



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. A. Belyaev, Solution of the Dirichlet problem in a subspace of a Hilbert space using potentials, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1982, Volume 37, Issue 4, 143–144

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.88

January 22, 2025, 13:28:56



**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ
ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА С ПОМОЩЬЮ ПОТЕНЦИАЛОВ**

А. А. Б е л я е в

Известно, что ограниченное решение задачи Дирихле для функций в полупространстве конечномерного пространства единственно и представляется в виде потенциала двойного слоя от краевого значения ([1], гл. 18, § 9, формула (3)). В данной статье доказано, что это утверждение сохраняет силу и в гильбертовом пространстве, если граничное значение удовлетворяет условию Липшица (теорема 1). Соответствующий потенциал понимается здесь так, как указано в определении 2. В бесконечномерном случае задачу Дирихле естественно рассматривать также и для мер. Введенный в заметке сопряженный потенциал двойного слоя дает единственное в некотором классе мер решение этой задачи (теорема 2).

Дадим точные формулировки. Пусть H — вещественное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением (\cdot, \cdot) , нормой $|\cdot|$ и ортонормированным базисом $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$. Зафиксируем в H такой линейный оператор B , что $Be_i = b_i e_i$, $b_i > 0$, $b_1 = 1$,

$\sum_{i=1}^{\infty} b_i < \infty$, и обозначим через p_t гауссову меру с характеристическим функционалом

$p_t(x) = \exp\{-2t(Bx, x)\}$, определенную на σ -алгебре $\mathcal{B}(H)$ борелевских подмножеств H . Определим оператор Лапласа Δ цепочкой равенств

$$\Delta u = \Delta_B u = \text{tr}(Bu'') = \sum_{i=1}^{\infty} b_i d_{e_i}^2 u,$$

где d_h — оператор дифференцирования по вектору $h \in H$. Кроме того, будем использовать следующие обозначения: $\mu^x = \mu(dy - x)$ — сдвиг меры μ на вектор $x \in H$, μ_{Γ} — поверхностная мера в смысле А. В. Угланова [2], порожденная на поверхности Γ мерой μ : $\mathcal{B}(H) \rightarrow \mathbb{R}$; стандартные координаты $x_i = (x, e_i)$, $x' = x - x_1 e_1$; $\Gamma_t = \{x_1 = t\}$, $U_t = \{x_1 > t\}$, $\Gamma = \Gamma_0$, $U = U_0$, $\mathcal{M}_r(x) = \{ |y - x| < r \}$, $\mathcal{M}_r = \mathcal{M}_r(0)$, $D_r^t = \mathcal{M}_r \cap U_t$; $L^{\infty}(A)$ — пространство измеримых ограниченных функций на борелевском множестве $A \subset H$; $C^n(U)$ ($C^n(U)$) — пространство функций, имеющих в U по крайней мере n производных по Фреше (соответственно частных производных порядка не больше чем n), ограниченных на каждом ограниченном подмножестве $A \subset U$ общей константой $C = C(A)$, $C^{\infty}(U) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C^n(U)$, $D(U) = \{f \in C^{\infty}(U): \exists t, r > 0, \text{supp } f \subset D_r^t\}$; $M^n(U)$ — пространство мер, определенных на $\mathcal{B}(U) = \mathcal{B}(H) \cap \{A \subset U\}$ и n раз дифференцируемых по подпространству $H_1 = \sqrt{B} \cdot H$ [3].

О п р е д е л е н и е 1. Функция $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ называется решением задачи Дирихле в области U с краевым значением $\rho: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, если $f \in C^1(U) \cap C_4^2(U)$, $\Delta f(x) = 0$, $x \in U$ и $\forall r f(x + t e_1) \rightarrow \rho(x)$ при $t \searrow 0$ равномерно по $x \in \mathcal{M}_r \cap \Gamma$.

О п р е д е л е н и е 2. Потенциалом двойного слоя от $\rho \in L^{\infty}(\Gamma)$ называется функция $W_{\rho}: U \rightarrow \mathbb{R}$:

$$W_{\rho}(x) = \int_{\Gamma} \rho(y) K_{x_1}(dy - x'),$$

где K_{x_1} — мера Коши, определенная равенством

$$K_{x_1}(A) = (2\pi)^{-1/2} \cdot x_1 \int_0^{\infty} (p_t)_{\Gamma \cdot}(A) \cdot t^{-3/2} \cdot e^{-x_1^2/t} dt.$$

Нетрудно проверить, что конечномерные плотности K_{x_1} имеют вид

$$K_{x_1}^n(x_2, x_3, \dots, x_{n+1}) = \pi^{-(n+1)/2} \cdot \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot x_1 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n+1} b_i^{-1} x_i^2\right)^{-(n+1)/2}.$$

Т е о р е м а 1. Если краевое значение ρ удовлетворяет условию Липшица: $|\rho(x) - \rho(y)| < C \cdot |x - y|$, $0 < C < \infty$, то потенциал W_ρ — единственное решение задачи Дирихле.

О п р е д е л е н и е 3. Мера $\mu: \mathcal{B}(U) \rightarrow \mathbb{R}$ называется решением задачи Дирихле (для мер) с краевым значением $\mu_0: \mathcal{B}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}$, если: 1) мера μ трижды дифференцируема по подпространству H_1 [3] на каждом борелевском подмножестве $A \subset U$, проекция которого на Γ вдоль e_1 ограничена; 2) $\int_U \Delta \varphi \cdot \mu = 0 \quad \forall \varphi \in D(U)$; 3) поверхностная мера $\mu_t = \mu_{\Gamma_t}$ (она существует в силу 1)) слабо сходится к μ_0 при $t \searrow 0$ (мы отождествляем Γ_t и Γ); 4) для произвольного фиксированного $r > 0$ вариация меры μ_{x_1} на шаре $W_r(x) \cap \Gamma_{x_1}$ ограничена равномерно по $x \in U$.

О п р е д е л е н и е 4. Сопряженным потенциалом двойного слоя от меры $\mu_0: \mathcal{B}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}$ называется мера $\Pi_{\mu_0}: \mathcal{B}(U) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\Pi_{\mu_0}(A) = \int_{\Gamma} d_{e_1} Q(A-x) \mu_0(dx),$$

где $Q = d_{e_1} Q_\infty^2$ [3] и

$$Q^2(A) = \int_0^\infty p_t(A) dt.$$

Мера Q^2 — фундаментальное решение оператора Лапласа [4].

Т е о р е м а 2. Сопряженный потенциал двойного слоя Π_{μ_0} дает единственное решение задачи Дирихле (в смысле определения 3).

В доказательстве единственности в теореме 1 используется

Л е м м а 1. Существуют константы $\alpha, \beta > 1$ такие, что для произвольного решения f задачи Дирихле с нулевым краевым значением

$$\alpha M_f(r) \leq M_f(\beta r) \quad \forall r > 0,$$

где $M_f(r) = \sup \{|f(x)| : |x| = r, x \in U\}$.

Отметим, что задача Дирихле для мер в полупространстве исследовалась ранее В. Ю. Бенткусом [5]. Однако найденные им решения оказывались обобщенными мерами (распределениями), в то время как данные здесь решения вполне аналогичны классическим.

В заключение автор благодарит О. Г. Смолянова за постоянное внимание и руководство.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] С. Г. Михлин. Курс математической физики.— М.: Наука, 1968.
- [2] А. В. Угланов. Поверхностные меры в банаховом пространстве.— Матем. сб., 1979, 110 (152):2(10), с. 189—217.
- [3] О. Г. Смолянов. Анализ на топологических линейных пространствах и его приложения.— М.: изд-во МГУ, 1979.
- [4] В. Ю. Бенткус. Эллиптичность бесконечномерного итерированного оператора Лапласа.— Литов. матем. сб., 1979, 19:4, с. 13—28.
- [5] В. Ю. Бенткус. Уравнения с постоянными коэффициентами в частных производных для обобщенных мер в бесконечномерном полупространстве.— Дифф. уравн. и их применение, Вильнюс, 1976, вып. 16.

Московский государственный университет

Поступило в Правление общества
11 декабря 1981 г.