Е. Г. Голузина, О множествах значений систем $\{f(z_0), f'(z_0), c_2\}$ и $\{f(r), f'(r), f(z_0)\}$ в классе типично вещественных функций, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2001, том 276, 41–51

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 276, 2001 г.

Е. Г. Голузина

О МНОЖЕСТВАХ ЗНАЧЕНИЙ СИСТЕМ $\{f\ (z_0),\ f'(z_0), c_2\}$ И $\{f(r),\ f'(r), f(z_0)\}$ В КЛАССЕ ТИПИЧНО ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В работах автора [1–4] для класса T регулярных и типично вещественных в круге $U = \{z : |z| < 1\}$ функций $f(z)$ вида

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n,$$

$\operatorname{Im} f(z) \cdot \operatorname{Im} z > 0$ при $\operatorname{Im} z \neq 0$, были найдены множества значений следующих систем функционалов:

$$\{f(z_0), f(r)\}, \quad \{c_2, c_3, -f(-r)\} \quad [1], \quad \{f(z_0), f(r), c_2\} \quad [2],$$

$$\{f(z_1), f(z_2)\}, \quad \{f(z_1), f'(z_1)\} \quad [3], \quad \{c_2, c_3, \dots, c_n, f(z_0)\} \quad [4].$$

При этом использовались интегральное представление класса T и некоторые теоремы теории моментов [5], обобщающие результаты Каратеодори–Тёплица и Ф. Рисса для класса C функций вида $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, регулярных в круге U с $\operatorname{Re} p(z) > 0$ в U. Ранее этим же способом в [6] в классе C решены общие задачи о множествах значений систем начальных коэффициентов разложений функций $p(z)$ в ряды Тейлора в окрестностях различных фиксированных точек единичного круга. Аналогичные задачи для функций класса T решены в [4].

В данной статье исследуются множества значений систем $\{f(z_0), f'(z_0), c_2\}$ и $\{f(r), f'(r), f(z_0)\}$ в классе T. Как следствие, найдены множества значений $f'(z_0)$ при фиксированных c_2 и $f(z_0)$, $f(z_0)$ при фиксированных $f(r)$ и $f'(r)$.

§1. Формулировки результатов

1. Обозначим через $\mathcal{D}$ множество значений системы $\{f(r), f'(r), f(z_0)\}$ на классе T при фиксированных r и z_0, $0 < r < 1$, $z_0 \in U$, $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$.

Положим

$$\rho = r + \frac{1}{r}, \quad \zeta_0 = z_0 + \frac{1}{z_0}, \quad f(r) = x_1, \quad f'(r) = x_2,$$

$$x_2 \frac{r^2}{1-r^2} = x_2', \quad f(z_0) = x_3 + ix_4 = w_0.$$

Теорема 1. *$\mathcal{D}$ представляет собой множество точек $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, удовлетворяющих следующей системе неравенств:*

$$2\rho x_1 + (4-\rho^2)x_2' - 1 \geqslant 0, \quad x_2' \geqslant x_1^2,$$

$$[2\rho x_1 + (4-\rho^2)x_2' - 1]\left[\frac{\operatorname{Im}(w_0(\zeta_0^2 - 4))}{\operatorname{Im}\zeta_0} - 1\right] \geqslant$$

$$\geqslant \left|\frac{(4-\rho^2)x_1 - (4-\zeta_0^2)w_0}{\zeta_0 - \rho} - 1\right|^2,$$

$$-(x_2' - x_1^2)\frac{\operatorname{Im} w_0}{\operatorname{Im}\zeta_0} - \left|\frac{w_0 - x_1}{\zeta_0 - \rho}\right|^2 - 2x_1 \operatorname{Re}\left[\frac{w_0(\bar{w}_0 - x_1)}{\bar{\zeta}_0 - \rho}\right] - x_2'|w_0|^2 \geqslant 0.$$

Каждой точке на границе множества $\mathcal{D}$ соответствует единственная функция класса T вида

$$f(z) = \sum_{k=1}^{3} \frac{\lambda_k z}{1 - 2t_k z + z^2}, \quad \sum_{k=1}^{3} \lambda_k = 1, \quad \lambda_k \geqslant 0,$$

$$t_k \in [-1, 1], \quad t_k \neq t_j \quad \textit{при} \quad k \neq j, \quad k = 1, 2, 3.$$

В [3] показано, что множество значений системы $\{f(r), f'(r)\}$ на классе T определяется системой двух неравенств

$$f'(r) \geqslant \frac{1-r^2}{r^2} f^2(r), \quad 2\rho f(r) + (4-\rho^2)\frac{r^2}{1-r^2} f'(r) \geqslant 1$$

($r \in (0,1)$ и фиксировано).

Пусть $T(r; a, b) = \{f(z) \in T : f(r) = a, f'(r) = b\}$, где r, a, b и z_0 фиксированы и удовлетворяют условиям

$$0 < r < 1, \quad \frac{r^2}{1-r^2} b > a^2, \quad 2\rho a + (4-\rho^2)\frac{r^2}{1-r^2} b > 1,$$

$$z_0 \in U, \quad \operatorname{Im} z_0 \neq 0.$$

Следствие 1. *Множество $\mathcal{D}(r;a,b)$ значений функционала $f(z_0)$ на классе $T(r;a,b)$ представляет собой пересечение двух кругов $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$, где*

$$\mathcal{D}_j=\{w:|w-O_j|\leqslant R_j\},\quad j=1,2,$$

$$O_1=\frac{1}{\zeta_0^2-4}\left[\zeta_0-\rho+(\rho^2-4)a+\frac{i\Delta|\zeta_0-\rho|^2}{2\operatorname{Im}\zeta_0}\right],$$

$$R_1=\frac{\Delta|\zeta_0-\rho|^2}{2|\operatorname{Im}\zeta_0|\,|\zeta_0^2-4|},$$

$$O_2=\frac{\Delta_2}{2\Delta_1\operatorname{Im}\zeta_0},\quad R_2=\frac{(b_1-a^2)|\zeta_0-\rho|^2}{2|\Delta_1\operatorname{Im}\zeta_0|}$$

при обозначениях

$$\Delta=(4-\rho^2)b_1+2\rho a-1,$$

$$\Delta_1=1-2(\rho-\operatorname{Re}\zeta_0)a+|\rho-\zeta_0|^2b_1,$$

$$\Delta_2=-i\Delta_1+i[(\rho-\bar\zeta_0)a-1]^2,$$

$$b_1=br^2/(1-r^2).$$

Каждой точке границы множества $\mathcal{D}(r;a,b)$ соответствует единственная функция класса $T(r;a,b)$. Указанная граница состоит из двух круговых дуг $\Gamma_1\in\partial\mathcal{D}_1$ и $\Gamma_2\in\partial\mathcal{D}_2$ и точкам на Γ_j, $j=1,2$, соответствуют функции $f_j(z)$:

$$f_1(z)=\frac{z}{(1-z^2)^2}\left[1-[\rho+(4-\rho^2)a]z+z^2+\frac{\Delta(\rho-2t)(1-\rho z+z^2)z}{1-2tz+z^2}\right]$$

при $t\in[t^{(1)},t^{(-1)}]$,

$$f_2(z)=\frac{z[1-(\rho-a(\rho-2t)\varphi(t))z+z^2]}{(1-2tz+z^2)[1-(\rho-\varphi(t))z+z^2]}$$

при $t\in[-1,t^{(1)}]$, где

$$\varphi(t)=\frac{1-a(\rho-2t)}{a-b_1(\rho-2t)},\quad 2t^{(\varepsilon)}=\rho-\varphi(\varepsilon),\quad \varepsilon=\pm1.$$

Обозначим через Ω множество значений системы $\{f(z_0),f'(z_0),c_2\}$ на классе T при фиксированном $z_0\in U$, $\operatorname{Im}z_0\neq0$.

Положим

$$\zeta(z)=z+\frac{1}{z},\quad \zeta_0=\zeta(z_0),$$

$$c_2=x_1,\quad f(z_0)=w_1\equiv x_2+ix_3,\quad f'(z_0)=x_4+ix_5,\quad -\frac{f'(z_0)}{\zeta'(z_0)}=w_2.$$

Теорема 2. *Ω представляет собой множество точек $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$, удовлетворяющих следующей системе пяти неравенств:*

$$|x_1| \leqslant 2, \quad (x_1\varepsilon - 2)\frac{\operatorname{Im}[(2-\varepsilon\zeta_0)w_1]}{\operatorname{Im}\zeta_0} \geqslant |1-(\zeta_0-2\varepsilon)w_1|^2,$$

$$(2-\varepsilon x_1)\left[\frac{\operatorname{Im}(w_1(2-\varepsilon\zeta_0))}{\operatorname{Im}\zeta_0}\right]^2 + \frac{2|1-(\zeta_0-2\varepsilon)w_1|^2\operatorname{Im}[w_1(2-\varepsilon\zeta_0)]}{\operatorname{Im}\zeta_0} +$$

$$+2\operatorname{Re}\left[(1-(\bar\zeta_0-2\varepsilon)\bar w_1)^2(w_1+(2\varepsilon-\zeta_0)w_2)\right] -$$

$$-(2-\varepsilon x_1)|w_1+(2\varepsilon-\zeta_0)w_2|^2 \geqslant 0, \quad \varepsilon=-1,1.$$

В [8] доказано, что множество значений системы $\{c_2, f(z_0)\}$ на классе T ($\operatorname{Im} z_0 \neq 0$, z_0 фиксировано) есть множество точек в $\mathbb{R}^3$, удовлетворяющих системе трех неравенств

$$|c_2| \leqslant 2, \quad (c_2\varepsilon - 2)\frac{\operatorname{Im}[(2-\varepsilon\zeta_0)w_1]}{\operatorname{Im}\zeta_0} \geqslant |1-(\zeta_0-2\varepsilon)w_1|^2,$$

$\varepsilon = -1, 1$.

Пусть $T(c;\zeta_0,w_0) = \{f \in T : c_2 = c,\ f(z_0) = w_0\}$ при фиксированных c, z_0 и w_0, удовлетворяющих условиям

$$|c| < 2, \quad (c\varepsilon - 2)\frac{\operatorname{Im}[(2-\varepsilon\zeta_0)w_0]}{\operatorname{Im}\zeta_0} > |1-(\zeta_0-2\varepsilon)w_0|^2,$$

$$z_0 \in U, \quad \operatorname{Im} z_0 \neq 0.$$

Следствие 2. *Множество Ω' значений функционала $f'(z_0)$ на классе $T(c;z_0,w_0)$ представляет собой пересечение двух кругов Ω_1 и Ω_{-1}, где*

$$\Omega_\varepsilon = \{w : |w - O'_\varepsilon| \leqslant R'_\varepsilon\},$$

$$O'_\varepsilon = \frac{1-z_0^2}{z_0(1+\varepsilon z_0)^2}\left[w_0 + \frac{1}{c+2\varepsilon}\left(1-\frac{(1+\varepsilon z_0)^2}{z_0}\,w_0\right)^2\right]$$

$$R'_\varepsilon = \left|\frac{1-z_0^2}{z_0(1+\varepsilon z_0)^2}\right| \cdot \left|\frac{1}{\operatorname{Im}(z_0+1/z_0)}\operatorname{Im}\left[\frac{(1+\varepsilon z_0)^2}{z_0}w_0\right] +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{c+2\varepsilon}\left|1-\frac{(1+\varepsilon z_0)^2}{z_0}w_0\right|^2\right|, \quad \varepsilon = -1, +1.$$

Точкам множества Ω', лежащим на $\partial\Omega_\varepsilon$, соответствуют функции

$$f_\varepsilon(z,t) = \frac{\lambda_1^{(\varepsilon)} z}{1+2\varepsilon z+z^2} + \frac{\lambda_2^{(\varepsilon)} z}{1-2tz+z^2} + \frac{\lambda_3^{(\varepsilon)} z}{1-2\tau^{(\varepsilon)}z+z^2}, \quad t\in[-1,1],$$

при

$$\tau^{(\varepsilon)} = \tau^{(\varepsilon)}(t) = \frac{\operatorname{Im}[a^{(\varepsilon)}(t)\zeta_0]}{2\operatorname{Im} a^{(\varepsilon)}(t)}, \quad \tau^{(\varepsilon)}\in[-1,1],$$

$$\lambda_1^{(\varepsilon)} = \frac{1}{2(\varepsilon+t)}\left[2t-c-\frac{|a^{(\varepsilon)}(t)|^2\operatorname{Im}\zeta_0}{\operatorname{Im}[a^{(\varepsilon)}(t)(\zeta_0+2\varepsilon)]}\right],$$

$$\lambda_2^{(\varepsilon)} = \frac{1}{2(\varepsilon+t)}\left[c+2\varepsilon+\frac{|a^{(\varepsilon)}(t)|^2\operatorname{Im}\zeta_0}{\operatorname{Im}[a^{(\varepsilon)}(t)(\zeta_0-2t)]}\right],$$

$$\lambda_3^{(\varepsilon)} = \frac{-|a^{(\varepsilon)}(t)|^2\operatorname{Im} a^{(\varepsilon)}(t)\operatorname{Im}\zeta_0}{\operatorname{Im}[a^{(\varepsilon)}(t)(\zeta_0-2t)]\operatorname{Im}[a^{(\varepsilon)}(t)(\zeta_0+2\varepsilon)]},$$

где

$$a^{(\varepsilon)}(t) = -c+2t+[w_0(\zeta_0-2t)-1](\zeta_0+2\varepsilon).$$

§2. Доказательства

2.1. Доказательство теоремы 1

Для класса T известно интегральное представление

$$f(z)\in T \Longleftrightarrow f(z)=\int\limits_{-1}^{1}\frac{z}{1-2tz+z^2}\,d\alpha(t), \quad \alpha\in M_1, \tag{1}$$

где M_1 – класс функций $\alpha(t)$, неубывающих на $[-1,1]$, $\int_{-1}^1 d\alpha(t) = 1$. Поэтому для системы $\{f(r), f'(r), f(z_0)\}$ имеем представление

$$\begin{gathered} f(r)=\int\limits_{-1}^{1}\frac{d\alpha(t)}{\rho-2t}, \quad f'(r)=\int\limits_{-1}^{1}\frac{-\zeta'(r)}{(\rho-2t)^2}\,d\alpha(t), \\ f(z_0)=\int\limits_{-1}^{1}\frac{d\alpha(t)}{\zeta_0-2t}, \quad \alpha\in M_1. \end{gathered} \tag{2}$$

Из (2) следует, что $\mathcal{D}$ – выпуклое, ограниченное и замкнутое множество в $\mathbb{R}^4$. По теореме в [5, теорема 1.3, с. 86–87], для того чтобы имело место представление (2), необходимо и достаточно, чтобы из справедливости для всех $t \in [-1,1]$ неравенства

$$\varphi(t) \equiv \operatorname{Re}\left[\delta_0 + \frac{\delta_1}{\rho - 2t} + \frac{\delta_2}{(\rho-2t)^2} + \frac{\delta_3}{\zeta_0 - 2t}\right] \geqslant 0, \tag{3}$$

(где $\delta_0 \neq 0$, $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ – некоторые комплексные числа) следовало бы неравенство

$$H \equiv \operatorname{Re}[\delta_0 + \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2' + \delta_3 w_0] \geqslant 0. \tag{4}$$

Запишем (3) в виде

$$\varphi(t) = \frac{A_4(t)}{(\rho-2t)^2|\zeta_0 - 2t|^2} \geqslant 0, \quad -1 \leqslant t \leqslant 1, \tag{5}$$

где $A_4(t)$ – алгебраический многочлен четвертой степени от t. По теореме Маркова–Лукача [5, с. 89], имеем

$$A_4(t) = (1-t^2)(X_0 + X_1 t)^2 + (Y_0 + Y_1 t + Y_2 t^2)^2, \tag{6}$$

где X_0, X_1, Y_0, Y_1, Y_2 – некоторые вещественные числа. Подставим (6) в левую часть неравенства (5) и запишем $\varphi(t)$ в виде

$$\varphi(t) = (1-t^2)\left|\frac{X_0 + X_1 t}{(\rho-2t)(\zeta_0-2t)}\right|^2 + \left|\frac{Y_0 + Y_1 t + Y_2 t^2}{(\rho-2t)(\zeta_0-2t)}\right|^2 =$$

$$= (1-t^2)\left|\frac{\alpha_0}{\rho-2t} + \frac{\alpha_1}{\zeta_0-2t}\right|^2 + \left|\beta_0 + \frac{\beta_1}{\rho-2t} + \frac{\beta_2}{\zeta_0-2t}\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{4-\rho^2}{(\rho-2t)^2} + \frac{2\rho}{\rho-2t} - 1\right]|\alpha_0|^2 +$$

$$+ \frac{1}{4}\left[2\operatorname{Re}\frac{4-\zeta_0^2}{(\bar\zeta_0 - \zeta_0)(\zeta_0-2t)} - 1\right]|\alpha_1|^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{\left[\frac{1}{\zeta_0-\rho}\left(\frac{4-\rho^2}{\rho-2t} - \frac{4-\zeta_0^2}{\zeta_0-2t}\right) - 1\right]\bar\alpha_0\alpha_1\right\} +$$

$$+ |\beta_0|^2 + \frac{|\beta_1|^2}{(\rho-2t)^2} + 2\operatorname{Re}\frac{1}{(\bar\zeta_0-\zeta_0)(\zeta_0-2t)}|\beta_2|^2 +$$

$$+ 2\operatorname{Re}\left[\bar\beta_0\left(\frac{\beta_1}{\rho-2t} + \frac{\beta_2}{\zeta_0-2t}\right)\right] +$$

$$+2\,\mathrm{Re}\left\{\left[\frac{1}{\rho-\zeta_0}\left(\frac{1}{\zeta_0-2t}-\frac{1}{\rho-2t}\right)\right]\bar{\beta}_1\beta_2\right\},$$

где α_0, α_1 и $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ – комплексные числа, зависящие, соответственно, от X_0, X_1 и Y_0, Y_1, Y_2.

Далее, если $\varphi(t) \geqslant 0$ на $[-1,1]$, то в силу неравенств (3) и (4) имеем $H \geqslant 0$, где

$$H = A_{00}|\alpha_0|^2 + A_{11}|\alpha_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\bar{\alpha}_0\alpha_1 A_{01} +$$
$$+B_{00}|\beta_0|^2 + B_{11}|\beta_1|^2 + B_{22}|\beta_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(B_{01}\bar{\beta}_0\beta_1) +$$
$$+2\,\mathrm{Re}(B_{02}\bar{\beta}_0\beta_2) + 2\,\mathrm{Re}(B_{12}\bar{\beta}_1\beta_2) \qquad (7)$$

и

$$A_{00} = (4-\rho^2)x_2' + 2\rho x_1 - 1,$$
$$A_{11} = \frac{1}{\mathrm{Im}\,\zeta_0}\,\mathrm{Re}[(4-\zeta_0^2)iw_0] - 1,$$
$$A_{01} = \frac{1}{(\zeta_0-\rho)}\big[(4-\rho^2)x_1 - (4-\zeta_0^2)w_0\big] - 1, \quad A_{10} = -\bar{A}_{01},$$
$$B_{00} = 1, \quad B_{11} = x_2', \quad B_{22} = -\mathrm{Im}\,w_0/\,\mathrm{Im}\,\zeta_0, \quad B_{01} = B_{10} = x_1,$$
$$B_{02} = w_0, \quad B_{20} = \bar{B}_{02}, \quad B_{12} = \frac{w_0 - x_1}{\rho - \zeta_0}, \quad B_{21} = \bar{B}_{12}.$$

Неотрицательность эрмитовой формы (7) равносильна неотрицательности всех главных миноров матриц

$$\begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} \\ \bar{A}_{01} & A_{11} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} \\ B_{01} & B_{11} & B_{12} \\ \bar{B}_{02} & \bar{B}_{12} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Далее, нам потребуется

Лемма 1. *Точка $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ является внутренней точкой множества $\mathcal{D}$ тогда и только тогда, когда эрмитова форма* (7) *положительно определена.*

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 1 в [4]. Положительная определенность эрмитовой формы (7) равносильна [7, с. 300] выполнению строгих неравенств

$$A_{00} > 0, \quad A_{00}A_{11} > |A_{10}|^2,$$

$$x_2' > x_1^2, \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & w_0 \\ x_1 & x_2' & \frac{w_0 - x_1}{\rho - \zeta_0} \\ \bar{w}_0 & \frac{\bar{w}_0 - x_1}{\rho - \bar{\zeta}_0} & -\frac{\operatorname{Im} w_0}{\operatorname{Im} \zeta_0} \end{vmatrix} > 0,$$

что, ввиду замкнутости множества $\mathcal{D}$, доказывает первое утверждение теоремы 1.

Доказательство второго утверждения теоремы 1 аналогично доказательству леммы 2 в [4]. □

2.2. Доказательство теоремы 2

В силу (1), для системы $\{c_2, f(z_0), f'(z_0)\}$ имеем представление

$$c_2 = \int_{-1}^{1} 2t d\alpha(t), \quad f(z_0) = \int_{-1}^{1} \frac{d\alpha(t)}{\zeta_0 - 2t}, \quad f'(z_0) = \int_{-1}^{1} \frac{-\zeta'(z_0) d\alpha(t)}{(\zeta_0 - 2t)^2}, \tag{8}$$

$\alpha(t) \in M_1$.

Отсюда следует, что Ω – выпуклое замкнутое ограниченное множество в $\mathbb{R}^5$. В силу (8) и теоремы 1.3 в [5, с. 86–87] выполнение при всех $t \in [-1, 1]$ неравенства

$$\psi(t) \equiv \operatorname{Re}\left[\alpha_0 + \alpha_1 t + \frac{\alpha_2}{\zeta_0 - 2t} + \frac{\alpha_3}{(\zeta_0 - 2t)^2}\right] \geqslant 0,$$

(где $\alpha_0 \neq 0$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ – некоторые числа) равносильно справедливости неравенства $\operatorname{Re}[\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 w_1 + \alpha_3 w_2] \geqslant 0$.

Запишем $\psi(t)$ в виде

$$\psi(t) = \frac{A_5(t)}{|\zeta_1 - 2t|^4}.$$

По теореме Маркова–Лукача,

$$A_5(t) = (1-t)(X_0 + X_1 t + X_2 t^2)^2 + (1+t)(Y_0 + Y_1 t + Y_2 t^2)^2,$$

где X_k и Y_k $(k = 0, 1, 2)$ – некоторые вещественные числа. Поэтому $\psi(t)$ можно записать следующим образом:

$$\psi(t) = (1-t)\left|\beta_0 + \frac{\beta_1}{\zeta_0 - 2t} + \frac{\beta_2}{\bar{\zeta}_0 - 2t}\right|^2 +$$

$$+(1+t)\left|\gamma_0 + \frac{\gamma_1}{\zeta_0 - 2t} + \frac{\gamma_2}{\bar{\zeta}_0 - 2t}\right|^2 =$$

$$
\begin{aligned}
&= (1-t)|\beta_0|^2 + \frac{\operatorname{Im}\frac{\zeta_0-2}{\zeta_0-2t}}{2\operatorname{Im}\zeta_0}(|\beta_1|^2+|\beta_2|^2)+\\
&+\operatorname{Re}\left[\left(1+\frac{2-\zeta_0}{\zeta_0-2t}\right)(\bar\beta_0\beta_1+\beta_0\bar\beta_2)\right]+\\
&+\operatorname{Re}\left[\left(\frac{1}{\zeta_0-2t}+\frac{2-\zeta_0}{(\zeta_0-2t)^2}\right)\beta_1\bar\beta_2\right]+\\
&+(1+t)|\gamma_0|^2 - \frac{\operatorname{Im}\frac{\zeta_0+2}{\zeta_0-2t}}{2\operatorname{Im}\zeta_0}(|\gamma_1|^2+|\gamma_2|^2)+\\
&+\operatorname{Re}\left[\left(-1+\frac{2+\zeta_0}{\zeta_0-2t}\right)(\bar\gamma_0\gamma_1+\gamma_0\bar\gamma_2)\right]+\\
&+\operatorname{Re}\left[\left(-\frac{1}{\zeta_0-2t}+\frac{\zeta_0+2}{(\zeta_0-2t)^2}\right)\gamma_1\bar\gamma_2\right],
\end{aligned}
$$

где β_k и γ_k $(k=1,2,3)$ – комплексные числа, зависящие соответственно от X_k и Y_k.

В силу условия $\psi(t)\geqslant 0$ для всех $t\in[-1,1]$, эрмитова форма

$$
\begin{aligned}
H = \left(1-\frac{c_2}{2}\right)|\beta_0|^2 + \frac{\operatorname{Im}[(\zeta_0-2)w_1]}{2\operatorname{Im}\zeta_0}(|\beta_1|^2+|\beta_2|^2)+\\
+\operatorname{Re}[(1+(2-\zeta_0)w_1)(\bar\beta_0\beta_1+\beta_0\bar\beta_2)]+\operatorname{Re}[(w_1+(2-\zeta_0)w_2)\beta_1\bar\beta_2]+\\
+\left(1+\frac{c_2}{2}\right)|\gamma_0|^2 - \frac{\operatorname{Im}[(\zeta_0+2)w_1]}{2\operatorname{Im}\zeta_0}(|\gamma_1|^2+|\gamma_2|^2)+\\
+\operatorname{Re}[(-1+(2+\zeta_0)w_1)(\bar\gamma_0\gamma_1+\gamma_0\bar\gamma_2)]+\\
+\operatorname{Re}[(-w_1+(\zeta_0+2)w_2)\gamma_1\bar\gamma_2]\geqslant 0. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Далее воспользуемся следующей леммой.

Лемма 2. *Точка $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{R}^5$ является внутренней точкой множества Ω тогда и только тогда, когда эрмитова форма в (9) положительно определена.*

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 1 в [4].

Остается заметить, что положительная определенность формы (9) равносильна положительности последовательных главных миноров соответствующей эрмитовой матрицы. В силу замкнутости множества Ω, это доказывает теорему 2. $\square$

2.3. Следствия 1 и 2 получаем соответственно из теорем 1 и 2. Для этого следует записать два последних неравенства в формулировках этих теорем в виде

$$|w - O_j| \leqslant R_j \quad \text{и} \quad |w - O'_\varepsilon| \leqslant R'_\varepsilon, \quad j = 1, 2, \quad \varepsilon = -1, +1$$

и проверить справедливость равенств

$$|f_j(z_0) - O_j| = R_j \quad \text{и} \quad \left| \frac{\partial f_\varepsilon(z_0, t)}{\partial z} - O'_\varepsilon \right| = R'_\varepsilon.$$

Действительно, нетрудно видеть, что

$$f_1(z_0) - O_1 = \frac{\Delta(\zeta_0 - \rho)^2(\bar{\zeta}_0 - 2t)}{(\zeta_0^2 - 4)(\zeta_0 - \bar{\zeta}_0)(\zeta_0 - 2t)}.$$

Проводя вычисления, получим

$$f_2(z_0) - O_2 = \frac{(b_1 - a_1^2)(\bar{\zeta}_0 - 2t)(\rho - \zeta_0)^2(\bar{\zeta}_0 - \rho + \varphi(t))}{(\zeta_0 - \bar{\zeta}_0)(\zeta_0 - 2t)(\zeta_0 - \rho + \varphi(t))\Delta_1}.$$

Далее, заметим, что

$$|f'_\varepsilon(z_0) - O'_\varepsilon| = \left| \frac{1 - z_0^2}{z_0^2} \right| \cdot \left| \frac{16\lambda_2(t + \varepsilon)\lambda_3(\tau + \varepsilon)(\tau - t)^2}{(c + 2\varepsilon)(\zeta_0 - 2t)^2(\zeta_0 - 2\tau)^2} \right|$$

и что

$$2\lambda_2(t + \varepsilon) =$$

$$= \frac{|\zeta_0 - 2t|^2(|w_0(\zeta_0 + 2\varepsilon) - 1|^2 \operatorname{Im}\zeta_0 + (c + 2\varepsilon)\operatorname{Im}[w_0(\zeta_0 + 2\varepsilon)])}{\operatorname{Im}[a^{(\varepsilon)}(t)(\zeta_0 - 2t)]},$$

$$2\lambda_3(\tau + \varepsilon) = -\frac{|a^{(\varepsilon)}(t)|^2 \operatorname{Im}\zeta_0}{\operatorname{Im}[a^{(\varepsilon)}(t)(\zeta_0 - 2t)]},$$

$$2(\tau - t) = \frac{\operatorname{Im}[a^{(\varepsilon)}(t)(\zeta_0 - 2t)]}{\operatorname{Im} a^{(\varepsilon)}(t)}$$

$$\zeta_0 - 2\tau = -\frac{\bar{a}^{(\varepsilon)}(t)\operatorname{Im}\zeta_0}{\operatorname{Im} a^{(\varepsilon)}(t)}. \quad \square$$

Литература

1. Е. Г. Голузина, *О множестве значений одной системы функционалов в классе типично вещественных функций,* Зап. научн. семин. ПОМИ **226** (1996), 69–79.
2. Е. Г. Голузина, *О множестве значений $f(z_0)$ в одном классе типично вещественных функций,* Зап. научн. семин. ПОМИ **237**, (1997), 46–55.
3. Е. Г. Голузина, *О множестве значений систем $\{f(z_1), f'(z_1)\}$ и $\{f(z_1), f(z_2)\}$ в классе типично вещественных функций,* Зап. научн. семин. ПОМИ **254** (1998), 65–75.
4. Е. Г. Голузина, *Об областях значений некоторых систем функционалов в классе типично вещественных функций,* Вестн. ЛГУ, No. 7, сер. мат., мех. и астр., вып. 2 (1965), 45–62.
5. М. Г. Крейн, А. А. Нудельман, *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи,* М., 1973.
6. В. А. Андреева, Н. А. Лебедев, А. В. Стовбун, *Об областях значений некоторых систем функционалов в некоторых классах регулярных функций,* Вестн. ЛГУ, No. 7, сер. мат., мех. и астр., вып. 2 (1961), 8–22.
7. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц,*. 3-е изд., М., 1967.
8. Ю. Е. Аленицын, *Об областях изменения систем коэффициентов функций, представимых суммой интегралов Стилтьеса,* Вестн. ЛГУ, No. 7, сер. мат., мех. и астр., вып. 2 (1962), 25–41.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 19 февраля 2001 г.