I. G. Khachatryan, Reconstruction of a differential equation from the spectrum,
Funktsional. Anal. i Prilozhen., 1976, Volume 10, Issue 1, 93–94

Функциональный анализ и его приложения,
т. 10, вып. 1, 1976, 93—94.

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПО СПЕКТРУ

И. Г. Хачатрян

Рассмотрим следующую краевую задачу на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$:

$$(-1)^m y^{(2m)} + q(x) y = \lambda y, \tag{1}$$

$$y^{(2\nu)}(0) = y^{(2\nu)}(\pi) = 0, \quad \nu = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{2}$$

с $m \geqslant 1$ и $q(x) \in L_2(0, \pi)$. Обозначим через $\{\lambda_n\}_1^\infty$ последовательность собственных значений задачи (1), (2). Поставим вопрос об определении функции $q(x)$ по заданным собственным значениям $\{\lambda_n\}_1^\infty$. Будем предполагать, что

$$q(x) = q(\pi - x). \tag{3}$$

Ограничение (3) естественно, поскольку замена $q(x)$ на $q(\pi - x)$ не меняет спектра. Вещественность функции $q(x)$ не предполагается. Не нарушая общности, считаем, что

$$\int_0^\pi q(x)\, dx = 0. \tag{4}$$

Обозначим через $L_2'(0, \pi)$ класс функций из $L_2(0, \pi)$, удовлетворяющих условиям (3) и (4). В случае $m = 1$ при условии (3) и естественном предположении относительно последовательности $\{\lambda_n\}_1^\infty$ доказаны единственность и существование решения обратной задачи (см. [1]—[4]). В настоящей работе при $m \geqslant 2$ предполагается, что последовательность $\{\lambda_n\}_1^\infty$ (вообще комплексная) мало уклоняется от последовательности $\{n^{2m}\}_1^\infty$ собственных значений задачи (1), (2) с $q(x) \equiv 0$, и доказывается существование и единственность соответствующей функции $q(x)$, принадлежащей некоторому шару $\| q \|_2 < \rho$ пространства $L_2'(0, \pi)$. Показано, что вне указанного шара в общем случае могут существовать другие функции $q(x)$, порождающие тот же спектр.

Целью настоящей заметки является следующее утверждение, которое мы формулируем при $m \geqslant 2$.

Теорема. *Пусть дана последовательность чисел $\{\lambda_n\}_1^\infty$, удовлетворяющая условию*

$$\left(\sum_{n=1}^\infty |\lambda_n - n^{2m}|^2 \right)^{1/2} < \frac{1}{5}(2^{2m} - 1).$$

Тогда в шаре $\| q \|_2 < \sqrt{\frac{2}{\pi}\left[(2^{2m} - 1) - \left(\sum_{n=1}^\infty |\lambda_n - n^{2m}|^2 \right)^{1/2} \right]}$ *пространства* $L_2'(0, \pi)$ *существует и единственна функция $q(x)$ такая, что $\{\lambda_n\}_1^\infty$ является последовательностью собственных значений задачи* (1), (2) *с этой функцией. При этом функцию $q(x)$ можно найти методом последовательных приближений из следующего уравнения:*

$$q(x) = f(x) + 2 \sum_{j=2}^\infty \underbrace{\int_0^\pi \ldots \int_0^\pi}_{j} \Phi(x, t_1, \ldots, t_j)\, q(t_1) \ldots q(t_j)\, dt_1 \ldots dt_j, \tag{5}$$

где

$$f(x) = -2 \sum_{n=1}^\infty (\lambda_n - n^{2m}) \cos 2nx, \tag{6}$$

$$\Phi(x, t_1, \ldots, t_j) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^\infty [\sin nt_1 G_n(t_1, t_2) \ldots G_n(t_{j-1}, t_j) \sin nt_j] \cos 2nx,$$

а $G_n(x, t) = \dfrac{2}{\pi} \sum_k \dfrac{\sin kx \sin kt}{\lambda_n - k^{2m}}$ (*суммирование ведется по k таким, что $k \neq n$ и $k + n$ четно*).

Сделаем несколько замечаний.

1°. Для сходимости ряда, стоящего в правой части (5), достаточно, чтобы было $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\|q\|_2+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n-n^{2m}|^2\right)^{1/2}<3^{2m}-1$. Уравнение (5) при этом может быть решено относительно $q(x)$ методом последовательных приближений при условии

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n-n^{2m}|^2\right)^{1/2}<\frac{3^{2m}-1}{10\sqrt{2\pi}}. \tag{7}$$

2°. Покажем, что решение $q(x)$ уравнения (5) является решением обратной задачи. Действительно, из (5) получаем, что

$$\frac{1}{2}\int_0^{n} q(x)\cos 2nx\,dx=-\frac{\pi}{2}(\lambda_n-n^{2m})+$$

$$+\sum_{j=2}^{\infty}\underbrace{\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}}_{j}\sin nt_1G_n(t_1,t_2)\ldots G_n(t_{j-1},t_j)\sin nt_jq(t_1)\ldots q(t_j)\,dt_1\ldots dt_j,\ n=1,2,3,\ldots$$

Положив

$$y_n(x)=\sin nx+$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}G_n(x,t_1)\,G_n(t_1,t_2)\ldots G_n(t_{j-1},t_j)\sin nt_jq(t_1)\ldots q(t_j)\,dt_1\ldots dt_j,$$

непосредственной проверкой найдем, что $y_n(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$y_n(x)=\sin nx+\int_0^{\pi}G_n(x,t)\,q(t)\,y_n(t)\,dt, \tag{8}$$

причем $y_n^{(2\nu)}(0)=y_n^{(2\nu)}(\pi)=0$, $\nu=0,1,\ldots,m-1$. Из приведенных формул для $y_n(x)$ следует, что

$$\int_0^{2\pi}\sin nxy_n(x)\,[q(x)-\lambda_n+n^{2m}]\,dx=0,\ n=1,2,3,\ldots \tag{9}$$

Дифференцируя (8) $2m$ раз, учитывая (9) и формулу для $G_n(x,t)$, окончательно получаем

$$(-1)^m\,y_n^{(2m)}(x)+q(x)\,y_n(x)=\lambda_ny_n(x),\qquad n=1,2,3,\ldots$$

3°. Покажем, что в общем случае решение обратной задачи может быть неединственным. Пусть для простоты $m=5$. Последовательности чисел $\{\lambda_n'\}_1^{\infty}$ и $\{\lambda_n''\}_1^{\infty}$ определим следующим образом: $\lambda_n'=n^{10}$ $(n=1,2,3,\ldots)$, $\lambda_1''=2^{10}$, $\lambda_2''=1$, $\lambda_n''=n^{10}$ $(n=3,4,5,\ldots)$. Существенно, что обе последовательности удовлетворяют неравенству (7). Составим две функции $f(x)$ (см. (6)) : $f_1(x)\equiv 0$ и $f_2(x)=-2(2^{10}-1)(\cos 2x-\cos 4x)$. Из уравнения (5) в первом случае получим $q_1(x)\equiv 0$, а во втором случае $q_2(x)\not\equiv 0$, так как $f_2(x)\not\equiv 0$.

В заключение приношу благодарность В. Б. Лидскому за постановку задачи и постоянное внимание при выполнении работы.

Институт проблем механики
АН СССР

Поступило в редакцию
11 июня 1975 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Borg G., Acta Math. 78, № 2 (1946), 1—96. 2. Крейн М. Г., ДАН СССР **76**, № 3, (1951), 345—348. 3. Гельфанд И. М., Левитан Б. М., Изв. АН СССР, серия матем. 15 (1951), 309—360. 4. Левитан Б. М., Гасымов М. Г., УМН **XIX**, вып. 2 (1964), 3—63.