В. А. Юмагужин, Интегрируемые геометрические структуры конечного типа, *Фундамент. и прикл. матем.*, 2004, том 10, выпуск 1, 255–269

Интегрируемые геометрические структуры конечного типа*

В. А. ЮМАГУЖИН
Силезский университет, Опава
e-mail: yuma@diffiety.botik.ru

УДК 514.763.3+514.763.5+514.763.8

Ключевые слова: геометрическая структура, G-структура, проблема эквивалентности, дифференциальный инвариант, структурная функция, дифференциальная группа, когомологии Спенсера.

Аннотация

В работе изучаются геометрические структуры произвольного порядка и конечного типа. Целью работы является решение проблемы интегрируемости таких структур. Эта проблема эквивалентна проблеме интегрируемости соответствующих G-структур. Для решения последней строятся структурные функции произвольной G-структуры порядка $\geqslant 1$. Для G-структур первого порядка эти функции совпадают с хорошо известными структурными функциями, хотя конструкции их различны. Для G-структуры конечного типа доказывается, что обращение в нуль структурных функций соответствующего числа её первых продолжений является необходимым и достаточным условием интегрируемости этой структуры. Показано применение этого результата к получению условий линеаризуемости обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка точечными преобразованиями и к получению условий приводимости обыкновенных уравнений третьего порядка контактными преобразованиями к виду $y''' = 0$.

Abstract

V. A. Yumaguzhin, Finite-type integrable geometric structures, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 10 (2004), no. 1, pp. 255—269.

In this paper, we consider finite-type geometric structures of arbitrary order and solve the integrability problem for these structures. This problem is equivalent to the integrability problem for the corresponding G-structures. The latter problem is solved by constructing the structure functions for G-structures of order $\geqslant 1$. These functions coincide with the well-known ones for the first-order G-structures, although their constructions are different. We prove that a finite-type G-structure is integrable if and only if the structure functions of the corresponding number of its first prolongations are equal to zero. Applications of this result to second- and third-order ordinary differential equations are noted.

Введение

В этой работе решается проблема интегрируемости геометрических структур произвольного порядка и конечного типа, т. е. проблема локальной эквивалентности таких структур стандартно-плоским геометрическим структурам.

*Работа была поддержана Министерством образования, молодёжи и спорта Чешской Республики, грант MSM:J10/98:192400002.

Фундаментальная и прикладная математика, 2004, том 10, № 1, с. 255—269.

Произвольную геометрическую структуру Ω порядка k над многообразием M можно представлять, следуя [2], как отображение $\Omega\colon P_k(M) \to \mathbb{R}^N$ расслоения $P_k(M)$ реперов порядка k над M в некоторое арифметическое пространство $\mathbb{R}^N$, на котором действует дифференциальная группа порядка k. При этом предполагается, что действия этой группы на $P_k(M)$ и $\mathbb{R}^N$ согласованы (см. п. 1.4).

Прообраз $B = \Omega^{-1}(q)$ всякого значения $q \in \operatorname{Im}\Omega$ является G-структурой k-го порядка. Под продолжением порядка r G-структуры B мы понимаем $G^{(r)}$-структуру $k+r$-го порядка $B^{(r)} = (\Omega^{(r)})^{-1}(q_r)$, естественно проектирующуюся в B, здесь $\Omega^{(r)}$ — r-е дифференциальное продолжение структуры Ω.

Проблема интегрируемости геометрических структур эквивалентна проблеме интегрируемости соответствующих G-структур. Для решения последней мы следуем хорошо известному подходу к решению проблемы эквивалентности для G-структур первого порядка (см., например, [9]). Мы строим структурные функции G-структур произвольного порядка (см. раздел 2). Эти функции определены на G-структурах и принимают значения в соответствующих когомологиях Спенсера. Для структур первого порядка они совпадают с хорошо известными структурными функциями G-структур первого порядка (см. [9]), хотя конструкции их различны.

Мы доказываем (теорема 3.2) для G-структур конечного типа, что обращение в нуль структурных функций самой G-структуры и соответствующего числа её первых продолжений является необходимым и достаточным условием её эквивалентности локально-плоской структуре.

В последнем разделе мы показываем применение теоремы 3.2 к получению известных условий линеаризуемости обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка точечными преобразованиями и к получению условий приводимости обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка контактными преобразованиями к виду $y''' = 0$.

В этой работе все многообразия и отображения предполагаются гладкими. Через $[f]_p^k$ обозначается k-джет отображения f в точке p, через $\mathbb{R}$ обозначается поле действительных чисел и через $\mathbb{R}^n$ обозначается n-мерное арифметическое пространство.

1. Предварительные сведения

В этом разделе излагаются все необходимые предварительные сведения. Подробности можно найти в работах [1, 2, 4—6].

1.1. Формальные векторные поля

Через W_n мы обозначим множество ∞-джетов в точке $0 \in \mathbb{R}^n$ всех векторных полей, определённых в окрестности 0 пространства $\mathbb{R}^n$. Операции

$$\lambda \cdot [X]_0^\infty = [\lambda \cdot X]_0^\infty, \quad [X]_0^\infty + [Y]_0^\infty = [X+Y]_0^\infty, \quad [\,[X]_0^\infty, [Y]_0^\infty] = [\,[X,Y]\,]_0^\infty$$

определяют на W_n структуру алгебры Ли.

Через L_k, $k = -1, 0, 1, 2, \ldots$, обозначим подалгебру в W_n, определяемую формулой

$$L_k = \{\, [X]_0^\infty \in W_n \mid [X]_0^k = 0\}, \quad k \geqslant 0, \quad L_{-1} = W_n.$$

Положим

$$V = W_n/L_0.$$

Очевидно, $V \cong \mathbb{R}^n$. Имеет место фильтрация

$$W_n = L_{-1} \supset L_0 \supset L_1 \supset \ldots \supset L_k \supset L_{k+1} \supset \ldots.$$

Формула

$$[L_i, L_j] = L_{i+j}, \quad i \geqslant -1, \quad j \geqslant 0,$$

позволяет определить скобки на факторах:

$$[\cdot,\cdot]\colon W_n/L_k \times W_n/L_k \to W_n/L_{k-1}, \tag{1}$$

$$[\cdot,\cdot]\colon V \times L_k/L_{k+1} \to L_{k-1}/L_k. \tag{2}$$

Последняя формула приводит к каноническому изоморфизму

$$L_k/L_{k+1} \cong V \otimes S^k(V^*).$$

Пусть $g_k \subset L_{k-1}/L_k$. Подпространство $g_k^{(i)} \subset L_{k-1+i}/L_{k+i}$, определяемое формулой

$$g_k^{(i)} = \{X \in L_{k-1+i}/L_{k+i} \mid \forall v_1, \ldots, v_i \in V \ [v_1, \ldots, [v_i, X] \ldots] \in g_k\},$$

называется *i-м продолжением подпространства g_k.*

Пусть последовательность подпространств

$$g_1, g_2, \ldots, g_i, \ldots,$$

где $g_i \subset L_{i-1}/L_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, удовлетворяет условию

$$g_{i+1} \subset g_i^{(1)}.$$

Тогда для каждого g_i имеется комплекс

$$\begin{gathered} 0 \to g_i \xrightarrow{\partial_{i,0}} g_{i-1} \otimes V^* \xrightarrow{\partial_{i-1,1}} g_{i-2} \otimes \wedge^2 V^* \xrightarrow{\partial_{i-2,2}} \ldots \\ \ldots \xrightarrow{\partial_{2,i-2}} g_1 \otimes \wedge^{i-1} V^* \xrightarrow{\partial_{1,i-1}} V \otimes \wedge^i V^*, \end{gathered} \tag{3}$$

где оператор $\partial_{k,l}\colon g_k \otimes \wedge^l V^* \to g_{k-1} \otimes \wedge^{l+1} V^*$ определяется следующим образом: элемент $\xi \in g_k \otimes \wedge^l V^*$ можно рассматривать как внешнюю форму на V со значениями в g_k, тогда

$$(\partial_{k,l}(\xi))(v_1, \ldots, v_{l+1}) = \sum_{i=1}^{l+1} (-1)^{i+1} [v_i, \xi(v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{l+1})].$$

Когомологии этого комплекса в члене $g_k \otimes \wedge^l V^*$ обозначаются через $H^{k,l}$ и называются когомологиями Спенсера.

1.2. Дифференциальные группы

Пусть $\mathcal{D}$ — множество всех диффеоморфизмов, определённых в окрестности нуля пространства $\mathbb{R}^n$ и сохраняющих нуль. Положим

$$D_k = \{\, [d]_0^k \mid d \in \mathcal{D}\}.$$

Операция $[d_1]_0^k \cdot [d_2]_0^k = [d_1 \circ d_2]_0^k$ определяет на D_k структуру группы Ли. Очевидно,

$$([d]_0^k)^{-1} = [d^{-1}]_0^k \quad \text{и} \quad e = [\mathrm{id}]_0^k.$$

Группа Ли D_k называется *дифференциальной группой порядка* k. Алгебра Ли группы D_k очевидным образом отождествляется с алгеброй Ли L_0/L_k.

Через D_k^{k-1} обозначим подгруппу в D_k, задаваемую формулой

$$D_k^{k-1} = \{\, [d]_0^k \in D_k \mid [d]_0^{k-1} = [\mathrm{id}]_0^{k-1}\}.$$

Её алгебра Ли отождествляется с алгеброй L_{k-1}/L_k.

1.3. Расслоения реперов

Пусть M — n-мерное гладкое многообразие. Рассмотрим всевозможные диффеоморфизмы из окрестностей нуля пространства $\mathbb{R}^n$ в M. Множество k-джетов в нуле этих диффеоморфизмов обозначим через $P_k(M)$. Имеет место естественное проектирование

$$\pi_k\colon P_k(M) \to M, \quad \pi_k\colon [s]_0^k \mapsto s(0).$$

Всякая локальная карта $(U, (x^1, \ldots, x^n))$ в M порождает локальную карту $(\pi_k^{-1}(U), (x^i, x^i_j, \ldots, x^i_{j_1\ldots j_k}))$ в $P_k(M)$. В этой карте координаты всякой точки $[s]_0^k \in \pi_k^{-1}(U)$ вычисляются по формуле

$$x^i_{j_1\ldots j_r}([s]_0^k) = \frac{\partial^r (x^i \circ s)}{\partial t^{j_1} \ldots \partial t^{j_r}}, \quad i, j_1, \ldots, j_r = 1, \ldots, n, \quad r = 0, 1, \ldots, k,$$

где $t^1, \ldots, t^n$ — стандартные координаты в $\mathbb{R}^n$. Теперь легко видеть, что $P_k(M)$ — гладкое многообразие.

Легко видеть, что $\pi_k\colon P_k(M) \to M$ — гладкое локально тривиальное расслоение. На слоях этого расслоения транзитивно и свободно действует группа D_k:

$$[s]_0^k \cdot [d]_0^k = [s \circ d]_0^k \quad \forall [s]_0^k \in P_k(M)\ \forall [d]_0^k \in D_k.$$

Таким образом, расслоение $P_k(M)$ является главным расслоением над M со структурной группой D_k.

Через $\pi_{l,m}\colon P_l(M) \to P_m(M)$, $l \geqslant m$, обозначим естественное проектирование $\pi_{l,m}([s]_0^l) = [s]_0^m$.

Пусть $\theta_k \in P_k(M)$, $T_{\theta_k}P_k(M)$ — касательное пространство к $P_k(M)$ в точке θ_k и $\pi_k(\theta_k) = p$.

Предложение 1.1. *Пусть* $\theta_{k+1} \in \pi_{k+1,k}^{-1}(\theta_k)$. *Тогда*:

1) θ_{k+1} *определяет изоморфизм векторных пространств, который мы будем обозначать тем же символом,*

$$\theta_{k+1}\colon T_{\theta_k}P_k(M) \to W_n/L_k;$$

2) *ограничение обратного изоморфизма* $(\theta_{k+1})^{-1}$ *на* L_0/L_k *является каноническим изоморфизмом алгебры Ли структурной группы* D_k *на касательное пространство* $T_{\theta_k}(\pi_k^{-1}(p))$ *к слою расслоения* π_k *над точкой* p.

Доказательство. Пусть $[s]_0^{k+1} = \theta_{k+1}$ и $s(0) = p$. Через $T_p^k(M)$ обозначим пространство k-джетов в p всех векторных полей в M, проходящих через p. Очевидно, что отображение

$$\alpha\colon T_p^k(M) \to T_{\theta_k}P_k(M), \quad \alpha\colon [X]_p^k \mapsto \frac{d}{dt}([\varphi_t \circ s]_0^k)\Big|_{t=0},$$

где φ_t — поток поля X, является изоморфизмом векторных пространств. Отображение

$$\beta\colon T_p^k(M) \to T_0^k\mathbb{R}^n, \quad \beta\colon [X]_p^k \mapsto \frac{d}{dt}([s^{-1} \circ \varphi_t \circ s]_0^k)\Big|_{t=0},$$

очевидно, также является изоморфизмом векторных пространств. Изоморфизм θ_{k+1} определяется теперь формулой

$$\theta_{k+1} = \beta \circ \alpha^{-1}.$$

Канонический изоморфизм $L_0/L_k \to T_{\theta_k}(\pi_k^{-1}(p))$ определяется формулой

$$\frac{d}{dt}([d_t]_0^k)\Big|_{t=0} \mapsto \frac{d}{dt}([s \circ d_t]_0^k)\Big|_{t=0},$$

которую можно переписать следующим образом:

$$\frac{d}{dt}(s^{-1} \circ (s \circ d_t \circ s^{-1}) \circ s)\Big|_{t=0} \mapsto \frac{d}{dt}([(s \circ d_t \circ s^{-1}) \circ s]_0^k)\Big|_{t=0},$$

что и доказывает второе утверждение. □

Диффеоморфизм s^{-1} является локальной картой в M. Как определено выше, эта карта порождает локальную карту $(x^i, x^i_j, \ldots, x^i_{j_1\ldots j_k})$ в $P_k(M)$. В терминах последней изоморфизм θ_{k+1} очевидно определяется формулой

$$\theta_{k+1}\colon X^i\frac{\partial}{\partial x^i} + \ldots + X^i_{j_1\ldots j_k}\frac{\partial}{\partial x^i_{j_1\ldots j_k}} \mapsto (X^i, \ldots, X^i_{j_1\ldots j_k}). \tag{4}$$

Пусть $\theta_{k+1}, \tilde{\theta}_{k+1} \in (\pi_{k+1,k})^{-1}(\theta_k)$. Тогда существует единственный элемент $[d]_0^{k+1} = (\delta^i_j, 0, \ldots, 0, d^i_{j_1\ldots j_{k+1}}) \in D^k_{k+1}$, такой что $\tilde{\theta}_{k+1} = \theta_{k+1} \cdot [d]_0^{k+1}$. Легко доказать следующее утверждение.

Предложение 1.2. *Пусть* $\xi \in T_{\theta_k} P_k(M)$ *и*

$$\theta_{k+1}(\xi) = (X^i, \ldots, X^i_{j_1 \ldots j_{k-1}}, X^i_{j_1 \ldots j_k}).$$

Тогда

$$\tilde{\theta}_{k+1}(\xi) = (X^i, \ldots, X^i_{j_1 \ldots j_{k-1}}, X^i_{j_1 \ldots j_k} + d^i_{j_1 \ldots j_k r} X^r).$$

Пусть f — произвольный диффеоморфизм многообразия M. Тогда по формуле

$$f^{(k)}([s]_0^k) = [f \circ s]_0^k$$

определяется диффеоморфизм $f^{(k)} \colon P_k(M) \to P_k(M)$, который называется *поднятием диффеоморфизма* f *в расслоение* $P_k(M)$.

1.4. Геометрические структуры

Пусть M — n-мерное гладкое многообразие. Говорят, что на M определена *геометрическая структура*, если выполнено следующее:

1) для каждой локальной системы координат $x = (x^1, \ldots, x^n)$ в M определён набор функций $q(x) = (q^1(x), \ldots, q^N(x))$ — компонент этой структуры в координатах $x^1, \ldots, x^n$;
2) при преобразовании координат $y = y(x)$ соответствующие им компоненты преобразуются по закону

$$\tilde{q}(y) = F\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}, \ldots, \frac{\partial^k y^i}{\partial x^{j_1} \ldots \partial x^{j_k}}, q(x)\right), \tag{5}$$

   где $F \colon D_k \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ является действием группы D_k на $\mathbb{R}^N$.

Число k называется *порядком* этой геометрической структуры, а F — *законом преобразования компонент*.

Для наших целей более удобно следующее эквивалентное определение геометрической структуры, данное впервые В. В. Вагнером в [2].

Говорят, что на M определена *геометрическая структура порядка* k, если задано отображение

$$\Omega \colon P_k(M) \to \mathbb{R}^N,$$

такое что

$$\Omega(\theta_k \cdot d_k) = F(d_k^{-1}, \Omega(\theta_k)) \quad \forall \theta_k \in P_k(M) \; \forall d_k \in D_k.$$

Всякая локальная система координат $(U, h = (x^1, \ldots, x^n))$ в M определяет локальное сечение расслоения $P_k(M)$ по формуле

$$U \to \pi_k^{-1}(U), \quad p \mapsto [(h - h(p))^{-1}]_0^k. \tag{6}$$

Ограничение структуры Ω на это сечение является набором компонент $q^1(x), \ldots, q^N(x)$ структуры Ω в координатах $x^1, \ldots, x^n$.

Геометрическая структура Ω называется *однородной*, если действие F группы D_k на образе $\operatorname{Im} \Omega$ транзитивно.

Пусть Ω_1 и Ω_2 — геометрические структуры с одним и тем же законом преобразования компонент. Говорят, что эти структуры *эквивалентны*, если найдётся такой диффеоморфизм f многообразия M, что

$$\Omega_1 = \Omega_2 \circ f^{(k)}.$$

1.5. Продолжение структур

Пусть Ω — геометрическая структура с законом преобразования компонент, определённым уравнениями (5). Тогда её *первое продолжение*

$$\Omega^{(1)}\colon P_{k+1}(M) \to \mathbb{R}^{N(1+n)}$$

определяется следующим образом. Пусть $q^1(x), \dots, q^N(x)$ — компоненты структуры Ω в координатах $x^1, \dots, x^n$. Тогда

$$q^\alpha(x), \quad \frac{\partial}{\partial x^j}(q^\alpha(x)), \quad \alpha = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, n,$$

являются компонентами продолженной структуры $\Omega^{(1)}$ в координатах $x^1, \dots, x^n$. Очевидно, закон преобразования компонент $\Omega^{(1)}$ определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \tilde{q}^\alpha &= F^\alpha(d^i_{j_1}, \dots, d^i_{j_1\dots j_k}, q^1, \dots, q^N), \\ \partial_i \tilde{q}^\alpha \cdot d^i_j &= \frac{\partial F^\alpha}{\partial d^i_{j_1}} d^i_{j_1 j} + \dots + \frac{\partial F^\alpha}{\partial d^i_{j_1\dots j_k}} d^i_{j_1\dots j_k j} + \frac{\partial F^\alpha}{\partial q^\beta} \partial_j q^\beta. \end{aligned} \tag{7}$$

При всяком i, $i = 2, 3, \dots$, i-е продолжение геометрической структуры Ω определяется по индукции следующим образом:

$$\Omega^{(i)} = (\Omega^{(i-1)})^{(1)}.$$

1.6. G-структуры

Пусть $G \subset D_k$ — замкнутая подгруппа Ли и $B \subset P_k(M)$ — редукция расслоения $P_k(M)$ к G. Тогда B называется *G-структурой порядка k над M*.

Пусть $\Omega\colon P_k(M) \to \mathbb{R}^N$ — произвольная однородная геометрическая структура, $q_0 \in \operatorname{Im}\Omega$ и $G \subset D_k$ — группа изотропии точки q_0. Тогда прообраз $B = \Omega^{-1}(q_0) \subset P_k(M)$ является G-структурой порядка k над M.

Пусть B_1 и B_2 — G-структуры над M. Говорят, что эти структуры *эквивалентны*, если найдётся такой диффеоморфизм f многообразия M, что

$$f^{(k)}(B_1) = B_2.$$

Легко доказать следующее утверждение.

Теорема 1.3. *Пусть Ω_1 и Ω_2 — однородные геометрические структуры с одним и тем же законом преобразования компонент, пусть $\operatorname{Im}\Omega_1 = \operatorname{Im}\Omega_2$, и пусть $q \in \operatorname{Im}\Omega_1$. Тогда структуры Ω_1 и Ω_2 эквивалентны, если и только если эквивалентны G-структуры $\Omega_1^{-1}(q)$ и $\Omega_2^{-1}(q)$.*

Пусть B — G-структура порядка k над M и $\mathfrak{g} \subset L_0/L_k$ — алгебра Ли группы G. Положим

$$g_k = \mathfrak{g} \cap (L_{k-1}/L_k).$$

Через $g_k^{(i)}$, $i = 0, 1, \ldots$, обозначим i-е продолжение пространства g_k, здесь $g_k^{(0)} = g_k$.

Говорят, что B — *G-структура конечного типа*, если существует такое неотрицательное целое число r, что $g_k^{(r)} = \{0\}$. Очевидно, $g_k^{(i)} = \{0\}$ при $i > r$.

Для G-структуры конечного типа через $r(B)$ обозначим наименьшее из тех неотрицательных целых чисел r, для которых $g_k^{(r)} = \{0\}$.

1.7. Плоские структуры

Пусть $F\colon D_k \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ действие группы D_k на $\mathbb{R}^N$, пусть $q \in \mathbb{R}^N$, и пусть $G \subset D_k$ — группа изотропии точки q.

Стандартная система координат в $\mathbb{R}^n$ порождает сечение $P_k(\mathbb{R}^n)$ над $\mathbb{R}^n$ согласно формуле (6). Разнесём образ этого сечения по $P_k(\mathbb{R}^n)$ с помощью подгруппы G. В результате получим G-структуру B над $\mathbb{R}^n$, которая называется *плоской*. Очевидно, что по B, q и закону преобразования F однозначно восстанавливается геометрическая структура $\Omega\colon P_k(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^N$, которая также называется *плоской структурой*.

Геометрическая структура (G-структура) на многообразии M называется *локально-плоской* или *интегрируемой*, если она локально эквивалентна плоской структуре (G-структуре).

Очевидно, G-структура B на многообразии M интегрируема тогда и только тогда, когда найдётся такая локальная карта в M, что порождённое ею сечение $P_k(M)$ является сечением B. А геометрическая структура на многообразии M интегрируема тогда и только тогда, когда найдётся такая локальная карта в M, в которой компоненты этой структуры являются константами.

Следующее нужное нам утверждение очевидно.

Теорема 1.4. *Пусть Ω — произвольная геометрическая структура и q — некоторое её значение. Тогда Ω интегрируема, если и только если интегрируема G-структура $B = \Omega^{-1}(q)$.*

2. Структурные функции

2.1.

Пусть $\Omega\colon P_k(M) \to \mathbb{R}^N$ — однородная геометрическая структура с законом преобразования $F\colon D_k \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$.

Закон преобразования её компонент (5) можно рассматривать как систему дифференциальных уравнений в частных производных на функции

$y^i(x^1, \ldots, x^n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Мы будем рассматривать эту систему как подмногообразие $\mathcal{E}$ в расслоении k-джетов $J^k\tau$ сечений тривиального расслоения

$$\tau\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

В этой работе мы рассматриваем только такие однородные геометрические структуры, закон преобразования компонент которых $\mathcal{E} \subset J^k\tau$ удовлетворяет условию

$$\tau_{k,k-1}(\mathcal{E}) = J^{k-1}\tau, \tag{8}$$

где $\tau_{l,m}\colon J^l\tau \to J^m\tau$, $l \geqslant m$, — естественное проектирование l-джета в m-джет.

Фиксируем некоторое значение $q_0 \in \mathbb{R}^N$ структуры Ω и рассмотрим G-структуру $B = \Omega^{-1}(q_0)$. Условие (8) означает для B, что

$$\pi_{k,k-1}(B) = P_{k-1}(M), \tag{9}$$

а для группы G условие (8) означает, что

$$\rho_{k,k-1}(G) = D_{k-1}. \tag{10}$$

Последнее условие для алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G, очевидно, означает

$$\rho_{k,k-1}(\mathfrak{g}) = L_0/L_{k-1}. \tag{11}$$

2.2.

Пусть $\theta_k \in B$ и $\theta_{k-1} = \pi_{k,k-1}(\theta_k)$. Тогда θ_k определяет, как показано выше, линейный изоморфизм $\theta_k\colon T_{\theta_{k-1}}P_{k-1}(M) \to W_n/L_{k-1}$. Через H_{k-1} обозначим подпространство в W_n/L_{k-1}, порождённое векторами вида $(X^i, 0, \ldots, 0)$. Очевидно, пространство W_n/L_{k-1} разлагается в прямую сумму

$$W_n/L_{k-1} = H_{k-1} \oplus L_0/L_{k-1}.$$

Рассмотрим подпространство $H_{\theta_{k-1}}$ пространства $T_{\theta_{k-1}}P_{k-1}(M)$, определённое формулой

$$H_{\theta_{k-1}} = (\theta_k)^{-1}(H_{k-1}). \tag{12}$$

Ясно, что размерность этого подпространства равна n и оно без вырождения проектируется на касательное пространство к M. Мы будем называть такие подпространства *горизонтальными*.

Пусть $\theta_{k+1} \in P_{k+1}(M)$ и $\pi_{k+1,k}(\theta_{k+1}) = \theta_k \in B$. Тогда изоморфизм $\theta_{k+1}\colon T_{\theta_k}P_k(M) \to W_n/L_k$ определяет инъективное линейное отображение

$$\theta_{k+1}|_{T_{\theta_k}B}\colon T_{\theta_k}B \to W_n/L_k,$$

для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
T_{\theta_k}B \arrow[r, "\theta_{k+1}|_{T_{\theta_k}B}"] \arrow[d, "(\pi_{k,k-l})_*"'] & W_n/L_k \arrow[d, "\rho_{k,k-l}"] \\
T_{\theta_{k-1}}P_{k-1}(M) \arrow[r, "\theta_k"'] & W_n/L_{k-1}
\end{tikzcd}$$

Выберем горизонтальное подпространство $H_{\theta_k} \subset T_{\theta_k}B$ так, чтобы

$$(\pi_{k,k-1})_*(H_{\theta_k}) = H_{\theta_{k-1}}. \tag{13}$$

Тогда

$$\forall X \in H_{\theta_{k+1}} \;\; \theta_k(X) = (X^i, 0, \dots, 0, X^i_{j_1\dots j_k}).$$

Пара $(H_{\theta_k}, \theta_{k+1})$ определяет линейное отображение

$$f_{(H_{\theta_k}, \theta_{k+1})} \colon V \to L_{k-1}/L_k$$

по формуле

$$f_{(H_{\theta_k}, \theta_{k+1})} \colon X^i \mapsto (X^i_{j_1\dots j_k}) = (f^i_{j_1\dots j_k, r} X^r).$$

Пусть $H_{\theta_k}, \tilde{H}_{\theta_k} \subset T_{\theta_k}B$ — горизонтальные подпространства, удовлетворяющее (13). Тогда, очевидно,

$$(f_{(H_{\theta_k}, \theta_{k+1})} - f_{(\tilde{H}_{\theta_k}, \theta_{k+1})}) \colon V \to g_k, \tag{14}$$

где $g_k = \mathfrak{g} \cap (L_{k-1}/L_k)$.

Пусть $\theta_k \in B$ и $\theta_{k+1}, \tilde{\theta}_{k+1} \in (\pi_{k+1,k})^{-1}(\theta_k)$. Тогда существует единственный элемент $[d]_0^{k+1} = (\delta^i_j, 0, \dots, 0, d^i_{j_1\dots j_{k+1}}) \in D^k_{k+1}$, такой что $\tilde{\theta}_{k+1} = \theta_{k+1} \cdot [d]_0^{k+1}$.

Пусть $f_{(H_{\theta_k}, \theta_{k+1})} = (f^i_{j_1\dots j_k, r})$ и $f_{(H_{\theta_k}, \tilde{\theta}_{k+1})} = (\tilde{f}^i_{j_1\dots j_k, r})$. Тогда из предложения 1.2 следует, что

$$(\tilde{f}^i_{j_1\dots j_k, r}) = (f^i_{j_1\dots j_k, r} + d^i_{j_1\dots j_k r}). \tag{15}$$

Пусть $X, Y \in H_{\theta_k}$. Рассмотрим скобку $[\theta_{k+1}(X), \theta_{k+1}(Y)]$ (см. (1)). Имеем

$$\begin{aligned}[\theta_{k+1}(X), \theta_{k+1}(Y)] &= (X^r Y^i_{j_1\dots j_{k-1} r} - Y^r X^i_{j_1\dots j_{k-1} r}) = \\ &= (X^r Y^s (f^i_{j_1\dots j_{k-1} r, s} - f^i_{j_1\dots j_{k-1} s, r})).\end{aligned} \tag{16}$$

Положим

$$c(H_{\theta_k}, \theta_{k+1}) = (f^i_{j_1\dots j_{k-1} r, s} - f^i_{j_1\dots j_{k-1} s, r}).$$

Из (15) следует, что элемент $c(H_{\theta_k}, \theta_{k+1})$ не зависит от выбора θ_{k+1} над $\theta_k \in B$. Поэтому дальше будем писать $c(H_{\theta_k})$ вместо $c(H_{\theta_k}, \theta_{k+1})$.

Рассмотрим комплекс Спенсера

$$0 \to g_k^{(1)} \xrightarrow{\partial_{k+1,0}} g_k \otimes V^* \xrightarrow{\partial_{k,1}} L_{k-2}/L_{k-1} \otimes \wedge^2 V^* \xrightarrow{\partial_{k-1,2}} \dots. \tag{17}$$

Очевидно,

$$c(H_{\theta_k}) \in L_{k-2}/L_{k-1} \otimes \wedge^2 V^*.$$

Из (14) вытекает, что если H_{θ_k} и $\tilde{H}_{\theta_k}$ — горизонтальные подпространства в $T_{\theta_k}B$, удовлетворяющие (13), то

$$c(H_{\theta_k}) - c(\tilde{H}_{\theta_k}) \in \operatorname{Im} \partial_{k,1}.$$

Это означает, что класс $c(H_{\theta_k}) \pmod{\operatorname{Im} \partial_{k,1}}$ не зависит от выбора горизонтального подпространства H_{θ_k} над $H_{\theta_{k-1}}$. Будем обозначать этот класс через $c(\theta_k)$. Легко проверить, что

$$c(H_{\theta_k}) \in \ker \partial_{k-1,2}.$$

Следовательно, $c(\theta_k)$ — класс когомологий Спенсера, т. е.

$$c(\theta_k) \in H^{k-1,2}.$$

Отображение

$$c\colon B \to H^{k-1,2}, \quad c\colon \theta_k \mapsto c(\theta_k)$$

будем называть *структурной функцией* G-структуры B.

Предложение 2.1. *Структурные функции плоских G-структур тривиальны.*

Доказательство. Пусть B — плоская G-структура порядка k на $\mathbb{R}^n$ и $(h = (x^1, \ldots, x^n))$ — стандартная карта на $\mathbb{R}^n$. Произвольный элемент $g \in G$ определяет диффеоморфизм $\hat{g}$ пространства $\mathbb{R}^n$ по формуле

$$\hat{g}(x^1, \ldots, x^n) = \frac{1}{1!} g^i_j x^j + \ldots + \frac{1}{k!} g^i_{j_1 \ldots j_k} x^{j_1} \ldots x^{j_k},$$

где $(g^i_j, \ldots, g^i_{j_1 \ldots j_k}) = g^{-1}$. Обозначим через s^g_r, $r = 0, 1, \ldots$, сечение расслоения $P_r(\mathbb{R}^n)$, порождённое картой $(\hat{g} \circ h = (y^1, \ldots, y^n))$ на $\mathbb{R}^n$. Тогда s^g_k — сечение B. Действительно, пусть e — единица группы G, тогда s^e_k — сечение, порождённое стандартной картой на $\mathbb{R}^n$. Оно по определению плоской структуры является сечением B. Легко видеть, что

$$s^g_k(p) = s^e_k(p) \cdot g \quad \forall p \in \mathbb{R}^n.$$

Положим $\theta_k = s^g_k(p)$ и $\theta_{k+1} = s^g_{k+1}(p)$. Очевидно, $H_{\theta_k} = (s^g_k)_*(T_p\mathbb{R}^n)$ — горизонтальное подпространство в $T_{\theta_k}B$ и

$$\theta_{k+1}\colon X \mapsto (X^i, 0, \ldots, 0) \quad \forall X \in H_{\theta_k}.$$

Отсюда ясно, что структурная функция G-структуры B равна нулю во всех точках из $\operatorname{Im} s^g_k$. А поскольку образы сечений $\operatorname{Im} s^g_k$, $g \in G$, покрывают всё B, то структурная функция равна нулю всюду на B. □

Структурные функции дают, вообще говоря, только необходимые условия локальной эквивалентности G-структур.

Теорема 2.2. *Пусть B и $\tilde{B}$ — G-структуры на многообразии M, c, $\tilde{c}$ — их структурные функции соответственно, и пусть f — такой диффеоморфизм многообразия M, что $f^{(k)}(B) = \tilde{B}$. Тогда $(f^{(k)})^*(\tilde{c}) = c$.*

Доказательство. Пусть $[s]^k_0 = \theta_k \in B$ и $X \in T_{\theta_k}B$. Тогда для любой точки $\theta_{k+1} \in \pi^{-1}_{k+1,k}(\theta_k)$

$$\theta_{k+1}(X) = f^{(k+1)}(\theta_{k+1})((f^{(k)})_*(X)).$$

Действительно, из построения изоморфизма θ_{k+1} (см. доказательство предложения 1.1) следует, что для вектора X найдётся такое векторное поле ξ с потоком φ_t в многообразии M, что $X = d/dt([\varphi_t \circ s]^k_0)|_{t=0}$ и $\theta_{k+1}(X) = d/dt([s^{-1} \circ \varphi_t \circ s]^k_0)|_{t=0}$. Тогда

$$f^{(k+1)}(\theta_{k+1})((f^{(k)})_*(X)) = \frac{d}{dt}([(f\circ s)^{-1}\circ(f\circ\varphi_t\circ f^{-1})\circ(f\circ s)]_0^k)\Big|_{t=0} = \\ = \frac{d}{dt}([s^{-1}\circ\varphi_t\circ s]_0^k)\Big|_{t=0} = \theta_{k+1}(X).$$

Теперь очевидно, что классы когомологий $c(\theta_k)$ и $c(f^{(k)}(\theta_k))$ совпадают. □

3. Интегрируемость структур конечного типа

Пусть Ω — произвольная геометрическая структура с законом преобразования F на многообразии M и $q_0 \in \mathbb{R}^N$ — одно из её значений. Рассмотрим G-структуру $B = \Omega^{-1}(q_0)$. Пусть $\mathfrak{g} \subset L_0/L_k$ — алгебра Ли группы G и $g_k = \mathfrak{g} \cap L_{k-1}/L_k$. Предположим, что структурная функция G-структуры B равна нулю. Пусть $\theta_k \in B$ и $\theta_{k+1} \in (\pi_{k+1,k})^{-1}(\theta_k)$. Рассмотрим произвольное горизонтальное подпространство $H_{\theta_k} \subset T_{\theta_k}B$, удовлетворяющее (13). Пусть $f(H_{\theta_k}, \theta_{k+1}) = (f^i_{j_1\ldots j_k,s})$. Из комплекса Спенсера (17) и того, что $c(H_{\theta_k}, \theta_{k+1}) = 0 \,(\mathrm{mod}\ \mathrm{Im}\,\partial_{k,1})$, следует существование такого $(g^i_{j_1\ldots j_k,s}) \in g_k \otimes V^*$, что

$$(f^i_{j_1\ldots j_{k-1}r,s} - f^i_{j_1\ldots j_{k-1}s,r}) = \partial_{k,1}((g^i_{j_1\ldots j_k,s})),$$

откуда

$$f^i_{j_1\ldots j_k,s} = g^i_{j_1\ldots j_k,s} + d^i_{j_1\ldots j_k s},$$

где $(d^i_{j_1\ldots j_k s}) \in g_k^{(1)}$. Обозначим через $\tilde{H}_{\theta_k}$ такое горизонтальное подпространство в $T_{\theta_k}B$, что $f(\tilde{H}_{\theta_k}, \theta_{k+1}) = (d^i_{j_1\ldots j_k s})$. Положим $\tilde{\theta}_{k+1} = \theta_{k+1}\cdot d$, где $d = (-d^i_{j_1\ldots j_k s}) \in G \cap D_k^{k+1}$. Теперь ясно, что

$$\forall X \in \tilde{H}_{\theta_k}\ \tilde{\theta}_{k+1}(X) = (X^i, 0, \ldots, 0). \tag{18}$$

Обозначим через $B^{(1)}$ множество всех $\tilde{\theta}_{k+1}$, полученных таким образом. Очевидно,

$$\pi_{k+1,k}(B^{(1)}) = B.$$

Предложение 3.1.

$$B^{(1)} = (\Omega^{(1)})^{-1}((q_0, 0)),$$

т. е. $B^{(1)}$ — $G^{(1)}$-структура, где $G^{(1)}$ — группа изотропии точки $(q_0, 0) \in \mathbb{R}^{N(1+n)}$.

Доказательство. Пусть $[s]_0^{k+1} = \theta_{k+1} \in B^{(1)}$. Локальная карта $s^{-1} = (y^1, \ldots, y^n)$ порождает карту в $P_k(M)$. Тогда из (5) следует, что G-структура B определяется в терминах этой карты уравнениями

$$\tilde{q}^\alpha(y) = F^\alpha(y^i_j, \ldots, y^i_{j_1\ldots j_k}, q_0). \tag{19}$$

Пусть $H_{\theta_k} \subset T_{\theta_k}B$ — горизонтальное подпространство, удовлетворяющее (13) и (18). Тогда всякий вектор $X \in H_{\theta_k}$ в терминах этой карты имеет вид

$$X = X^i\frac{\partial}{\partial y^i} + 0\cdot\frac{\partial}{\partial y^i_j} + \ldots + 0\cdot\frac{\partial}{\partial y^i_{j_1\ldots j_k}}.$$

Из (19) следует, что вектор X удовлетворяет уравнению

$$\partial_j q^\alpha(0)\cdot X^j = 0.$$

Это означает, что

$$\partial_j q^\alpha(0) = 0 \quad \forall\alpha = 1,2,\ldots,N \ \forall j = 1,2,\ldots,n.$$

Отсюда следует, что

$$\Omega^{(1)}(\theta_{k+1}) = (q_0, 0).$$

Таким образом, мы получили

$$B^{(1)} \subset (\Omega^{(1)})^{-1}(q_0, 0).$$

Из уравнений (7) следует, что $G^{(1)}$-структура $(\Omega^{(1)})^{-1}(q_0,0)$ определяется уравнениями

$$\tilde{q}^\alpha(y) = F^\alpha(d^i_{j_1},\ldots,d^i_{j_1\ldots j_k}, q_0),$$
$$\partial_i\tilde{q}^\alpha(y)\cdot d^i_j = \frac{\partial F^\alpha}{\partial y^i_{j_1}} y^i_{j_1 j} + \ldots + \frac{\partial F^\alpha}{\partial y^i_{j_1\ldots j_k}} y^i_{j_1\ldots j_k j}.$$

Отсюда легко получить, что

$$B^{(1)} \cap \pi^{-1}_{k+1,k}(\theta_k) = (\Omega^{(1)})^{-1}(q_0,0) \cap \pi^{-1}_{k+1,k}(\theta_k) \quad \forall\theta_k \in B.$$

Теперь ясно, что

$$B^{(1)} = (\Omega^{(1)})^{-1}(q_0, 0). \quad \square$$

Точно так же, как выше, можно рассмотреть структурную функцию

$$c^{(1)}\colon B^{(1)} \to H^{k,2}$$

$G^{(1)}$-структуры $B^{(1)}$. Если $c^{(1)} = 0$, то точно так же можно построить $G^{(2)}$-структуру $B^{(2)} = (\Omega^{(2)})^{-1}((q_0,0,0))$ и её структурную функцию $c^{(2)}$ и т. д.

Теорема 3.2. *Пусть B — G-структура конечного типа и c — её структурная функция. Тогда для того чтобы B была локально-плоской, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства $c = 0$, $c^{(1)} = 0,\ldots,$ $c^{(r(B))} = 0$.*

Доказательство. Вначале рассмотрим случай, когда $r(B) = 0$. Пусть Ω — геометрическая структура порядка k, такая что $B = \Omega^{-1}(q_0)$. Пусть $y^1,\ldots,y^n$ — система локальных координат в M. Она порождает систему локальных координат в $P_k(M)$. В терминах этих координат подмногообразие B определяется системой уравнений

$$\tilde{q}(y) = F(y^i_j,\ldots,y^i_{j_1\ldots j_k}, q_0). \tag{20}$$

Будем рассматривать эту систему как систему уравнений в частных производных на функции $y^1(x^1,\ldots,x^n),\ldots,y^n(x^1,\ldots,x^n)$, определяющие замену координат $x\to y$. Если решение системы (20) существует, то $x^1,\ldots,x^n$ — система локальных координат в M, в которых структура Ω представляется как стандартно-плоская. Условие $g_k = \{0\}$ означает, что символ этой системы дифференциальных уравнений равен нулю. Поскольку структурная функция G-структуры B

равна нулю, то существует $G^{(1)}$-структура $B^{(1)}$ над B, т. е. $\pi_{k+1,k}(B^{(1)}) = B$. Другими словами, первое продолжение системы дифференциальных уравнений (20) никаких новых соотношений k-го порядка, кроме соотношений (20), не даёт. Это означает (см. [8]), что для каждого набора чисел $y^i, y^i_j, \ldots, y^i_{j_1\ldots j_k}$, удовлетворяющего системе (20), найдётся такое решение $y(x)$ этой системы, что

$$y^i(x_0) = y^i, \quad \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(x_0) = y^i_j, \ldots, \quad \frac{\partial^k y^i}{\partial x^{j_1}\ldots\partial x^{j_k}}(x_0) = y^i_{j_1\ldots j_k}.$$

Теперь доказательство теоремы в полной общности очевидно. □

4. Применения к обыкновенным уравнениям

4.1. Уравнения 2-го порядка

Рассмотрим обыкновенные дифференциальные уравнения вида

$$y'' = a_3(x,y)(y')^3 + a_2(x,y)(y')^2 + a_1(x,y)y' + a_0(x,y). \tag{21}$$

Хорошо известно, что произвольное точечное преобразование отображает всякое такое уравнение в уравнение такого же вида. Это означает, что всякое уравнение (21) определяет в пространстве $\mathbb{R}^2$ геометрическую структуру второго порядка, компонентами которой являются коэффициенты данного уравнения. Обозначим её через Ω. Имеем

$$\Omega\colon P_2(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^4.$$

Эта структура является структурой конечного типа, $r(B) = 1$.

Рассмотрим G-структуру $B = \Omega^{-1}(0)$. Её структурная функция c равна нулю. Равенство нулю структурной функции $c^{(1)}$ её первого продолжения $B^{(1)}$ является необходимым и достаточным условие приводимости исходного уравнения точечным преобразованием к линейному виду (см. [3, 10]).

4.2. Уравнения 3-го порядка

Рассмотрим обыкновенные дифференциальные уравнения вида

$$y''' = a_3(x,y,y')(y'')^3 + a_2(x,y,y')(y'')^2 + a_1(x,y,y')y'' + a_0(x,y,y'). \tag{22}$$

Нетрудно проверить, что, подвергнув всякое такое уравнение произвольному контактному преобразованию, получим уравнение такого же вида. Это означает, что всякое уравнение (22) определяет в пространстве $\mathbb{R}^3$ переменных x, y, y' геометрическую структуру третьего порядка, компонентами которой являются коэффициенты данного уравнения. Эта структура является структурой бесконечного типа. Обозначим её через Ω. Таким образом,

$$\Omega\colon P_3(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^4.$$

Рассмотрим бесконечное продолжение $\Omega^{(\infty)}$ структуры Ω и прообраз $(\Omega^{(\infty)})^{-1}(0)$. Проекция B этого прообраза на $P_3(\mathbb{R}^3)$ является G-структурой конечного порядка. Её структурная функция c равна нулю. Равенство нулю структурной функции $c^{(1)}$ её первого продолжения $B^{(1)}$ является необходимым и достаточным условие приводимости исходного уравнения контактным преобразованием к виду $y''' = 0$ (см. [7]).

Литература

[1] Бернштейн И. Н., Розенфельд Б. И. Однородные пространства бесконечномерных алгебр Ли и характеристические классы слоений // Успехи мат. наук. — 1973. — Т. 28, вып. 4. — С. 103—138.

[2] Вагнер В. В. Теория дифференциальных объектов // О. Веблен, Дж. Уайтхед. Основания дифференциальной геометрии. — ИЛ, 1949.

[3] Гусятникова В. Н., Юмагужин В. А. Точечные преобразования и линеаризуемость обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка // Мат. заметки. — 1991. — Т. 49, вып. 1. — С. 146—148.

[4] Юмагужин В. А. О продолжениях G-структур // Дифференциальная геометрия. Вып. 2. Межвуз. научн. сб. — Изд-во Саратовского ун-та, 1975. — С. 77—87.

[5] Юмагужин В. А. G-структуры с постоянными структурными функциями // Дифференциальная геометрия. Вып. 3. Межвуз. научн. сб. — Изд-во Саратовского ун-та, 1977. — С. 82—104.

[6] Guillemin V., Sternberg S. An algebraic model of transitive differential geometry // Bull. Amer. Math. Soc. — 1964. — Vol. 70, no. 1. — P. 16—47.

[7] Gusyatnikova V. N., Yumaguzhin V. A. Contact transformations and local reducibility of ODEs to the form $y''' = 0$ // Acta Appl. Math. — 1999. — Vol. 56, no. 3. — P. 155—179.

[8] Kuranishi M. Lectures on Involutive Systems of Partial Differential Equations. — São Paulo, 1967.

[9] Sternberg S. Lectures on Differential Geometry. 2nd edition. — Providence: AMS Chelsea Publihing, American Mathematical Society, 1982. [Русский перевод первого издания: Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. — М.: Мир, 1970.]

[10] Yumaguzhin V. A. On the obstruction to linearizability of 2-order ordinary differential equations // Acta Appl. Math. — 2004. — To appear.