

Общероссийский математический портал

В. Ю. Бодряков, Роль магнитоупругого взаимодействия в формировании термодинамических функций ферромагнетиков. Термодинамический потенциал и его первые термодинамические производные, *ТВТ*, 2008, том 46, выпуск 4, 522–532

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.91

11 декабря 2024 г., 10:01:01



---

**ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИЕ  
СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА**


---

УДК 537.622.4; 536.77; 536.722

## РОЛЬ МАГНИТОУПРУГОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ФОРМИРОВАНИИ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ФЕРРОМАГНЕТИКОВ. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ И ЕГО ПЕРВЫЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

© 2008 г. В. Ю. Бодряков

*E-mail: matan@uspu.ru*

Поступила в редакцию 09.07.2007 г.

В духе феноменологического подхода Ландау, но с учетом не рассматривающегося в традиционной интерпретации теории магнитоупругого взаимодействия (МУВ) магнитной подсистемы с кристаллической решеткой проведено “построение термодинамики” ферромагнетика. Показано, что учет МУВ, находящего отражение в зависимости температуры Дебая от намагниченности, может быть сведен к перенормировке термодинамического потенциала (ТДП) и термодинамических коэффициентов Ландау. В рамках развитой модели получены выражения для перенормированных магнитных составляющих ТДП и его первых термодинамических производных, в частности изменения молярной энтальпии, молярного объема, плотности, удельной намагниченности, объемной магнитоупругости. В реальном масштабе температур и наблюдаемых значений теплофизических функций в отсутствие магнитного поля проведены модельные расчеты, демонстрирующие принципиальную важность учета МУВ.

PACS: 75.50.Cc; 05.70.Ce; 65.40.-b

### ВВЕДЕНИЕ

Едва ли есть необходимость в обосновании актуальности изучения термодинамического поведения ферромагнетиков с учетом магнитоупругого взаимодействия (МУВ) магнитной подсистемы с кристаллической решеткой; это принципиально важно как в научном, так и в прикладном аспекте. Хотя проблеме учета МУВ, или, что то же, магнитного ангармонизма колебаний кристаллической решетки магнетиков, посвящено большое количество работ (см., в частности, [1–11]), до сих пор нельзя сказать, что найдено ее исчерпывающее термодинамическое решение.

Научный аспект связан с тем обстоятельством, что широко применяемая теория фазовых переходов второго рода (ТФПВР) Ландау [12] не учитывает влияние МУВ и плохо соответствует наблюдаемому поведению теплофизических функций (ТФФ) реальных ферромагнетиков [13–15]. Лишь отчасти расхождения между экспериментальными данными и расчетами в рамках ТФПВР могут быть объяснены ограниченностью подхода Ландау и необходимостью применения вместо ТФПВР низкотемпературных спин-волновых (например, [2, 14]) или спин-флуктуационных представлений в непосредственной окрестности точки Кюри  $T_C$  ([12, 16–19]). Последнее особенно существенно, так как именно вблизи точки Кюри считается применимым феноменологическое разложение Ландау. Подход Леванюка [16], сформули-

ровавшего критерии применимости теории Ландау к описанию ферромагнетиков, не учитывает МУВ. При этом, как показано, например, в [6], именно вблизи  $T_C$  влияние магнитоупругого взаимодействия резко усиливается. Таким образом, вопрос об условиях и границах применимости ТФПВР и проблема количественной оценки вклада МУВ в теплофизические функции ферромагнетиков остаются открытыми. Важность анализа МУВ с практической точки зрения состоит в том, что именно с сильным влиянием МУВ связывают возникновение широко используемых явлений, таких, как инварный, коварный и элинварный эффекты [9–11, 13, 15, 20–23].

Имеется немалое количество публикаций, посвященных разработке проблемы учета взаимодействия магнитной и упругой (фононной) подсистем ферромагнетика (см. [1–11, 23–25] и др.). Однако практически все они имеют узкомодельный характер. Так, модели спин-фононного взаимодействия в ферромагнетиках гейзенберговского типа (см., например, [1, 2]) еще позволяют учесть влияние МУВ при расчете намагниченности и теплоемкости, но сталкиваются с практически непреодолимыми математическими трудностями при вычислении удельного объема, магнитоупругости, коэффициента теплового расширения, модулей упругости. Известная РККИ-модель  $s$ - $f$ -обменного взаимодействия [14, 24–25] дала аналитическое выражение для осциллирующего обменного интеграла  $J(r)$ , однако из-за математических труд-

ностей не приводит к конечным аналитическим выражениям для всего комплекса базовых ТФФ даже для простых случаев ферромагнитного взаимодействия. Практически полный набор термодинамических функций может быть вычислен в рамках теорий зонных ферромагнетиков с коллективизированными электронами [3–5, 7, 9–11]. Эти теории, однако, созданы для слабых зонных ферромагнетиков и, вообще говоря, мало применимы к реальным сильным  $3d$ - и, тем более,  $4f$ -ферромагнетикам со значительным вкладом локализованных магнитных моментов.

В целом, из анализа литературы ясно, что без явного учета МУВ адекватное количественное описание наблюдаемого поведения реальных ферромагнетиков невозможно. Развитие общетермодинамического подхода к описанию ферромагнетизма с МУВ, безотносительного к какой-либо частной модели, по-прежнему остается актуальной задачей. Определенные шаги в этом направлении уже проделаны в ряде работ последних лет с участием автора [15, 26–37]. Так, в работах [15, 28] показано, что последовательное рассмотрение термодинамики ферромагнетика с МУВ с необходимостью приводит к выводу о наличии магнитной зависимости температуры Дебая: имеется явно зависящая от намагниченности  $M(T, H)$  и температурного “расстояния” до точки Кюри  $t = T - T_C$  магнитная часть характеристической температуры  $\theta_m(M^2; t)$

$$\theta_m = (1/2)\theta_{10}M^2 + (1/2)\theta_{11}M^2t + (1/4)\theta_{20}M^4 = \sum_{i,j} \frac{1}{2^i} \theta_{ij} M^{2i} t^j. \quad (1)$$

Коэффициенты  $\theta_{ij}(p)$  в выражении (1) можно интерпретировать как коэффициенты МУВ; они не зависят от температуры и намагниченности, но являются функциями давления  $p$ ;  $(i; j) = \{(1; 0); (1; 1); (2; 0)\}$ . Появление магнитной зависимости  $\theta_m(T, H)$  является макроскопическим термодинамическим отражением взаимодействия магнитной подсистемы с упругой (фононной) подсистемой ферромагнетика. Работы [26, 29, 30, 32] посвящены исследованию термодинамических условий и механизмов реализации в ферромагнетиках важных в прикладном отношении эффектов: инварного, коварного, элинварного, магнетокалорического. Серьезное внимание уделено анализу математических аспектов термодинамической модели ферромагнетика с МУВ [15, 31]. Вместе с тем ряд существенных с точки зрения всестороннего обоснования модели вопросов не был раскрыт в полной мере. В частности, не были проведены сравнительные оценки энергетических вкладов МУВ и магнитокристаллической анизотропии

(МКА) для реальных ферромагнетиков; не проведены численные оценки вклада МУВ в полную величину магнитной части ТДП; не были четко сформулированы критерии применимости модели ферромагнетика с МУВ и др.

В данной работе, имеющей обзорный и обобщающий методический характер, проведено последовательное “построение термодинамики” ферромагнетика, магнитное упорядочение которого может быть рассмотрено в духе феноменологического подхода Ландау, но с учетом магнитоупругого взаимодействия магнитной подсистемы с кристаллической решеткой вещества. В реальном масштабе температур проведены модельные расчеты температурных зависимостей комплекса ТФФ ферромагнетика. На примере Ni даются количественные оценки энергетических вкладов МКА и МУВ в полную величину магнитной части ТДП; формулируются критерии применимости построенной модели ферромагнетика с МУВ. Обсуждаются проблемы, оставшиеся нерешенными в рамках развиваемой модели, а также возможные пути их решения.

## ТЕОРИЯ

В этом разделе получены основные термодинамические соотношения для перенормированных с учетом МУВ, т.е. с учетом магнитной зависимости температуры Дебая  $\theta(T; H)$ , магнитных составляющих ТДП  $\Phi_m$  и его первых термодинамических производных. Под магнитной составляющей (частью) термодинамической функции магнетика понимается зависящая от магнитного момента разность между наблюдаемой величиной этой ТФФ и ее экстраполированным из высокотемпературной области парамагнитным ходом [35]. Все расчеты проведены в Международной системе единиц СИ. Подробный “размерный” анализ используемых термодинамических выражений приведен в [15, 33].

**Термодинамический потенциал ферромагнетика с учетом МУВ.** В дифференциальном виде молярный термодинамический потенциал ферромагнетика в функции температуры  $T$ , давления  $P$  и магнитного поля  $\mu_0 H$  имеет вид [12]

$$d\Phi = -SdT + VdP - \mu_0 M dH. \quad (2)$$

В уравнении (2)  $S = -(\partial\Phi/\partial T)_{PH}$  – молярная энтропия,  $V = -(\partial\Phi/\partial P)_{TH}$  – молярный объем,  $\mu$  – молярная масса,  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  Гн м<sup>-1</sup> – магнитная постоянная,  $M = -(\partial\Phi/\partial(\mu_0 H))_{TP}$  – удельная (массовая) намагниченность.

В интегральном виде молярный ТДП  $\Phi$  может быть представлен в виде суммы постоянной (не зависящей от температуры) части  $\Phi_0$ , решеточ-

ной (фононной)  $\Phi_p$ , электронной  $\Phi_e$  и обменной магнитной частей  $\Phi_{m,ex}$ :

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_p + \Phi_e + \Phi_{m,ex} = \Phi_{para} + \Phi_m. \quad (3)$$

В выражении (3) (см. [12])

$$\Phi_p = 3R[3\theta/8 + T\phi(z)], \quad (4)$$

$$\Phi_e = -(1/2)\zeta T^2, \quad (5)$$

$$\Phi_{m,ex} = \mu[(1/2)\alpha_{ex}M^2 + (1/4)\beta_{ex}M^4 - \mu_0HM]. \quad (6)$$

В свою очередь, в (4)

$$\phi(z) = \ln(1 - e^{-z}) - (1/3)D(z); \quad (7)$$

$D(z = \theta/T)$  – табулированная функция Дебая;  $\theta$  – температура Дебая. Полная величина температуры Дебая ферромагнетика может быть найдена как

$$\theta = \theta_{para}(T) + \theta_m(T; H), \quad (8)$$

где  $\theta_{para}(T)$  – парамагнитная часть температуры Дебая, зависящая в общем случае от температуры в силу теплового ангармонизма колебаний кристаллической решетки (см., например, [15, 34–36] и др.). По-видимому, даже в случае сильного влияния МУВ в реальных ферромагнетиках с приемлемой точностью выполняется условие  $\theta_m \ll \theta_{para}$ . В выражении (5)  $\zeta$  – молярный коэффициент электронной теплоемкости, отвечающий вкладу газа свободных электронов. В (6)  $\alpha_{ex}$  и  $\beta_{ex}$  – обменные термодинамические коэффициенты Ландау. Согласно традиционным представлениям теории Ландау [12] для  $\alpha_{ex}$  и  $\beta_{ex}$  имеем

$$\alpha_{ex} = a_0t, \quad \beta_{ex} = \beta_0; \quad a_0(P), \beta_0(P) > 0. \quad (9)$$

Однако магнитная зависимость содержится не только в обменной магнитной части ТДП  $\Phi_{m,ex}$  (6) но и (в силу (1), (8)), в его фононной части (4). Как показано в [15], путем разложения  $\Phi_p(\theta, T)$  (4) в ряд по малому параметру  $\theta_m \ll \theta_{para}$  можно выделить МУВ-часть, явно зависящую от намагниченности:

$$\Phi_p = \Phi_{p,para} + \Phi_{p,МУВ}, \quad (10)$$

где

$$\Phi_{p,para} \approx 3R[(3/8)\theta_{para} + T\phi(z_{para})]; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{p,МУВ} &= (1/2)\Phi_{10}M^2 + (1/2)\Phi_{11}M^2t + \\ &+ (1/4)\Phi_{20}M^4 = \sum_{i,j} \frac{1}{2^i} \Phi_{ij}M^{2i}t^j. \end{aligned} \quad (12)$$

В пренебрежении членами высших порядков малости коэффициенты

$$\Phi_{ij} = 3R\theta_{ij}[3/8 + D(z_{para})/z_{para}]. \quad (13)$$

$\Phi_{ij}$  зависят от температуры (даже если коэффициенты МУВ  $\theta_{ij}$  постоянны) и давления. Переход к традиционной ТФПВР Ландау осуществляется при  $\theta_{ij} = 0$ .

Удобно МУВ-часть ТДП  $\Phi_{p,МУВ}$  “приписать” к его магнитной части  $\Phi_m$ , которая принимает вид, формально идентичный ландаускому  $\Phi_{m,ex}$ :

$$\begin{aligned} \Phi_m &= \Phi_{m,ex} + \Phi_{p,МУВ} = \\ &= \mu[(1/2)\alpha M^2 + (1/4)\beta M^4 - \mu_0HM], \end{aligned} \quad (14)$$

но с перенормированными МУВ термодинамическими коэффициентами

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_{ex} + \alpha_{МУВ} = \mu^{-1}[\Phi_{10}(T) - \Phi_{10}(T_C)] + \\ &+ [a_0 + \mu^{-1}\Phi_{11}(T)]t; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\beta = \beta_{ex} + \beta_{МУВ} = \beta_0 + \mu^{-1}\Phi_{20}(T). \quad (16)$$

В итоге перенормированная магнитная часть молярного ТДП есть

$$\begin{aligned} \Phi_m &= (1/2)[\Phi_{10}(T) - \Phi_{10}(T_C)]M^2 + \\ &+ (1/2)[\mu a_0 + \Phi_{11}(T)]M^2t + \\ &+ (1/4)[\mu\beta_0 + \Phi_{20}(T)]M^4 - \mu\mu_0HM, \end{aligned} \quad (17)$$

или в обобщенном “симметризованном” виде

$$\begin{aligned} \Phi_m &= (1/2)\Phi_{m10}M^2 + (1/2)\Phi_{m11}M^2t + \\ &+ (1/4)\Phi_{m20}M^4 - \mu\mu_0HM = \\ &= \sum_{i,j} \frac{1}{2^i} \Phi_{m,ij}M^{2i}t^j - \mu\mu_0HM. \end{aligned} \quad (18)$$

Выражения для  $\Phi_{m,ij}(T; P)$  очевидны.

МУВ может заметно трансформировать ход температурных зависимостей термодинамических коэффициентов  $\alpha(T)$  и  $\beta(T)$ , а вслед за ними и всех термодинамических функций. Нужно отметить, что в точке Кюри обращается в нуль не обменный термодинамический коэффициент  $\alpha_{ex}(T)$ , а полная величина  $\alpha(T)$  с учетом МУВ. Это можно интерпретировать как “смещение” (перенормировку) точки Кюри вследствие МУВ (см., например, [1, 2]). Приближенные выражения для первых температурных и барических производных величин  $\Phi_{ij}(T, P)$  приведены в приложении А; там же даны выражения для первых температурных и барических производных термодинамических коэффициентов  $\alpha(T, P)$  и  $\beta(T, P)$ .

Как уже отмечалось, даже в случае сильного влияния МУВ в ферромагнетиках с приемлемой точностью выполняется условие  $\theta_m \ll \theta_{para}$ , которое можно рассматривать как условие применимости развиваемого термодинамического подхода. Кроме того, в работе пренебрежено влиянием

МКА, в той или иной степени всегда имеющей место в ферромагнетиках. Поэтому следует количественно оценить вклад МУВ по сравнению с МКА (см. ниже).

**Первые термодинамические производные ТДП ферромагнетика с учетом МУВ.** В духе ТФПВР [12] уравнение магнитного состояния (УМС) ферромагнетика получается путем минимизации магнитной части ТДП (14)

$$\left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial M}\right)_{T,PH} = 0 = \mu[\alpha M + \beta M^3 - \mu_0 H M], \quad (19)$$

т.е. формально УМС сохраняет тот же вид, что и в отсутствие МУВ [15], но содержит перенормированные МУВ термодинамические коэффициенты Ландау  $\alpha$  и  $\beta$ . Намагниченность  $M(T, H)$  может быть найдена как решение кубического УМС (19). В частности, для спонтанной намагниченности имеем

$$M_s^2 = -\frac{\alpha}{\beta} = \frac{[\Phi_{10}(T) - \Phi_{10}(T_c)] + [\mu a_0 + \Phi_{11}(T)]t}{\mu \beta_0 + \Phi_{20}(T)}. \quad (20)$$

Для сравнения, обменная намагниченность в традиционной ТФПВР Ландау

$$M_{s,ex}^2 = -\alpha_{ex}/\beta_{ex} = -a_0 t/\beta_0. \quad (21)$$

Модельные вычисления (см. далее) показывают, что МУВ способно заметно изменить ход кривых спонтанной намагниченности  $M_s(T)$  по сравнению с (21).

Вслед за ТДП молярную энтропию ферромагнетика можно представить в виде суммы парамагнитной и магнитной составляющих

$$S = S_{para} + S_m, \quad (22)$$

где парамагнитная часть молярного объема ферромагнетика равна

$$S_{para} = 3R \left\{ D(z_{para}) - \Phi(z_{para}) - \left[ \frac{3}{8} + \frac{D(z_{para})}{z_{para}} \right] \left( \frac{\partial \theta_{para}}{\partial T} \right)_P \right\} + \zeta T; \quad (23)$$

Магнитная часть молярной энтропии включает как обменную часть, так и часть, обусловленную МУВ (см. также приложение А):

$$S_m = -\mu \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial T} \right)_{PH} M^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial \beta}{\partial T} \right)_{PH} M^4 \right] = -\frac{1}{2} \left[ \mu a_0 + \left( \frac{\partial \Phi_{10}}{\partial T} \right)_{PH} + \Phi_{11} \right] M^2 - \quad (24)$$

$$-\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial T} \right)_{PH} M^2 t - \frac{1}{4} \left( \frac{\partial \Phi_{20}}{\partial T} \right)_{PH} M^4.$$

Иными словами, магнитная часть молярной энтропии  $S_m$  с учетом МУВ может быть представлена в обобщенном виде разложения по четным степеням намагниченности  $M$  и температурному расстоянию до точки Кюри  $t$ :

$$S_m = (1/2)S_{10}M^2 + (1/2)S_{11}M^2 t + (1/4)S_{20}M^4 = \sum_{i,j} \frac{1}{2^i} S_{ij} M^{2i} t^j. \quad (25)$$

Полученные выражения для магнитных частей энтропии  $S_m$  (25) и ТДП  $\Phi_m$  (14) позволяют выписать выражение для доступной прямому измерению магнитной части молярной энтальпии ферромагнетика:

$$\Delta H_m = \Phi_m + T S_m = \mu \left[ \frac{1}{2} \alpha M^2 + \frac{1}{4} \beta M^4 - \mu_0 H M \right] - \mu T \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial T} \right)_{PH} M^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial \beta}{\partial T} \right)_{PH} M^4 \right] = \mu \left\{ \frac{1}{2} \left[ \alpha - T \left( \frac{\partial \alpha}{\partial T} \right)_{PH} \right] M^2 + \frac{1}{4} \left[ \beta - T \left( \frac{\partial \beta}{\partial T} \right)_{PH} \right] M^4 - \mu_0 H M \right\}. \quad (26)$$

Подобно молярной энтропии, выражение для молярного объема ферромагнетика с учетом МУВ есть [15]

$$V = V_{para} + V_m, \quad (27)$$

где парамагнитная часть молярного объема ферромагнетика равна

$$V_{para} = V_0 + 3R \left[ 3/8 + D(z_{para})/z_{para} \right] \times \left( \frac{\partial \theta_{para}}{\partial P} \right)_T - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial P} \right)_T T^2; \quad (28)$$

для магнитной части молярного объема с учетом МУВ имеем

$$V_m = \mu \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial P} \right)_{TH} M^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial \beta}{\partial P} \right)_{TH} M^4 \right] = \frac{1}{2} \left[ -\mu a_0 \left( \frac{\partial T_c}{\partial P} \right)_{TH} + \left( \frac{\partial \Phi_{10}}{\partial P} \right)_{TH} - \left( \frac{\partial \Phi_{10}}{\partial P} \right)_{T=T_c,H} - \Phi_{11} \left( \frac{\partial T_c}{\partial P} \right)_{TH} \right] M^2 + \quad (29)$$

$$+ \frac{1}{2} \left[ \mu \left( \frac{\partial a_0}{\partial P} \right)_{TH} + \left( \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial P} \right)_{TH} \right] M^2 t + \\ + \frac{1}{4} \left[ \mu \left( \frac{\partial \beta_0}{\partial P} \right)_{TH} + \left( \frac{\partial \Phi_{20}}{\partial P} \right)_{TH} \right] M^4.$$

Выражение для  $V_m$  может быть представлено в симметризованном виде

$$V_m = (1/2)V_{10}M^2 + (1/2)V_{11}M^2 t + \\ + (1/4)V_{20}M^4 = \sum_{i,j} \frac{1}{2^i} V_{ij} M^{2i} t^j, \quad (30)$$

где коэффициенты  $V_{ij}$  определяются как термодинамическими параметрами  $a_0(P)$ ,  $\beta_0(P)$ ,  $T_C(P)$  ТФПВР Ландау, так и параметрами МУВ  $\theta_{ij}(P)$ .

Выражения (27)–(29) позволяют вычислить также полную плотность  $\rho = \mu/V$  вещества ферромагнетика, ее парамагнитную  $\rho_{para} = \mu/V_{para}$  и магнитную часть  $\rho_m = \rho - \rho_{para}$ , а также объемную магнитострикцию

$$\omega = V_m/V. \quad (31)$$

**Физические статистические принципы модельных расчетов.** Кратко обсудим физические статистические принципы, лежащие в основе построенной выше термодинамической модели (см. также [15, 31]).

Как ясно из вышесказанного, для описания и анализа магнитной части ТФФ ферромагнетика с МУВ в рамках модели необходимо в общем случае задать ряд “магнитных” термодинамических параметров модели. Иными словами, помимо традиционных обменных параметров Ландау  $a_0$ ,  $\beta_0$ ,  $T_C$  и их первых изотермических барических производных  $(\partial a_0/\partial P)_{TH}$ ,  $(\partial \beta_0/\partial P)_{TH}$ ,  $(\partial T_C/\partial P)_{TH}$ , следует задать также параметры МУВ  $\theta_{10}$ ,  $\theta_{11}$ ,  $\theta_{20}$  и их первые изотермические барические производные  $(\partial \theta_{10}/\partial P)_{TH}$ ,  $(\partial \theta_{11}/\partial P)_{TH}$ ,  $(\partial \theta_{20}/\partial P)_{TH}$ . Таким образом, для описания поведения ТФФ, соответствующих первым термодинамическим производным ТДП ферромагнетика с МУВ, необходимо указать 12 параметров. Варьируя параметры модели и добиваясь наилучшего описания сразу всего комплекса теплофизических функций, таких, как намагниченность, объемная магнитострикция и др., в зависимости от температуры (магнитного поля), можно получить статистически обоснованные оценки параметров. Под наилучшим описанием понимается такой ход расчетных ТФФ, который минимизирует среднеквадратичные отклонения экспериментальных точек от расчетных кривых. Подобная программа успешно осуществлена на примере Ni в [31]. Там же обсуждаются принципиальные проблемы, возникающие при реализации модели.

Одной из таких проблем является размерный характер ТФФ. Поэтому прямое сопоставление среднеквадратичных ошибок описания для различных функций невозможно и методы традиционной статистической математики [37] оказываются неприменимыми. Другой проблемой, характерной вообще для термодинамических моделей, является большое количество варьируемых параметров. Количественная оценка влияния каждого из параметров возможна [15, 31] с применением статистических методов [37], однако обсуждение результатов такого анализа далеко выходит за рамки настоящей работы и нуждается в отдельном рассмотрении. Детальное математическое исследование построенной термодинамической модели к настоящему времени не завершено и потребует еще значительных усилий. Физические следствия модели представлены в виде обсуждаемых далее результатов модельных расчетов.

## РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛЬНЫХ РАСЧЕТОВ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

В этом разделе обсуждаются результаты модельных вычислений, назначением которых было количественно оценить влияние интенсивности МУВ на ход ТФФ ферромагнетика в отсутствие внешнего магнитного поля. Проведено сопоставление хода термодинамических функций с учетом МУВ с поведением, предписываемым ТФПВР в традиционной интерпретации Ландау.

Для обеспечения реалистичности модельных расчетов необходимо контролировать температурные зависимости расчетных ТФФ, соответствующих первым термодинамическим производным ТДП и соизмерять их с величинами, наблюдаемыми на эксперименте. Такими контролируруемыми величинами могут быть спонтанная намагниченность  $M_s(T)$ , которая в ферромагнетиках при  $T \rightarrow 0$  обычно не превышает  $\sim 200 \text{ А м}^2 \text{ кг}^{-1}$  и объемная спонтанная магнитострикция  $\omega_s(T)$ , которая обычно не превышает  $\sim 10^{-3}$  и др.

При проведении модельных расчетов были заданы следующие не изменяемые в процессе вычислений термодинамические параметры, близкие к таковым для никеля (см. [3, 4, 8, 13–15, 31, 33, 35, 38–43]) и др.), выбранного в качестве примера классического ферромагнетика и являющегося одним из основных компонентов множества промышленно ферромагнитных сплавов. Принято, что молярная масса модельного ферромагнетика  $\mu = 5 \times 10^{-2} \text{ кг моль}^{-1}$ ; начальный молярный объем  $V_0 = 6 \text{ см}^3 \text{ моль}^{-1}$ ; парамагнитная температура Дебая и ее первая барическая производная  $\theta_{para} = \theta_0 = 390 \text{ К}$ ;  $(\partial \theta/\partial P)_{TH} = 1.5 \times 10^{-9} \text{ К Па}^{-1}$ ; молярный коэффициент электронной теплоемкости и его первая барическая

**Таблица 1.** Оценки “энергий” МКА (см. [39]) и МУВ, магнитной части температуры Дебая  $\theta_m$  [31] и величины магнитной части молярного ТДП  $\Phi_{ms}$  в никеле

T, К	$K_1$		$K_2$		$\theta_m, \text{К}$	$R\theta_m, \text{Дж моль}^{-1}$	$\Phi_{ms}, \text{Дж моль}^{-1}$
	$10^3 \text{ эрг см}^{-3}$	$10^{-3} \text{ Дж моль}^{-1}$	$10^3 \text{ эрг см}^{-3}$	$10^{-3} \text{ Дж моль}^{-1}$			
293.15	-34	-22	53	35	-4.8	-40	295
473.15	5	3.3	20	13	-1.6	-13	90

производная  $\zeta = 8 \times 10^{-3} \text{ Дж К}^{-2} \text{ моль}^{-1}$ ;  $(\partial\zeta/\partial P)_{TH} = -1 \times 10^{-13} \text{ Дж К}^{-2} \text{ моль}^{-1} \text{ Па}^{-1}$ ; температура Кюри  $T_C = 600 \text{ К}$  и ее барическая производная  $(\partial T_C/\partial P)_{TH} = 3 \times 10^{-9} \text{ К Па}^{-1}$ ;  $(\partial^2 T_C/\partial P^2)_{TH} = -5 \times 10^{-20} \text{ К Па}^{-2}$ . Термодинамические коэффициенты Ландау и их барические производные равны  $a_0 = 2 \times 10^{-2} \text{ ед. СИ}_a$ ;  $(\partial a_0/\partial P)_{TH} = -2.5 \times 10^{-14} \text{ ед. СИ}_a \text{ Па}^{-1}$ ;  $\beta_0 = 1 \times 10^{-4} \text{ ед. СИ}_\beta$ ;  $(\partial\beta_0/\partial P)_{TH} = -2.5 \times 10^{-15} \text{ ед. СИ}_\beta \text{ Па}^{-1}$ . Там, где это не оговорено, барические производные термодинамических параметров ферромагнетика, включая барические производные параметров МУВ  $\theta_{ij}$ , равны нулю.

Для сравнения, Ni ( $\mu = 0.05871 \text{ кг моль}^{-1}$ ) является ферромагнитным (ФМ) представителем ряда 3d-переходных металлов. Плотность металла при 20°C составляет  $\rho(293 \text{ К}) = 8910 \text{ кг м}^{-3}$ . Коэффициент электронной теплоемкости Ni равен  $\zeta = 7.1 \text{ мДж моль}^{-1} \text{ К}^{-2}$ . По разным данным температура Дебая никеля  $\theta$  при  $T \rightarrow 0$  лежит в диапазоне от 420 до 470 К. Достоверных экспериментальных данных о ходе температурной зависимости температуры Дебая никеля  $\theta(T)$  нет. В точке Кюри  $T_C \approx 630 \text{ К}$  никель претерпевает ФМ превращение; спонтанная намагниченность при  $T \rightarrow 0$  достигает значения  $M_s(0) = 59 \text{ А м}^2 \text{ кг}^{-1}$ . Данные разных авторов по величине барической производной температуры Кюри в  $\text{К Па}^{-1}$  дают значения  $2.3 \times 10^{-9} < (\partial T_C/\partial P)_T < 3.6 \times 10^{-9}$ . Расчеты [31] показали, что в широкой температурной области ниже  $T_C$  спонтанный магнитный вклад в температуру Дебая  $\theta_m$  никеля отрицателен подобно отрицательным магнитным вкладам в упругие модули Юнга и всестороннему сжатию [42, 43]. При комнатной температуре величина  $|\theta_m|$  составляет несколько кельвинов. Расчетные значения термодинамических параметров Ni, полученные в рамках термодинамической модели ферромагнетика с МУВ, приведены в [31].

Энергетический вклад магнитокристаллической анизотропии (МКА) в ТФФ никеля определяется величиной первой ( $K_1$ ) и второй ( $K_2$ ) констант анизотропии Ni. Справочные величины [39] констант МКА в Ni при 20°C и при 200°C приведены в табл. 1. Там же приведены расчетные зна-

чения магнитной составляющей температуры Дебая никеля  $\theta_m$  [31] и “энергетическая” оценка  $R\theta_m$  вклада МУВ в расчете на один моль. Из табл. 1 видно, что в никеле энергия МУВ примерно на три порядка величины превосходит энергию МКА. В других классических 3d-ферромагнетиках на основе Fe и Co величины констант МКА в несколько раз (до ~10) по абсолютной величине превышают константы  $K_1, K_2$  в Ni (см. [39, 41]). Но и в этом случае энергетический вклад МКА не превышает ~1% от энергии МУВ. Это дает основания пренебречь МКА по сравнению с МУВ в Ni, а также в широком классе 3d-ферромагнитных сплавов Ni, Fe, Co.

Кроме сравнительной оценки вкладов МКА и МУВ, для уточнения границ применимости развиваемого подхода представляет интерес оценка вклада МУВ в полную величину магнитной энергии. Величина спонтанной магнитной части молярного термодинамического потенциала ферромагнетика равна (см. (14), (20))  $\Phi_{ms} = -\frac{1}{4}\mu \frac{\alpha^2}{\beta}$ . Соответствующие расчеты для никеля также представлены в табл. 1. Из таблицы видно, что в Ni энергетический вклад МУВ не более чем на порядок меньше полной величины  $\Phi_{ms}$ . Иными словами, вклад МУВ достаточно заметен даже в никеле, в котором магнитоупругое взаимодействие магнитной подсистемы с кристаллической решеткой считается довольно умеренным. Приведенные оценки еще раз подчеркивают важность учета МУВ при рассмотрении термодинамики ферромагнетика.

Высказанные выше соображения и проведенные численные оценки позволяют уточнить границы применимости развиваемой термодинамической модели ферромагнетика с МУВ. Модель применима для описания ферромагнетиков, в которых влиянием МКА по сравнению с МУВ можно пренебречь, но при этом выполнено условие малости “магнитного изменения” температуры Дебая ( $\theta_m \ll \theta_{para}$ ). Температурной областью применимости модели является, в принципе, практически вся ФМ температурная область за исключением области самых низких температур, где следует использовать спин-волновые представления, и узкой критической области температур, непо-

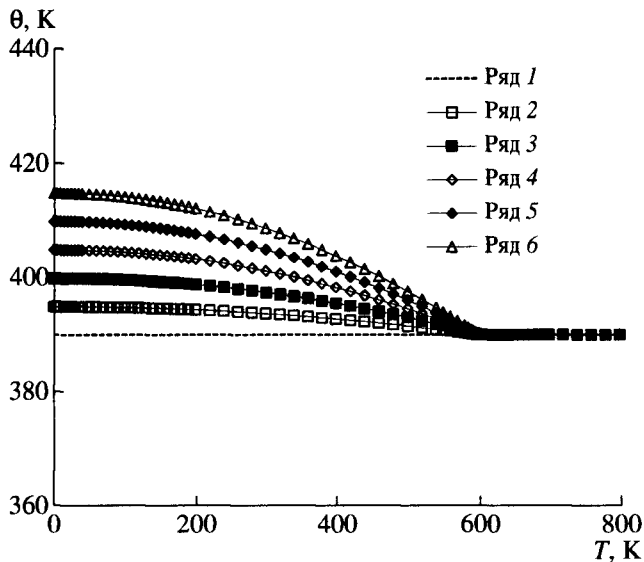
**Таблица 2.** Расчетные варьируемые термодинамические параметры ферромагнетика с учетом МУВ в расчетных циклах МУВ1–МУВ5

Параметр	МУВ1	МУВ2	МУВ3	МУВ4	МУВ5
$\theta_{10}, 10^{-3}$ ед. СИ $_{\theta_{10}}$	1.67	3.34	5.01	6.68	8.35
$\theta_{11}, 10^{-6}$ ед. СИ $_{\theta_{11}}$	1.40	2.22	3.53	4.88	6.24
$\theta_{20}, 10^{-8}$ ед. СИ $_{\theta_{20}}$	0.039	-5.73	-6.49	-7.00	-7.33
$(\partial\theta_{10}/\partial P)_{TH}, 10^{-15}$ ед. СИ $_{\theta_{10}}$ Па $^{-1}$	1.21	4.49	4.86	4.84	4.83
$(\partial\theta_{11}/\partial P)_{TH}, 10^{-16}$ ед. СИ $_{\theta_{11}}$ Па $^{-1}$	0.15	3.57	4.79	5.65	6.38
$(\partial\theta_{20}/\partial P)_{TH}, 10^{-17}$ ед. СИ $_{\theta_{20}}$ Па $^{-1}$	-0.01	2.92	3.74	4.22	4.57
$\theta_m(T=0), K$	5	10	15	20	25
$ \omega_{s, max} , 10^{-3}$	1.69	1.69	1.69	1.66	1.59

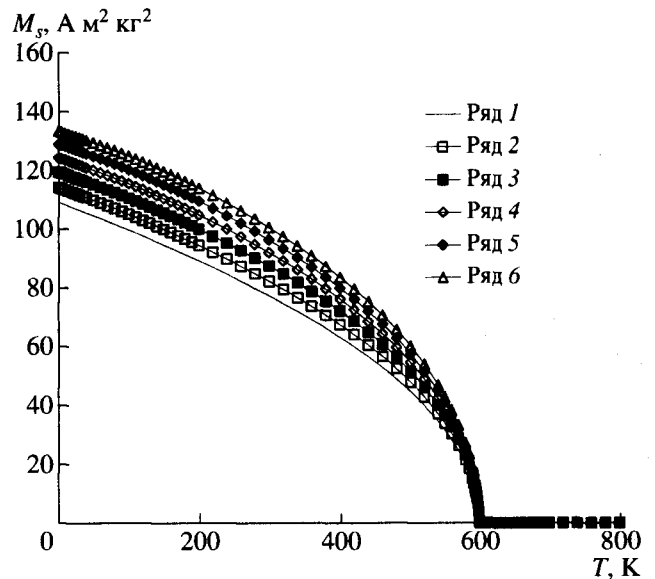
средственно примыкающей к точке Кюри. Таким образом, явный учет МУВ позволяет заметно расширить пределы применимости феноменологического подхода ТФПВР к описанию реальной термодинамики ферромагнитного упорядочения по сравнению с традиционной интерпретацией по Ландау.

Расчетные значения прочих основных модельных параметров приведены в табл. 2. Результаты расчетов в цикле МУВ0 (расчет в рамках представлений ТФПВР Ландау; все  $\theta_{ij} = 0$ ), а также в расчетных циклах МУВ1–МУВ5 с последовательно усиливающимся влиянием МУВ отражены на рис. 1–6.

На рис. 1 приведены расчетные температурные зависимости температуры Дебая  $\theta(T)$  модельного ферромагнетика в расчетных циклах МУВ0–МУВ5. В рамках модели в ПМ-области  $\theta_{para} = \theta_0 = const$ ; в ФМ-области появляется магнитный вклад. Для цикла Ландау МУВ0 магнитный вклад в температуру Дебая отсутствует; в циклах МУВ1–МУВ5 величина  $\theta_m(T)$  положительна и последовательно возрастает, отражая модельное усиление МУВ (см. табл. 2). Соответственно усиление МУВ в ряду циклов МУВ0–МУВ5 возрастает спонтанная намагниченность ферромагнетика (рис. 2). Видно, что МУВ-взаимодействие (даже относительно умеренной интенсивности) способно



**Рис. 1.** Расчетные температурные зависимости температуры Дебая  $\theta(T)$  ферромагнетика с учетом МУВ в расчетных циклах МУВ0–МУВ5. Ряд 1 (пунктирная линия) – расчетный цикл МУВ0 (расчет по Ландау:  $\theta_m = 0$ ;  $\theta = \theta_{para}$ ); 2 – МУВ1; 3 – МУВ2; 4 – МУВ3; 5 – МУВ4; 6 – МУВ5.



**Рис. 2.** Расчетные температурные зависимости спонтанной намагниченности  $M_s(T)$  ферромагнетика с учетом МУВ в расчетных циклах МУВ0–МУВ5. Ряд 1 (сплошная линия) – расчетный цикл МУВ0 (по Ландау); 2 – МУВ1; 3 – МУВ2; 4 – МУВ3; 5 – МУВ4; 6 – МУВ5.



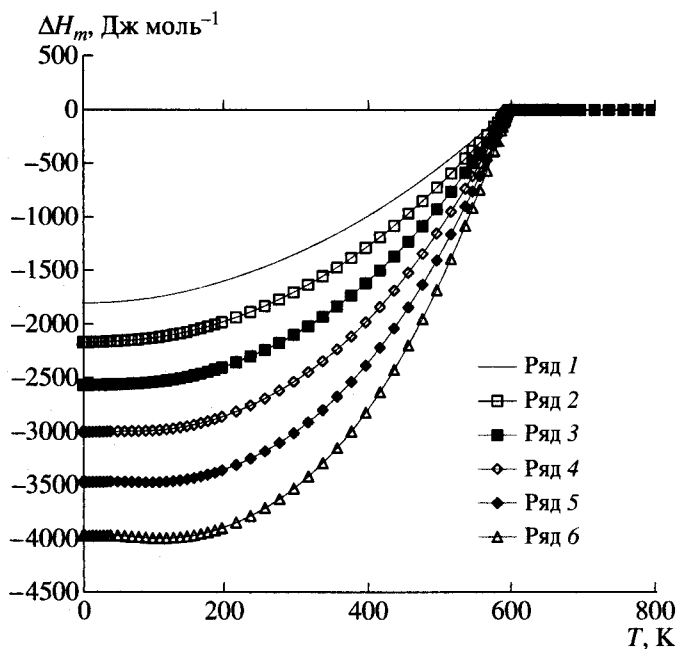


Рис. 3. Расчетные температурные зависимости спонтанной магнитной части молярной энтальпии  $\Delta H_m(T)$  относительно точки Кюри ферромагнетика с учетом МУВ в расчетных циклах МУВ0–МУВ5. Ряд 1 (сплошная линия) – расчетный цикл МУВ0 (по Ландау); 2 – МУВ1; 3 – МУВ2; 4 – МУВ3; 5 – МУВ4; 6 – МУВ5.

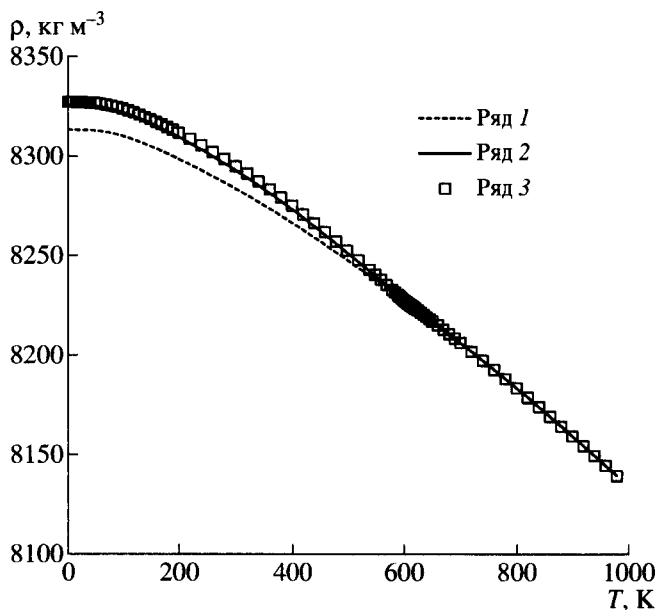


Рис. 4. Расчетные температурные зависимости плотности  $\rho(T)$  ферромагнетика с учетом МУВ. Ряд 1 (пунктирная линия) – парамагнитный ход  $\rho_{para}(T)$ ; 2 (сплошная линия) – расчетный цикл МУВ0 (по Ландау); 3 – МУВ1.

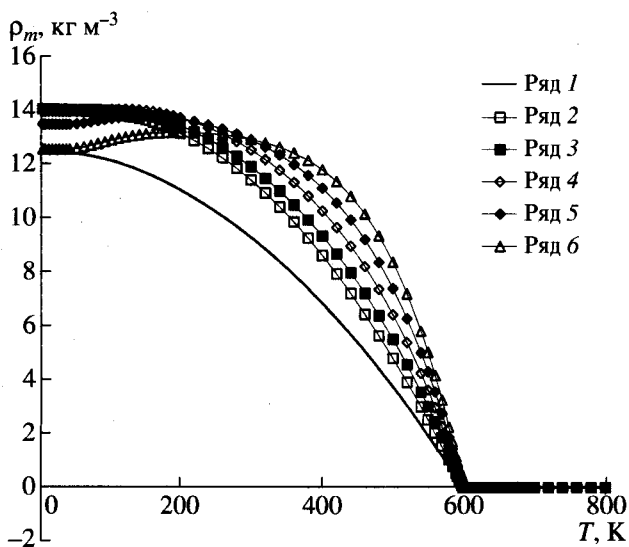


Рис. 5. Расчетные температурные зависимости магнитной части плотности  $\rho_m(T)$  ферромагнетика с учетом МУВ в расчетных циклах МУВ0–МУВ5. Ряд 1 (сплошная линия) – расчетный цикл МУВ0 (по Ландау); 2 – МУВ1; 3 – МУВ2; 4 – МУВ3; 5 – МУВ4; 6 – МУВ5.

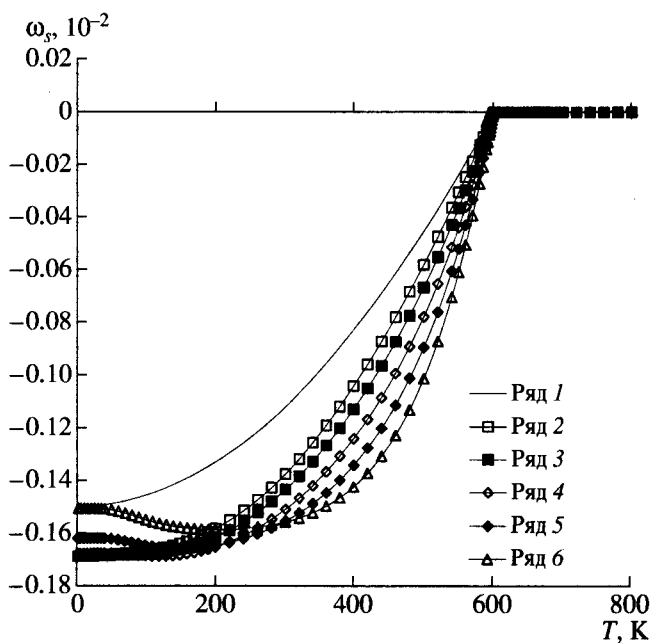


Рис. 6. Расчетные температурные зависимости спонтанной объемной магнитострикции  $\omega_s(T)$  ферромагнетика с учетом МУВ в расчетных циклах МУВ0–МУВ5. Ряд 1 (сплошная линия) – расчетный цикл МУВ0 (по Ландау); 2 – МУВ1; 3 – МУВ2; 4 – МУВ3; 5 – МУВ4; 6 – МУВ5.

внести вполне заметный и наблюдаемый вклад в такую традиционно считающуюся “чисто” магнитной величиной, как спонтанная намагниченность.

Вклад МУВ в полную тепловую энергию ферромагнетика отражает величина изменения энтальпии  $\Delta H_m(T)$  (рис. 3). Уместно напомнить, что изменение энтальпии относительно некоторой температуры, выбранной в качестве базовой (в нашем случае это точка Кюри  $T_C$ ), может быть непосредственно измерено в калориметрических опытах. Видно, что усиление интенсивности МУВ приводит к соответствующим энергетическим следствиям: дополнительному увеличению запасенной тепловой энергии ферромагнетика.

Рис. 4 дает представление о поведении плотности ферромагнетика  $\rho(T)$ . Изменение плотности вещества магнетика является сравнительно небольшой, но вполне измеряемой величиной (например, с помощью  $\gamma$ -плотномера или путем измерения температурных зависимостей параметров решетки). Магнитная составляющая плотности вещества модельного ферромагнетика  $\rho_m(T) = \rho(T) - \rho_{para}(T)$  в расчетных циклах МУВ0–МУВ5 показана на рис. 5.

На рис. 6 даны расчетные температурные зависимости спонтанной магнитострикции  $\omega_s(T)$  в расчетных циклах МУВ0–МУВ5. Видно, что МУВ достаточной интенсивности способно в разы изменять величину  $\omega_s(T)$  по сравнению с данной величиной, рассчитанной по Ландау. Можно уверенно заключить, что такая величина как объемная магнитострикция не может быть адекватно рассмотрена без явного учета МУВ. Видно также, что при надлежащей величине и соотношении коэффициентов МУВ  $\theta_{ij}$  и их барических производных  $(\partial\theta_{ij}/\partial P)_{TH}$  можно описать довольно широкий спектр типов поведения магнитострикции ферромагнетика  $\omega_s(T)$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В духе феноменологического подхода Ландау, но с явным учетом магнитоупругого взаимодействия магнитной подсистемы с кристаллической решеткой ферромагнетика, находящего отражение в явной магнитной зависимости температуры Дебая в ФМ-области, последовательно построена термодинамическая модель ферромагнетика с МУВ, позволяющая провести количественное вычисление термодинамических функций, соответствующих первым термодинамическим производным ТДП.

Показано, что влияние МУВ может быть сведено к перенормировке магнитной части ТДП, находящей отражение в перенормировке температурных зависимостей термодинамических ко-

эффициентов Ландау  $\alpha(T)$  и  $\beta(T)$  и соответствующей перенормировке всего комплекса термодинамических производных ТДП.

На примере Ni проведены сравнительные численные оценки величины энергетических вкладов МКА и МУВ, а также величины спонтанной магнитной части молярного ТДП  $\Phi_{ms}$  ферромагнетика. Показано, что в никеле МКА по сравнению с МУВ можно пренебречь. В то же время энергия МУВ составляет вполне заметную долю величины  $\Phi_{ms}$  и должна быть учтена.

Сформулированы критерии применимости развитой термодинамической модели ферромагнетика с МУВ.

Проведена серия модельных расчетов температурных зависимостей термодинамических функций, соответствующих первым термодинамическим производным ТДП, в сопоставлении с поведением, предсказанным теорией ТФПВР Ландау в ее традиционной интерпретации.

Показано, что по мере расчетного “продвижения” от поведения по Ландау (МУВ отсутствует) к поведению с последовательно усиливающимся влиянием МУВ в области термодинамической применимости феноменологического подхода ТФПВР происходит заметное изменение удельной спонтанной намагниченности, изменения молярной энтальпии, молярного объема, плотности; объемной спонтанной магнитострикции и др.

Показано, что даже при умеренном “магнитном” изменении температуры Дебая ферромагнетика вследствие МУВ количественное влияние последнего на термодинамические функции ферромагнетика может оказаться существенным. Делается вывод о принципиальной необходимости явного учета МУВ для обеспечения количественного согласия термодинамических расчетов с экспериментальными данными для реальных ферромагнетиков.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

В приложении приведены приближенные выражения для первых термодинамических производных величин  $\Phi_{ij}(T, P)$ ,  $\alpha(T, P)$  и  $\beta(T, P)$ ; члены высшего порядка малости опущены.

Для температурных производных  $\Phi_{ij}(T, P)$  имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\Phi_{ij}}{\partial T}\right)_{PH} &= -3RC_{VR}(z_{para})\frac{\theta_{ij}}{\theta_{para}}(1-\tau') \approx \\ &\approx 3RC_{VR}(z_{para})\frac{\theta_{ij}}{\theta_{para}}. \end{aligned} \quad (A.1)$$

В выражении (A.1)  $C_{VR}(z)$  – нормированная на единицу дебаевская теплоемкость [12],  $\tau' = (T/\theta_{para})(\partial\theta_{para}/\partial T)_{PH}$ . Обычно  $\tau' \ll 1$ . Выражения

для первых барических производных  $(\partial\Phi_{ij}/\partial P)_{TH}$  имеют вид

$$\left(\frac{\partial\Phi_{ij}}{\partial P}\right)_{TH} = 3R\theta_{ij} \left\{ \left[ \frac{3}{8} + \frac{D(z_{para})}{z_{para}} \right] \pi'_{ij} - \frac{C_{VR}(z_{para})}{z_{para}} \pi'_{para} \right\} \quad (A.2)$$

В выражении (A.2)  $\pi'_{ij} = (1/\theta_{ij})(\partial\theta_{ij}/\partial P)_{TH}$ ;  $\pi'_{para} = (1/\theta_{para})(\partial\theta_{para}/\partial P)_{TH}$ .

Температурные производные термодинамических коэффициентов  $\alpha(T)$  и  $\beta(T)$  при  $P, H = \text{const}$  равны

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial T}\right)_{PH} = a_0 + \frac{1}{\mu} \left[ \left(\frac{\partial\Phi_{10}}{\partial T}\right)_{PH} + \Phi_{11} + \left(\frac{\partial\Phi_{11}}{\partial T}\right)_{PH} t \right]; \quad (A.3)$$

$$\left(\frac{\partial\beta}{\partial T}\right)_{PH} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial\Phi_{20}}{\partial T}\right)_{PH} \quad (A.4)$$

Барические производные  $\alpha(T)$  и  $\beta(T)$  в условиях  $T, H = \text{const}$ :

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial P}\right)_{TH} = -a_0 \left(\frac{\partial T_C}{\partial P}\right)_{TH} + \frac{1}{\mu} \left[ \left(\frac{\partial\Phi_{10}}{\partial P}\right)_{TH} - \left(\frac{\partial\Phi_{10}}{\partial P}\right)_{T=T_C, H} - \Phi_{11} \left(\frac{\partial T_C}{\partial P}\right)_{TH} \right] + \left[ \left(\frac{\partial a_0}{\partial P}\right)_{TH} + \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial\Phi_{11}}{\partial P}\right)_{TH} \right] t; \quad (A.5)$$

$$\left(\frac{\partial\beta}{\partial P}\right)_{TH} = \left(\frac{\partial\beta_0}{\partial P}\right)_{TH} + \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial\Phi_{20}}{\partial P}\right)_{TH} \quad (A.6)$$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pytte E. Spin-Phonon Interactions in a Heisenberg Ferromagnet // Annals of Phys. 1965. V. 32. № 3. P. 377.
2. Тябликов С.В. Методы квантовой теории магнетизма. М.: Наука, 1975. 528 с.
3. Shimizu M. Magnetovolume Effects in Itinerant Electron Ferromagnets // J. Magn. Magn. Mater. 1980. V. 20. № 1. P. 47.
4. Shimizu M. Itinerant electron magnetism // Repts. Progr. Phys. 1981. V. 44. № 4. P. 329.
5. Kim D.J. Electron-Phonon Interactions and Itinerant Electron Ferromagnetism // Phys. Rev. B. 1982. V. 25. № 11. P. 6919.
6. Туров Е.А., Шаверов В.Г. Нарушенная симметрия и магнитоакустические эффекты в ферро- и антиферромагнетиках // УФН. 1983. Т. 140. № 3. С. 429.
7. Зверев В.М., Силин В.П. О флуктуационно-фононном подходе к теории магнетизма // ЖЭТФ. 1987. Т. 93. Вып. 2(8). С. 709.

8. Подгорных С.М., Затопляев А.К. Объемная магнитоупругость никеля: два магнитных вклада в коэффициент теплового расширения // ФММ. 1990. № 12. С. 153.
9. Валиев Э.З. Феноменологическая теория магнитоупругого взаимодействия в инварах и элинварах // УФН. 1991. Т. 161. № 8. С. 87.
10. Зверев В.М., Силин В.П. Магнитоупругость и влияние тепловых фононов на магнитные свойства ферромагнетиков // Письма в ЖЭТФ. 1996. Т. 64. Вып. 1. С. 33.
11. Зверев В.М. Об изотопическом эффекте в ферромагнетиках // ЖЭТФ. 1997. Т. 112. Вып. 5(11). С. 1863.
12. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. Ч. I. М.: Наука, 1976. 576 с.
13. Белов К.П. Магнитные превращения. М.: ГИФМЛ, 1959. 260 с.
14. Вонсовский С.В. Магнетизм. Магнитные свойства диа-, пара-, ферро-, антиферро- и ферримагнетиков. М.: Наука, 1971. 1032 с.
15. Бодряков В.Ю. Комплексное исследование влияния решеточного и магнитного ангармонизма на термодинамические свойства твердых тел. Дис. ... докт. физ.-мат. наук. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2005. 500 с.
16. Леванюк А.П. К теории рассеяния света вблизи точек фазовых переходов второго рода // ЖЭТФ. 1959. Т. 36. № 3. С. 810.
17. Стенли Г. Фазовые переходы и критические явления. М.: Мир, 1973. 254 с.
18. Паташинский А.З., Покровский В.Л. Флуктуационная теория фазовых переходов. М.: Наука, 1975. 256 с.
19. Абрикосов А.А. Основы теории металлов. М.: Наука, 1987. 520 с.
20. Physics and Applications of Invar alloys. Tokyo: Maruzen Co., 1978. 646 p.
21. Oomi G., Mori N. Bulk Modulus Anomalies of Fe-Ni and Fe-Pt Invar Alloy // J. Phys. Soc. Japan. 1981. V. 50. № 9. P. 2917.
22. Захаров А.И. Физика прецизионных сплавов с особыми тепловыми свойствами. М.: Металлургия, 1986. 239 с.
23. Солонцов А.З., Васильев А.Н., Вагнер Д.Д. Спиновые флуктуации в металлах и инварная проблема // ФММ. 2000. Т. 90. № 2. С. 113.
24. Ruderman M.A., Kittel C. Indirect Exchange Coupling of Nuclear Magnetic Moments by Conduction Electrons // Phys. Rev. 1954. V. 96. № 1. P. 99.
25. Yosida K. Magnetic Properties of Cu-Mn Alloys // Phys. Rev. 1957. V. 106. № 5. P. 893.
26. Бодряков В.Ю., Повзнер А.А. Термодинамические основания для реализации инварного и элинварного эффектов в ферромагнетиках // ЖТФ. 2004. Т. 74. № 2. С. 66.
27. Бодряков В.Ю., Повзнер А.А. Влияние магнитофононного взаимодействия на магнитные свойства ферромагнетика: модельные расчеты // ФТТ. 2004. Т. 46. № 5. С. 846.

28. Бодряков В.Ю., Повзнер А.А., Сафонов И.В. О зависимости температуры Дебая ферромагнетика от магнитного поля // ТВТ. 2006. Т. 43. № 3. С. 396.
29. Башкатов А.Н., Бодряков В.Ю. Термодинамическое моделирование магнетокалорического эффекта в простых ферромагнетиках // Металлы. 2006. № 6. С. 75.
30. Бодряков В.Ю., Повзнер А.А. Инварное и кварное поведение простых ферромагнетиков: термодинамическое моделирование // ЖТФ. 2007. Т. 77. № 2. С. 65.
31. Бодряков В.Ю., Башкатов А.Н. Физический статистический анализ термодинамических свойств ферромагнетика с учетом МУВ (на примере никеля) // ЖТФ. 2007. Т. 77. № 3. С. 23.
32. Бодряков В.Ю. Элинварное поведение простых ферромагнетиков: термодинамическое моделирование // ЖТФ. 2007. Т. 77. № 8. С. 54.
33. Бодряков В.Ю., Башкатов А.Н. Количественный термодинамический анализ лабораторных данных по намагничиванию ферромагнетика // Заводская лаборатория. 2005. Т. 71. № 5. С. 29.
34. Бодряков В.Ю., Повзнер А.А. Самосогласованное термодинамическое описание немагнитного ферромагнитного твердого тела на примере кремния // ТВТ. 2004. Т. 42. № 4. С. 563.
35. Бодряков В.Ю., Повзнер А.А., Сафонов И.В. Применение самосогласованной термодинамической модели твердого тела для выделения магнитных вкладов в физические свойства магнетиков (на примере никеля) // ФММ. 2005. Т. 100. № 1. С. 4.
36. Бодряков В.Ю., Повзнер А.А., Сафонов И.В. Термодинамический подход к описанию металлических твердых тел // ТВТ. 2006. Т. 43. № 3. С. 396.
37. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970. 720 с.
38. Новикова С.И. Тепловое расширение твердых тел. М.: Наука, 1974. 294 с.
39. Таблицы физических величин. Справочник / Под ред. Кикоина И.К. М.: Атомиздат, 1976. 1008 с.
40. Зиновьев В.Е. Теплофизические свойства металлов при высоких температурах. Справочник. М.: Металлургия, 1989. 272 с.
41. Физические величины. Справочник / Под ред. Григорьева И.С., Мейлихова Е.З. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.
42. Ledbetter H.M., Reed R.P. Elastic Properties of Metals and Alloys. I. Iron, Nickel and Iron-Nickel Alloys // J. Phys. Chem. Ref. Data. 1973. V. 2. № 3. P. 531.
43. Францевич И.В., Воронов Ф.Ф., Бакута С.А. Упругие постоянные и модули упругости металлов и неметаллов. Киев: Наукова думка, 1982. 287 с.