Г. Н. Чеботарев, О нормальной разрешимости уравнений Винера–Хопфа в некоторых особых случаях,
Изв. вузов. Матем., 1968, номер 3, 113–118

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1968 МАТЕМАТИКА № 3 (70)

УДК 519.55

Г. Н. Чеботарев

О НОРМАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЙ ВИНЕРА—ХОПФА В НЕКОТОРЫХ ОСОБЫХ СЛУЧАЯХ

В последнее время появилось значительное количество работ (см. [2]—[9]), посвященных особым случаям уравнения Винера — Хопфа на полуоси, его дискретного аналога, а также сингулярного интегрального уравнения, символ которых обращается в отдельных точках в нуль, обычно целой кратности. Мы предлагаем здесь один алгебраический подход к такого рода задачам.

1°. Пусть E — линейное векторное пространство, распадающееся в прямую сумму двух своих подпространств E_+ и E_-, $P_+(P_-)$ — операторы проектирования из E на E_+ параллельно E_- (на E_- параллельно E_+). Пусть $\mathfrak{q}$ — линейный оператор, действующий в E, с областью определения $D(\mathfrak{q})$ и областью значений $R(\mathfrak{q})$. Введем обозначения для подпространств: $P_+D(\mathfrak{q})=D_+$, $P_+R(\mathfrak{q})=R_+$, $P_+\mathfrak{q}(D(\mathfrak{q})\cap E_-)=A_+$, $P_+\mathfrak{q}^{-1}(R(\mathfrak{q})\cap E_-)=B_+$ (в последнем случае $\mathfrak{q}^{-1}(R(\mathfrak{q})\cap E_-)$ означает полный прообраз $R(\mathfrak{q})\cap E_-$ при отображении $\mathfrak{q}$). Ясно, что $B_+\subset D_+$, $A_+\subset R_+$.

Для каждого элемента $x_+\in D_+$ найдется такой $x_-\in E_-$, что $x_++x_-\in D(\mathfrak{q})$; положим $qx_+=P_+\mathfrak{q}(x_++x_-)$. Элемент qx_+ ($\in R_+$) определяется, вообще говоря, неоднозначно ввиду неоднозначного выбора x_-. Но если $x_++\tilde{x}_-$ также принадлежит $D(\mathfrak{q})$, то $P_+\mathfrak{q}(x_++x_-)-P_+\mathfrak{q}(x_++\tilde{x}_-)\in A_+$. Наоборот, взяв произвольно $y_+=P_+\mathfrak{q}\tilde{x}_-\in A_+$ и выбирая в роли x_- элемент $x_-+\tilde{x}_-$, мы получим $qx_+=P_+\mathfrak{q}(x_++x_-)+y_+$; таким образом, при подходящем выборе x_-, qx_+ пробегает в R_+ целый класс вычетов по подпространству A_+. Так же просто устанавливается, что элементы D_+, преобразуемые в данный класс R_+/A_+, составляют в D_+ целый класс вычетов по B_+. Операцию q можно теперь рассматривать как линейный оператор, устанавливающий взаимно однозначное соответствие между D_+/B_+ и R_+/A_+. Нами доказана, таким образом,

Теорема 1. *Оператор q осуществляет изоморфизм между фактор-пространствами D_+/B_+ и R_+/A_+.*

В дальнейшем мы будем, специально оговаривая, накладывать на $\mathfrak{q}$ условия:

$$A_+=\theta, \tag{α}$$

или

$$B_+=\theta. \tag{β}$$

При выполнении этих условий оператор q устанавливает изоморфизм просто между D_+ и R_+.

2°. Пусть $T(E\to E)$ — линейный оператор, область значений которого $R(T)\subset D(\mathfrak{q})$. Абстрактным уравнением Винера — Хопфа назовем уравнение

$$P_+Tx_+=f_+, \tag{1}$$

где x_+ — искомый, f_+ — данный элементы из E_+. Очевидно, для разрешимости этого уравнения необходимо, чтобы $f_+\in D_+$. Запишем второе уравнение Винера — Хопфа

$$P_+\mathfrak{q}Tx_+=h_+. \tag{2}$$

Теорема 2. *Каждое решение уравнения* (1) *с правой частью $f_+\in D_+$ есть также решение уравнения* (2) *с некоторой правой частью h_+, принадлежащей классу qf_+ фактор-пространства R_+/A_+, и, наоборот, каждое решение уравнения* (2) *с правой частью $h_+\in R_+$ является решением* (1) *с некоторой правой частью f_+, принадлежащей классу $q^{-1}h_+$ фактор-пространства D_+/B_+.*

В частности, если выполняются условия (α) *и* (β), $f_+\in D_+$ *и* $h_+=qf_+$, *то уравнения* (1) *и* (2) *эквивалентны.*

Доказательство. Если x_+ есть решение (1) с правой частью $f_+\in D_+$, то, положив $f_-=P_-Tx_+$, видим, что $f=f_++f_-=Tx_+\in D(\mathfrak{q})$, и $P_+\mathfrak{q}f=P_+\mathfrak{q}Tx_+=h_+\in qf_+$. Наоборот, если $P_+\mathfrak{q}Tx_+=h_+\ (\in R_+)$, то, полагая $f_+=P_+Tx_+$, $f_-=P_-Tx_+$, убедимся, что $h_+=P_+\mathfrak{q}(f_++f_-)\in qf_+$, т. е. $f_+\in q^{-1}h_+$ в D_+/B_+. При выполнении условий (α), (β) операторы q и q^{-1} устанавливают взаимно однозначное соответствие между D_+ и R_+, и при $h_+=qf_+$ каждое решение (1) есть решение (2), и наоборот.

3°. Теорема 3. *Пусть E — банахово пространство, $E_\pm$ — его подпространства. Пусть выполнены условия* (α) *и* (β), *и в R_+ введена новая форма $|\cdot|_{R_+}$, обращающая его в банахово пространство, причем оператор $P_+\mathfrak{q}T$ уравнения* (2), *действующий из E_+ в R_+, нормально разрешим. Введем в D_+ новую норму, полагая для $f_+\in D_+$ $|f_+|_{D_+}=|qf_+|_{R_+}$.*

Тогда оператор P_+T уравнения (1), *действующий из E_+ в D_+, нормально разрешим и имеет ту же d-характеристику, что и $P_+\mathfrak{q}T(E_+\to R_+)$.*

Это следует из того, что при такой нормировке пространства D_+ оператор q устанавливает изометрический изоморфизм D_+ и R_+; каждое решение $\chi\in R_+^*$ уравнения $(P_+\mathfrak{q}T)^*\chi=0$ порождает по формуле $\varphi(f_+)=\chi(qf_+)$ решение $\varphi\in D_+^*$ уравнения $(P_+T)^*\varphi=0$. Условия разрешимости уравнения (1) получаются из условий разрешимости уравнения (2) заменой h_+ на qf_+.

Рассмотрим некоторые применения последней теоремы.

4°. Пусть $E=L$ — пространство всех абсолютно интегрируемых на оси $(-\infty<t<\infty)$ комплекснозначных функций, $E_+=L_+$ $(E_-=L_-)$ — его подпространство, состоящее из функций, равных нулю на левой (правой) полуоси. Пусть $k(t)\in L$ имеет преобразование Фурье $K(z)\neq 0$ для вещественных z, и $K(z)=(z-i)^{-m}[1-K_1(z)]$, где $K_1(z)$ также есть преобразование Фурье некоторой функции из L. Рассмотрим интегральное уравнение 1-го рода

$$P_+\mathcal{K}x_+=f_+, \tag{3}$$

где $x_+(t)$, $f_+(t)\in L_+$, $t>0$, и $\mathcal{K}$ — оператор свертывания с функцией $k(t)$, действующий в L. Полагая $\mathfrak{q}x(t)=i^m\left(\frac{d}{dt}-1\right)^m x(t)$ и пользуясь теоремой 3, мы получаем все основные результаты относительно уравнения (3), содержащиеся в [4]. Заметим, что этот способ исследования уравнения (3) фактически совпадает со способом, изложенным в [5], где рассмотрен также случай нецелого m.

Рассмотрим теперь уравнение второго рода

$$x_+(t) - \int_0^\infty k_1(t-s)\,x_+(s)\,ds = f_+(t), \quad t > 0, \tag{4}$$

где x_+, $f_+ \in L_+$. Ядро $k_1(t) \in L$ будем предполагать таким, что его преобразование Фурье $K_1(t)$ обладает свойством: $1 - K_1(z) = S_m(z)\,K(z)$, где $K(z)$ есть преобразование Фурье функции из L и не обращается в нуль при вещественных z, и $S_m(z) = \prod\limits_{k=1}^{s} (z-\alpha_k)^{r_k}$ (α_k вещественны, $r_k > 0$ — целые, $r_1 + \ldots + r_s = m$). В качестве $\mathfrak{q}\,(L \to L)$ возьмем оператор, действие которого на функции из L сводится к умножению их преобразований Фурье на $S_m^{-1}(z)$. Снова выполняются условия (α) и (β). Если записать (4) в форме (1), то эквивалентное ему уравнение (2) окажется уравнением 1-го рода (3), рассмотренным выше. Для функции $f(t) \in L_+$ положим $f^{(-1)}(t) = \int_t^\infty f(s)\,ds$; если $f^{(-1)}(t)$ также принадлежит L_+, можно определить далее $f^{(-2)}(t) = [f^{(-1)}(t)]^{(-1)}$, и т. д. Пространство R_+ для нашего оператора $\mathfrak{q}$ есть пространство E_m функций, принадлежащих L_+ вместе с m производными; D_+ состоит из тех функций $f_+ \in L_+$, для которых $[e^{\alpha_k t} f_+(t)]^{(-j)} \in L_+$ ($k = 1, \ldots, s$; $j = 0, 1, \ldots, r_k$), и в качестве нормы в D_+ можно взять

$$|f_+(t)|_{D_+} = \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=0}^{r_k} |[e^{\alpha_k t} f_+(t)]^{(-j)}|_{L_+}.$$

Введем еще класс $\tilde{L}$ функций $\varphi(t)$, определенных на $[0, \infty]$, таких, что

$$[\ldots [[e^{-i\alpha_1 t}\varphi(t)]^{(r_1)}\, e^{-i\alpha_2 t}]^{(r_2)} \ldots e^{-i\alpha_s t}]^{(r_s)} \in L_+.$$

Функции этого класса имеют на бесконечности порядок роста $O(t^{m-1})$.

Теорема 4. *Оператор уравнения* (4) *действует из* L_+ *в* D_+ *и является* Φ-*оператором. Для разрешимости уравнения* (4) *необходимо и достаточно, чтобы* $f_+ \in D_+$, *и*

$$\int_0^\infty f_+(t)\,\varphi(t)\,dt = 0, \tag{5}$$

где $\varphi(t)$ *пробегает все решения из* $\tilde{L}$ *однородного транспонированного уравнения*

$$\varphi(t) - \int_0^\infty k_1(s-t)\,\varphi(s)\,ds = 0, \quad t > 0. \tag{6}$$

Замечание. Интегралы в (5) и (6) следует понимать в следующем регуляризированном смысле:

$$\int_0^\infty f(t)\,dt = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^\infty e^{-\varepsilon t} f(t)\,dt.$$

Первое утверждение теоремы 4 (без аналитического описания пространства D_+) приводилось В. Б. Дыбиным [6]. Уравнение (4) рассматривалось в [8] тем же методом в пространстве ограниченных функций. Таким образом же может быть получена теорема, подобная теореме 4, для дискретного аналога уравнения (4).

В качестве последнего применения теоремы 3 рассмотрим вопрос о нормальной разрешимости краевой задачи Гильберта с нулем коэффициента на контуре. Пусть Γ — простой гладкий замкнутый контур плоскости комплексной переменной, содержащий внутри начало координат; $E=H$ — пространство комплекснозначных функций на Γ, удовлетворяющих условию Гёльдера с фиксированным показателем, $E_+=H_+$ $(E_-=H_-)$ — его подпространства, состоящие из функций, аналитически продолжимых внутрь контура (соответственно, вне контура и обращающихся в нуль на бесконечности). Рассмотрим краевую задачу в форме

$$P_+[a(t)\varphi_+(t)]=f_+(t), \tag{7}$$

где φ_+ — искомый, f_+ — данный элементы из H_+, $a(t)=\left(\frac{t-t_0}{t}\right)^m\tilde{a}(t)$, $t_0\in\Gamma$, $\tilde{a}(t)\in H$ и $\tilde{a}(t)\neq 0$ на Γ. Взяв в качестве $\mathfrak{q}$ оператор умножения на $t^m(t-t_0)^{-m}$, установим, что $R_+=H_+$, а D_+ состоит из тех $f_+(t)\in H_+$, для которых существует полином $S_{m-1}(t)$ степени $<m$ такой, что $t^mf_+(t)-S_{m-1}(t)=(t-t_0)^mh_+(t)$, $h_+(t)\in H_+$. Полагая для $f_+\in D_+$, $|f_+|_{D_+}=|h_+|_H$, мы обращаем D_+ в банахово пространство.

Из теоремы 3 вытекает

Теорема 5. *Оператор уравнения* (7) *действует из* H_+ *в* D_+ *и является* Ф*-оператором.*

5°. Вернемся к общей схеме пункта 2°, т. е. снова будем считать E линейным векторным пространством. Имеет место

Теорема 6. *Пусть оператор* $P_+\mathfrak{q}T$ *уравнения* (2) *взаимно однозначно отображает* E_+ *на все* R_+.

Если $\mathfrak{q}$ *удовлетворяет условию* (β), *то уравнение* (1) *разрешимо при любой правой части* $f_+\in D_+$; *решения однородного уравнения* (1) *образуют подпространство* $(P\mathfrak{q}T)^{-1}A_+$, *алгебраически изоморфное* A_+.

Если $\mathfrak{q}$ *удовлетворяет условию* (α), *то в „связке" уравнений* (1), *правая часть которых пробегает в* D_+ *целый класс по модулю* B_+, *одно и только одно разрешимо, причем его решение единственно.*

Доказательство почти непосредственно вытекает из теоремы 2. Пусть удовлетворяется (β) и $f_+\in D_+$. Возьмем любую функцию $h_+\in qf_+$; уравнение (2) с правой частью h_+ имеет решение, которое, согласно теореме 2, есть решение (1) с правой частью f_+. Множество решений однородного уравнения (1) совпадает с множеством решений уравнения (2), правая часть которого пробегает $q\theta=A_+$.

Если вместо (β) выполняется условие (α), то каждое решение любого из упомянутой в теореме „связки" уравнений (1) есть решение *определенного* уравнения (2), правая часть которого является образом всех правых частей связки при отображении q. Но последнее имеет лишь единственное решение, которое, в силу теоремы 2, является решением одного из уравнений связки.

Замечание. Пусть выполняются условия второй части теоремы 6, E — банахово пространство, и пусть мы смогли построить достаточно много решений однородного уравнения, сопряженного к (1), так, что в B_+ не существует ненулевого элемента, им всем ортогонального. Тогда оператор уравнения (1) оказывается нормально разрешимым (из E_+ в пространство D_+, нормированное, как в теореме 3).

6°. Теорема 6 позволяет, например, построить теорию интегрального уравнения Винера — Хопфа на полупрямой для произвольного индекса, если эта теория уже известна для случая нулевого индекса, без изучения резольвентного ядра [1].

Пусть E — одно из пространств $L^p (p \geqslant 1)$, M, M^c, M^u, C, C^0 функций, заданных на всей оси [1], разлагающееся обычным образом в прямую сумму своих подпространств E_+ и E_-. $L^1 = L$ является кольцом со свертыванием в качестве умножения. Присоединяя к нему формально единицу δ, получим кольцо V; обозначим $V_\pm = L_\pm + \{\delta\}$. Известно, что элемент $a \in V$ порождает линейный ограниченный оператор свертывания $Tx = a * x$ в каждом из пространств E. При этом, если a, $b \in V$, $x \in E$, то $a * (b * x) = (a * b) * x$. Наконец, оператор свертывания с $a \in V_+ (V_-)$ оставляет инвариантным $E_+ (E_-)$.

Рассмотрим уравнение

$$x_+(t) - \int_0^\infty k(t-s)\, x_+(s)\, ds = f_+(t), \quad t > 0, \tag{8}$$

где x_+, $f_+ \in E_+$, $k \in L$, $1 - K(z) \neq 0 \, (-\infty < z < \infty)$ ($K(z)$ — преобразование Фурье для $k(t)$). Если $\operatorname{Ind}(1 - K(z))$ на вещественной оси равен нулю, то $(1 - K(z))^{-1} = G_+(z)\, G_-(z)$, где $G_\pm(z)$ — преобразования Фурье функций из $V_\pm$, не обращающиеся в нуль при $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ ($\operatorname{Im} z \leqslant 0$). Оператор T свертывания с элементом $\delta - k \in V$ равен $T_-^{-1} T_+^{-1}$, где $T_+^{\pm 1} (T_-^{\pm 1})$ оставляет инвариантным $E_+ (E_-)$. Уравнение (8) может быть записано так: $P_+ T x_+ = f_+$. Оно имеет единственное решение в E_+ при любой правой части $f_+ \in E_+$, определяемое формулой

$$x_+ = T_+ P_+ T_- f_+. \tag{9}$$

Пусть теперь $\nu = -\operatorname{Ind}(1 - K(z)) > 0$. Введем в E оператор $\mathfrak{q}$ свертывания с функцией (из V_+), преобразование Фурье которой есть $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^\nu$. Очевидно, что $\mathfrak{q}$ удовлетворяет условию (β), и символ уравнения $P_+ \mathfrak{q} T x_+ = h_+$ имеет нулевой индекс, так что выполняются условия первой части теоремы 6. Уравнение (8) разрешимо в любом пространстве E_+. Далее, легко проверяется, что пространство $A_+ = P_+ \mathfrak{q} E_-$ ν-мерно и состоит из всех функций вида $e^{-t} P_{\nu-1}(t)$, где $P_{\nu-1}$ — полиномы степени $< \nu$. Таким образом, A_+ принадлежит пересечению $E_\cap$ всех пространств E_+. Но оператор $(P_+ \mathfrak{q} T)^{-1}$ переводит элементы $E_\cap$ в $E_\cap$, поэтому, в силу теоремы 6, пространство решений однородного уравнения (8) также ν-мерно и принадлежит $E_\cap$. Если символ „исправленного" уравнения $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^\nu [1 - K(z)] = G_+^{-1} G_-^{-1}$, то нули (8) даются в преобразованиях Фурье формулой

$$X_+(z) = G_+(z) P_+ \left[G_-(z) \frac{\widetilde{P}_{\nu-1}(z)}{(z+i)^\nu} \right],$$

следующей из (9). Воспользовавшись обобщенной теоремой Лиувилля, эту формулу можно преобразовать так:

$$X_+(z) = G_+(z) \frac{\approx{P}_{\nu-1}(z)}{(z+i)^\nu}. \tag{10}$$

Здесь $\widetilde{P}_{\nu-1}$, $\widetilde{\widetilde{P}}_{\nu-1}$ — произвольные полиномы степени $< \nu$.

Пусть теперь $\nu = -\operatorname{Ind}[1 - K(z)] = -\mu < 0$. Оператор $\mathfrak{q}$ удовлетворяет тогда условию (α), и применима вторая часть теоремы 6. Подпространство B_+ состоит из всех функций вида $e^{-t}P_{\mu-1}(t)$. Рассмотрим уравнение, транспонированное к (8); индекс его символа противоположен по знаку, и нули его принадлежат $E_\cap$ и даются формулой, аналогичной формуле (10). Из этой формулы легко получается, что подпространство нулей транспонированного уравнения имеет базисом цепочку функций $\varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(\mu-1)}(t)$, причем $\varphi(0) = \varphi'(0) = \ldots = \varphi^{(\mu-2)}(0) = 0$, $\int\limits_0^\infty e^{-t}\varphi(t)\,dt \neq 0$. Положим $c_{ks} = \int\limits_0^\infty e^{-t}t^k\varphi^{(s)}(t)\,dt$ $(k, s = 0, \ldots, \mu - 1)$. Интегрируя по частям, найдем рекуррентное соотношение $c_{ks} = -kc_{k-1,\,s-1} + c_{k,\,s-1}$, после чего без труда вычисляется по индукции определитель $\Delta_\mu = |c_{ks}|_{k,s=0}^{\mu-1}$, который оказывается отличным от нуля.

Функции $\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(\mu-1)}$ порождают по формуле

$$\Phi_s(f_+) = \int\limits_0^\infty f_+(t)\varphi^{(s)}(t)\,dt \quad (s = 0, \ldots, \mu - 1)$$

функционалы из E_+^*, которые суть решения уравнения, сопряженного к (8). Если для функции $f_+(t) = e^{-t}(A_0 + A_1t + \ldots + A_{\mu-1}t^{\mu-1}) \in B_+$ $\Phi_s(f_+) = 0$ $(s = 0, \ldots, \mu - 1)$, то в силу $\Delta_\mu \neq 0$ $A_0 = \ldots = A_{\mu-1} = 0$, и $f_+ \equiv 0$. Из теоремы 6 и замечания к ней следует, что оператор уравнения (8) является Ф-оператором в каждом пространстве E_+; уравнение имеет единственное решение при условии, что правая часть ортогональна всем решениям ($\in E_\cap$) однородного транспонированного уравнения (порожденные которыми функционалы образуют базис решений сопряженного к (8) уравнения).

Подобные рассуждения можно провести и для дискретного аналога уравнения (8).

Результаты 1°—4° были доложены автором на Международном конгрессе математиков в Москве (1966 г.) [7].

г. Казань

Поступило
10 X 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн М. Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов. УМН, т. XIII, вып. 5, 1958, с. 3—120.

2. Пресдорф З. К теории систем сингулярных интегральных уравнений с вырождающейся символической матрицей, I. Вестник ЛГУ, 1965, № 19. Сер. матем., мех. и астроном., вып. 4, с. 58—73.

3. Косулин А. Е. Особый случай в теории сингулярных уравнений. Вестник ЛГУ, 1962, № 19. Сер. матем., мех. и астроном., вып. 4, с. 142—148.

4. Чеботарев Г. Н. Об одном уравнении типа свертки первого рода. Изв. вузов, Матем., 1967, № 2, с. 80—92.

5. Хайкин М. И. Об интегральном уравнении типа свертки первого рода. Изв. вузов, Матем., 1967, № 3, с. 105—116.

6. Дыбин В. Б. Исключительный случай интегральных уравнений типа свертки. Тезисы Междунар. конгресса математиков. Секция 5, М., 1966, с. 47.

7. Чеботарев Г. Н. О нормальной разрешимости неопределенных уравнений в некоторых пространствах. Тезисы Междунар. конгресса математиков. Секция 5. М., 1966, с. 81.

8. Чеботарев Г. Н. Об одном особом случае уравнения Винера — Хопфа в пространстве ограниченных функций. Изв. вузов, Матем., 1967, № 10.

9. Дыбин В. Б. Исключительный случай интегральных уравнений типа свертки. ИАН БССР. Сер. физ.-матем. н., 1966, № 3, с. 37—45.