \cdot) является «нормальной».

Следствие 1.

1. Конгруэнция θ левого группоида с делением (Q, \cdot) замкнута, если и только если θ — конгруэнция соответствующей алгебры (Q, \cdot, \setminus) с тождеством (1).

Доказательство. Случай 1. Легко видеть, если θ — конгруэнция алгебры (Q, \cdot, \setminus) , то θ — конгруэнция левого группоида с делением (Q, \cdot) .

Докажем, что если θ — конгруэнция алгебры (Q, \cdot, \setminus) , то θ — замкнутая конгруэнция в (Q, \cdot) . Пусть h — гомоморфизм, который соответствует конгруэнции θ . Алгебра (Q, \cdot, \setminus) лежит в многообразии алгебр \mathfrak{A} , которое состоит из алгебр с такими двумя бинарными операциями в сигнатуре (\cdot, \setminus) , что эти алгебры удовлетворяют тождеству (1). Так как \mathfrak{A} является многообразием [5], то $h(Q, \cdot, \setminus) \in \mathfrak{A}$. По теореме 1 $h(Q, \cdot)$ является левым группоидом с делением. Таким образом, θ — замкнутая конгруэнция в (Q, \cdot) .

Обратно. Предположим, что θ — замкнутая конгруэнция группоида (Q, \cdot) . Тогда любой соответствующий конгруэнции θ гомоморфизм h обладает свойством, что $h(Q, \odot)$ — левый группоид с делением. Определим операцию \otimes на множестве hQ следующим способом: $h(x) \otimes h(y) \stackrel{\text{оп.}}{=} h(x \setminus y)$ для всех $x, y \in Q$. Тогда мы имеем следующие равенства:

$$h(y) = h(x \cdot (x \setminus y)) = h(x) \odot h(x \setminus y) = h(x) \odot (h(x) \otimes h(y)).$$

Поэтому в алгебре (hQ, \odot, \otimes) верно тождество (1). Таким образом, h — гомоморфное отображение алгебры (Q, \cdot, \setminus) на всю алгебру (hQ, \odot, \otimes) . Следовательно, гомоморфизм h определяет конгруэнцию θ на алгебре (Q, \cdot, \setminus) , т. е. θ — конгруэнция алгебры (Q, \cdot, \setminus) . \square

Случаи 2–16 формулируются и доказываются аналогично.

3. Простые группоиды

Пусть (Q, \cdot) — группоид, $\mathbb{T}(Q, \cdot) = \{L_a, R_b \mid a, b \in Q\}$. Полуруппу, порождённую произведениями всех левых и правых трансляций группоида (Q, \cdot) , будем называть *полуруппой умножений группоида* (Q, \cdot) или *мультипликативной полуруппой группоида* (Q, \cdot) . Обозначим эту полуруппу через $\Pi(Q, \cdot)$.

Элементы полуруппы Π — слова вида $T_1^{\alpha_1} T_2^{\alpha_2} \dots T_n^{\alpha_n}$, где $T_i \in \mathbb{T}$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$.

Определение 15. Группу, порождённую всеми левыми и правыми трансляциями квазигруппы (Q, \cdot) , будем обозначать $M(Q, \cdot)$ или M для краткости.

Элементы группы M — слова вида $T_1^{\alpha_1} T_2^{\alpha_2} \dots T_n^{\alpha_n}$, где $T_i \in \mathbb{T}$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ [1].

Определение 16 [1, 31]. Если θ — бинарное отношение на множестве Q , α — отображение множества Q и из условия $x \theta y$ следует $\alpha x \theta \alpha y$ для всех $(x, y) \in \theta$, то мы будем говорить, что отображение α *допустимо* относительно бинарного отношения θ .

Более того, мы будем говорить, что отображение θ допустимо относительно отображения α . Используя эту терминологию, можно сказать, что любая конгруэнция квазигруппы (Q, \cdot) допустима относительно любого элемента полугруппы $\Pi(Q, \cdot)$, любая нормальная конгруэнция квазигруппы (Q, \cdot) допустима относительно любого элемента группы $M(Q, \cdot)$.

Определение 17. Группоид (Q, \cdot) назовём *строго простым*, если его единственными конгруэнциями являются диагональная $\hat{Q} = \{(x, x) \mid x \in Q\}$ и универсальная $Q \times Q$.

Определение 18. Группоид (Q, \cdot) назовём *простым*, если его единственными замкнутыми (нормальными) конгруэнциями являются диагональная $\hat{Q} = \{(x, x) \mid x \in Q\}$ и универсальная $Q \times Q$.

Приведём следствие теоремы 1.

Следствие 2.

1. Эквивалентность θ — замкнутая конгруэнция группоида с левым делением (Q, \cdot) , если и только если θ допустима относительно любого элемента полугруппы

$$\Pi_1(Q, \cdot, \backslash) = \langle L_x, R_x, L_x^{\backslash}, R_x^{\backslash} \mid x \in Q \rangle,$$

где $L_x L_x^{\backslash} = \varepsilon$ для всех $x \in Q$.

2. Эквивалентность θ — замкнутая конгруэнция группоида с правым делением (Q, \cdot) , если и только если θ допустима относительно любого элемента полугруппы

$$\Pi_2(Q, \cdot, /) = \langle L_x, R_x, L_x^{\prime}, R_x^{\prime} \mid x \in Q \rangle,$$

где $R_x R_x^{\prime} = \varepsilon$ для всех $x \in Q$.

3. Эквивалентность θ — замкнутая конгруэнция группоида с левым сокращением (Q, \cdot) , если и только если θ допустима относительно любого элемента полугруппы

$$\Pi_3(Q, \cdot, \backslash) = \langle L_x, R_x, L_x^{\backslash}, R_x^{\backslash} \mid x \in Q \rangle,$$

где $L_x L_x^{\backslash} = \varepsilon$ для всех $x \in Q$.

4. Эквивалентность θ — замкнутая конгруэнция группоида с правым сокращением (Q, \cdot) , если и только если θ допустима относительно любого элемента полугруппы

$$\Pi_4(Q, \cdot, /) = \langle L_x, R_x, L_x^{\prime}, R_x^{\prime} \mid x \in Q \rangle,$$

где $R_x R_x^{\prime} = \varepsilon$ для всех $x \in Q$.

5. Эквивалентность θ — замкнутая конгруэнция левой квазигруппы (Q, \cdot) , если и только если θ допустима относительно любого элемента полугруппы

$$\Pi_5(Q, \cdot, \backslash) = \langle L_x, R_x, L_x^\backslash, R_x^\backslash \mid x \in Q \rangle,$$

где $L_x^\backslash = (L_x)^{-1}$ для всех $x \in Q$.

6. Эквивалентность θ — замкнутая конгруэнция правой квазигруппы (Q, \cdot) , если и только если θ допустима относительно любого элемента полугруппы

$$\Pi_6(Q, \cdot, /) = \langle L_x, R_x, L_x', R_x' \mid x \in Q \rangle,$$

где $R_x' = (R_x)^{-1}$ для всех $x \in Q$.

7. Эквивалентность θ — замкнутая конгруэнция группоида с делением (Q, \cdot) , если и только если θ допустима относительно любого элемента полугруппы

$$\Pi_7(Q, \cdot, \backslash) = \langle L_x, R_x, L_x^\backslash, R_x^\backslash, L_x', R_x' \mid x \in Q \rangle,$$

где $L_x L_x^\backslash = \varepsilon$ и $R_x R_x' = \varepsilon$ для всех $x \in Q$.

8. Эквивалентность θ — замкнутая конгруэнция группоида с сокращением (Q, \cdot) , если и только если θ допустима относительно любого элемента полугруппы

$$\Pi_8(Q, \cdot, \backslash) = \langle L_x, R_x, L_x^\backslash, R_x^\backslash, L_x', R_x' \mid x \in Q \rangle,$$

где $L_x^\backslash L_x = \varepsilon$ и $R_x' R_x = \varepsilon$ для всех $x \in Q$.

9. Эквивалентность θ — замкнутая конгруэнция группоида с правым делением (Q, \cdot) , если и только если θ допустима относительно любого элемента полугруппы

$$\Pi_9(Q, \cdot, //) = \langle L_x, R_x, L_x'', R_x'' \mid x \in Q \rangle,$$

где $R_x L_x'' = \varepsilon$ для всех $x \in Q$.

10. Эквивалентность θ — замкнутая конгруэнция группоида с правым сокращением (Q, \cdot) , если и только если θ допустима относительно любого элемента полугруппы

$$\Pi_{10}(Q, \cdot, //) = \langle L_x, R_x, L_x'', R_x'' \mid x \in Q \rangle,$$

где $L_x'' R_x = \varepsilon$ для всех $x \in Q$.

11. Эквивалентность θ — замкнутая конгруэнция группоида с левым сокращением (Q, \cdot) , если и только если θ допустима относительно любого элемента полугруппы

$$\Pi_{11}(Q, \cdot, \backslash\backslash) = \langle L_x, R_x, L_x^{\backslash\backslash}, R_x^{\backslash\backslash} \mid x \in Q \rangle,$$

где $R_x^{\backslash\backslash} L_x = \varepsilon$ для всех $x \in Q$.

12. Эквивалентность θ — замкнутая конгруэнция группоида с левым делением (Q, \cdot) , если и только если θ допустима относительно любого элемента

полугруппы

$$\Pi_{12}(Q, \cdot, \backslash\backslash) = \langle L_x, R_x, L_x^{\backslash\backslash}, R_x^{\backslash\backslash} \mid x \in Q \rangle,$$

где $L_x R_x^{\backslash\backslash} = \varepsilon$ для всех $x \in Q$.

13. Эквивалентность θ — замкнутая конгруэнция правой квазигруппы (Q, \cdot) , если и только если θ допустима относительно любого элемента полугруппы

$$\Pi_{13}(Q, \cdot, //) = \langle L_x, R_x, L_x^{//}, R_x^{//} \mid x \in Q \rangle,$$

где $L_x^{//} = (R_x)^{-1}$ для всех $x \in Q$.

14. Эквивалентность θ — замкнутая конгруэнция левой квазигруппы (Q, \cdot) , если и только если θ допустима относительно любого элемента полугруппы

$$\Pi_{14}(Q, \cdot, \backslash\backslash) = \langle L_x, R_x, L_x^{\backslash\backslash}, R_x^{\backslash\backslash} \mid x \in Q \rangle,$$

где $R_x^{\backslash\backslash} = (L_x)^{-1}$ для всех $x \in Q$.

15. Эквивалентность θ — замкнутая конгруэнция группоида с делением (Q, \cdot) , если и только если θ допустима относительно любого элемента полугруппы

$$\Pi_{15}(Q, \cdot, //, \backslash\backslash) = \langle L_x, R_x, L_x^{\backslash\backslash}, R_x^{\backslash\backslash}, L_x^{//}, R_x^{//} \mid x \in Q \rangle,$$

где $R_x L_x^{//} = \varepsilon$ и $L_x R_x^{\backslash\backslash} = \varepsilon$ для всех $x \in Q$.

16. Эквивалентность θ — замкнутая конгруэнция группоида с сокращением (Q, \cdot) , если и только если θ допустима относительно любого элемента полугруппы

$$\Pi_{16}(Q, \cdot, //, \backslash\backslash) = \langle L_x, R_x, L_x^{\backslash\backslash}, R_x^{\backslash\backslash}, L_x^{//}, R_x^{//} \mid x \in Q \rangle,$$

где $L_x^{//} R_x = \varepsilon$ и $R_x^{\backslash\backslash} L_x = \varepsilon$ для всех $x \in Q$.

17. Эквивалентность θ — нормальная конгруэнция квазигруппы (Q, \cdot) , если и только если θ допустима относительно любого элемента группы $M(Q, \cdot)$.

Доказательство. Случай 1. Если эквивалентность θ допустима относительно любого элемента полугруппы $\Pi_1(Q, \cdot, \backslash\backslash)$, то она допустима относительно любого элемента множества

$$\mathbb{T}(Q, \cdot, \backslash) = \{L_x^{(\cdot)}, R_x^{(\cdot)}, L_x^{(\backslash)}, R_x^{(\backslash)} \mid x \in Q\}.$$

Тогда по теореме 1 эта эквивалентность — замкнутая конгруэнция группоида (Q, \cdot) .

Если θ — замкнутая конгруэнция группоида (Q, \cdot) , то по теореме 1 эта конгруэнция допустима относительно любого элемента множества $\mathbb{T}(Q, \cdot, \backslash)$ и относительно любой конечной композиции элементов из этого множества, поэтому θ допустима относительно любого элемента полугруппы $\Pi_1(Q, \cdot, \backslash)$.

Случаи 2—16 доказываются аналогично.

Случай 17. Доказательство можно найти в [1, 2, 4]. Если θ — нормальная конгруэнция квазигруппы (Q, \cdot) , то, учитывая случаи 5, 6, мы имеем, что θ

допустима относительно любого элемента полугруппы

$$\Pi_{17}(Q, \cdot, \backslash, /) = \langle L_x, R_x, (L_x)^{-1}, R_x \backslash, L_x /, (R_x)^{-1} \mid x \in Q \rangle.$$

Легко убедиться, что $M \subseteq \Pi_{17}$.

Из определения 13 следует, что если эквивалентность θ множества Q допустима относительно любого элемента группы $M(Q, \cdot)$, то θ — нормальная конгруэнция квазигруппы (Q, \cdot) . \square

Замечание 2. Случай 17 следствия 2 показывает, что, вообще говоря, условия этого следствия можно ослабить. Конгруэнции группоидов с делением изучались в [6].

Следствие 3.

1. Если в группоиде с левым делением (Q, \cdot) выполняется условие $\mathbb{T}(Q, \cdot, \backslash) \subseteq \Pi(Q, \cdot)$, то в группоиде (Q, \cdot) все конгруэнции замкнуты.

Доказательство. Доказательство следует из следствия 2. \square

Случаи 2—17 формулируются и доказываются аналогично.

Лемма 1. Эквивалентность θ является конгруэнцией группоида (Q, \cdot) , если и только если

$$\omega\theta(x) \subseteq \theta(\omega x) \quad (17)$$

для всех $\omega \in \mathbb{T}(Q, \cdot) = \{L_a, R_b \mid a, b \in Q\}$, $x \in Q$.

Доказательство. Пусть θ — отношение эквивалентности и для всех $\omega \in \mathbb{T}$ выполнено $\omega\theta(x) \subseteq \theta(\omega x)$. Докажем, что из $a \theta b$ для всех $c \in Q$ следует $ca \theta cb$ и $ac \theta bc$.

По определению эквивалентности θ имеем, что $a \theta b$ эквивалентно $a \in \theta(b)$. Тогда $ca \in c\theta(b) \subseteq \theta(cb)$, $ca \theta cb$. Аналогично из $a \theta b$ следует $ac \theta bc$.

Докажем обратное утверждение. Пусть θ — конгруэнция. Докажем что $c\theta(a) \subseteq \theta(ca)$ для всех $c, a \in Q$. Пусть $x \in c\theta(a)$. Тогда $x = cy$, где $y \in \theta(a)$, т. е. $y \theta a$. Тогда, так как θ — конгруэнция, мы получаем $cy \theta ca$. Следовательно, $x = cy \in \theta(ca)$. Таким образом, $L_c\theta \subseteq \theta(ca)$.

Аналогично доказывается, что $R_c\theta(a) \subseteq \theta(ac)$. \square

Замечание 3. Для квазигрупп лемма 1 доказана в [31] (см. также [34]).

Следствие 4. Эквивалентность θ является конгруэнцией группоида (Q, \cdot) , если и только если $\omega\theta(x) \subseteq \theta(\omega x)$ для всех $x \in Q$, $\omega \in \Pi(Q, \cdot)$.

Доказательство. Доказательство следует из леммы 1 и факта, что полугруппа Π порождается множеством \mathbb{T} . \square

Следствие 5. Группоид (Q, \cdot) строго прост, если и только если только эквивалентности $\hat{Q} = \{(x, x) \mid x \in Q\}$ и $Q \times Q$ удовлетворяют условию (17).

Простота группоидов используется, например, в [26].

Следствие 6.

1. Конгруэнция θ левого группоида с делением (Q, \cdot) замкнута (нормальна), если и только если θ обладает свойством $\omega\theta(x) \subseteq \theta(\omega x)$ для всех

$$\omega \in \Pi_1(Q, \cdot) = \langle L_x, R_x, L_x^\backslash, R_x^\backslash \mid x \in Q \rangle,$$

где $L_x L_x^\backslash = \varepsilon$.

Доказательство. Доказательство следует из следствий 2 и 4. □

Случаи 2–17 формулируются и доказываются аналогично.

Сформулируем некоторые определения из [7, 21].

Определение 19. Будем говорить, что полугруппа G действует на множестве M , если для любой пары элементов (g, m) , $g \in G$, $m \in M$, элемент $(gm) \in M$ определён и, кроме того, $g_1(g_2(m)) = (g_1 g_2)(m)$ и $e(m) = m$ для всех $m \in M$, $g_1, g_2 \in G$. Здесь e — единичный элемент полугруппы G .

Множество $Gm = \{gm \mid g \in G\}$ называют орбитой элемента m .

Разбиение множества M на непересекающиеся подмножества M_α называют разбиением на блоки относительно полугруппы G , если для любого M_α и любого $g \in G$ существует такое подмножество M_β , что $gM_\alpha \subseteq M_\beta$.

Очевидно, существуют тривиальные разбиения множества M , а именно разбиение в одноэлементные блоки и разбиение в один блок.

Если не существует разбиения множества M в нетривиальные блоки, то полугруппа G будет называться примитивной. Иными словами, полугруппа G действует на множестве M примитивно.

В [22] доказано, что квазигруппа (Q, \cdot) проста, если и только если группа $M(Q, \cdot)$ действует на множестве Q как примитивная группа подстановок.

Повторяя часть доказательства теоремы D из [12], мы можем доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Группоид (Q, \cdot) строго прост, если и только если мультипликативная полугруппа $\Pi(Q, \cdot)$ примитивна.*

Доказательство. Предположим, что полугруппа $\Pi(Q, \cdot)$ непримитивна, т. е. на множестве Q существует некоторое нетривиальное разбиение \mathcal{P} , $Q = \bigcup Q_b$, $b \in Q$, которое является системой импримитивности полугруппы $\Pi(Q, \cdot)$. Определим эквивалентность θ на множестве Q следующим образом: $\theta(b) = Q_b$, если и только если $b \in Q_b$.

Из определения действия полугруппы $\Pi(Q, \cdot)$ на множестве Q и определения системы импримитивности мы имеем, что $T(Q_b) \subseteq Q_{T(b)}$ для всех $T \in \Pi(Q, \cdot)$, $Q_b \in \mathcal{P}$. Переходя к смежным классам эквивалентности θ , мы получаем следующее свойство этой эквивалентности: $T\theta(b) \subseteq \theta(Tb)$ для всех $b \in Q$, $T \in \Pi(Q, \cdot)$. Отсюда и из леммы 1 следует, что θ — нетривиальная конгруэнция группоида (Q, \cdot) .

Если мы предполагаем, что группоид (Q, \cdot) не является простым группоидом, т. е. на множестве Q существует нетривиальная конгруэнция θ , то классы смежности эквивалентности $\theta(a)$, $a \in Q$, дают нам разбиение множества Q , которое является системой импримитивности полугруппы $\Pi(Q, \cdot)$. \square

Замечание 4. Теорема 3 верна для любой квазигруппы (Q, \cdot) .

Следствие 7.

1. Левый группоид с делением (Q, \cdot) является простым, если и только если мультипликативная полугруппа $\Pi_1(Q, \cdot, \setminus)$ действует примитивно на множестве Q .

Доказательство. Утверждение вытекает из следствия 2 и теоремы 3. \square

Случаи 2–17 формулируются и доказываются аналогично.

Литература

- [1] Белоусов В. Д. Основы теории квазигрупп и луп. — М.: Наука, 1967.
- [2] Белоусов В. Д. О группе, ассоциированной квазигруппе // *Мат. исслед.* — 1969. — Т. 4, № 3. — С. 21–39.
- [3] Белоусов В. Д. n -арные квазигруппы. — Кишинёв: Штиинца, 1971.
- [4] Белоусов В. Д. Элементы теории квазигрупп: спецкурс. — Кишинёв: Изд-во Кишинёвского гос. ун-та, 1981.
- [5] Биркгоф Г. Теория решёток. — М.: Наука, 1984.
- [6] Валуцэ И. И., Продан Н. И. Решётки конгруэнций на группоидах с делением и на их полугруппах элементарных трансляций // *Общая алгебра и дискретная геометрия.* — 1980. — Т. 159. — С. 18–21.
- [7] Каргаполов М. И., Мерзляков М. Ю. Основы теории групп. — М.: Наука, 1977.
- [8] Мальцев А. И. Тожественные отношения на многообразиях квазигрупп // *Мат. сб.* — 1966. — Т. 69, № 1. — С. 3–12.
- [9] Мальцев А. И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1976.
- [10] Сушкевич А. К. Теория обобщённых групп. — Киев, ДНТВУ, 1937.
- [11] Щербаков В. А. Об автоморфизмах и конгруэнциях квазигрупп: Дис... канд. физ.-мат. наук. — ИМ АН МССР, 1991.
- [12] Щукин К. К. О простых медиальных квазигруппах // *Мат. исслед.* — 1991. — Т. 120. — С. 114–117.
- [13] Bates G. E., Kiekemeister F. A note on homomorphic mappings of quasigroups into multiplicative systems // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1948. — Vol. 54. — P. 1180–1185.
- [14] Bruck R. H. A Survey of Binary Systems. — New York: Springer, 1971.
- [15] Burris S., Sankappanavar H. P. A Course in Universal Algebra. — Berlin: Springer, 1981.
- [16] Cohn P. M. Universal Algebra. — New York: Harper & Row, 1965.
- [17] Dörnte W. Untersuchungen über einen veralgemeinerten Gruppenbegriff // *Math. Z.* — 1928. — B. 29. — S. 1–19.

- [18] Duplak J. A parastrophic equivalence in quasigroups // *Quasigroups Related Systems*. — 2000. — Vol. 7. — P. 7–14.
- [19] Evans T. Homomorphisms of non-associative systems // *J. London Math. Soc.* — 1949. — Vol. 24. — P. 254–260.
- [20] Evans T. On multiplicative systems defined by generators and relations // *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* — 1951. — Vol. 47. — P. 637–649.
- [21] Fraleigh J. B. *A First Course in Abstract Algebra*. — London: Addison-Wesley, 1982.
- [22] Ihringer T. On multiplication groups of quasigroups // *European J. Combin.* — 1984. — Vol. 5, No. 2. — P. 137–141.
- [23] Ježek J., Kepka T. *Medial Groupoids*. — Praha: Academia, 1983. — (Rozpr. Cesl. Akad. Ved; 93, no. 2).
- [24] Ježek J., Kepka T., Nemeč P. *Distributive Groupoids*. — Praha: Academia, 1981. — (Rozpr. Cesl. Akad. Ved; 91, no. 3).
- [25] Keedwell A. D., Shcherbacov V. A. Quasigroups with an inverse property and generalized parastrophic identities // *Quasigroups Related Systems*. — 2005. — Vol. 13. — P. 109–124.
- [26] Lee S.-M. On finite-element simple extensions of a countable collection of countable groupoids // *Publ. Inst. Math., Nouv. Sér.* — 1985. — Vol. 38. — P. 65–68.
- [27] Moufang R. Zur Structur von alternativ Körpern // *Math. Ann.* — 1935. — B. 110. — S. 416–430.
- [28] Mullen G. L., Shcherbacov V. A. On orthogonality of binary operations and squares // *Bul. Acad. Şti. Rep. Moldova, Mat.* — 2005. — No. 2. — P. 3–42.
- [29] Pflugfelder H. O. *Quasigroups and Loops: Introduction*. — Berlin: Heldermann, 1990.
- [30] Sabinin L. V. *Smooth Quasigroups and Loops*. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1999. — (Math. Appl.; Vol. 492).
- [31] Shcherbacov V. A. On Bruck–Belousov problem // *Bul. Acad. Şti. Rep. Moldova, Mat.* — 2005. — No. 3. — P. 123–140.
- [32] Shcherbacov V. A. On definitions of groupoids closely connected with quasigroups // *Bul. Acad. Şti. Rep. Moldova, Mat.* — 2007. — No. 2. — P. 43–54.
- [33] Smith J. D. H. *An Introduction to Quasigroups and Their Representation*. — London: Chapman and Hall; CRC, 2007. — (Stud. Adv. Math.).
- [34] Thurston H. A. Equivalences and mappings // *Proc. London Math. Soc.* — 1952. — Vol. 3, No. 2. — P. 175–182.

