П. М. Гудивок, О силовских подгруппах полной линейной группы над кольцом целых чисел,

*Алгебра и анализ*, 1990, том 2, выпуск 6, 125–131

https://www.mathnet.ru/aa224

П. М. Гудивок

# О СИЛОВСКИХ ПОДГРУППАХ ПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ НАД КОЛЬЦОМ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

Решается задача о сопряженности силовских $p$-подгрупп полной линейной группы над кольцом целых рациональных чисел.

Д. А. Супруненко [1] описал с точностью до сопряженности силовские $p$-подгруппы полной линейной группы $\mathrm{GL}(n,F)$ над алгебраически замкнутым полем $F$. Этот результат на произвольное поле $F$ обобщил Р. Т. Вольвачев [2]. Как показано в [3], при описании силовских 2-подгрупп в [2] имеются неточности. В. С. Конюх [4] классифицировал с точностью до сопряженности все неприводимые силовские 2-подгруппы группы $\mathrm{GL}(n,K)$ ($K$ - произвольное поле). В [1-4] установлено, что при $p\neq 2$ силовские $p$-подгруппы группы $\mathrm{GL}(n,K)$ попарно сопряжены. Это утверждение неверно при $p=2$. В. П. Платонов [5] доказал сопряженность силовских $p$-подгрупп алгебраических линейных групп над алгебраически замкнутым полем. В [6] изучались силовские $p$-подгруппы группы $\mathrm{GL}(n,R)$, где $R$ - дискретно нормированное кольцо. В частности, показано, что если $R$ - дискретно нормированное кольцо характеристики нуль с конечным полем вычетов характеристики $q$, то при $p\neq 2$ и $p\neq q$ силовские $p$-подгруппы группы $\mathrm{GL}(n,R)$ попарно сопряжены. В [7] установлено, что существует такое простое число $q$, что не все силовские $q$-подгруппы группы $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ при $n>2$ попарно сопряжены ($\mathbb{Z}$ - кольцо целых рациональных чисел).

В настоящей работе с помощью теории целочисленных представлений конечных групп доказывается следующая

**Теорема А.** *Силовские $p$-подгруппы группы $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ попарно сопряжены тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:* 1) $n=p-1$ *и число классов идеалов поля* $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ *равно* 1 ($\mathbb{Q}$ - *поле рациональных чисел,* $\varepsilon$ - *первообразный корень степени* $p$ *из* 1); 2) $n<p-1$, $p\neq 2$; 3) $n=2$.

## § 1. Введение

В этом параграфе приводятся необходимые для дальнейшего сведения из теории линейных групп и теории целочисленных представлений конечных групп.

**Лемма 1.1** (см. [2-4]). *Силовские $p$-подгруппы группы* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$ *попарно сопряжены.*

---

Ключевые слова: полная линейная группа над кольцом целых чисел, силовская подгруппа, сопряженные силовские подгруппы.

**Лемма 1.2** (см. [2]). *Силовская $p$-подгруппа группы* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$ *неприводима тогда и только тогда, когда* $n=\varphi(p^r)$ ($r\geq 0$, $\varphi$ *– функция Эйлера*).

Приведем полученное в [2] описание силовских $p$-подгрупп группы $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$. Пусть $N_{p^r}$ – силовская $p$-подгруппа симметрической группы $S_{p^r}$, $H$ – погруппа группы $\mathrm{GL}(n,Q)$, $H\wr N_{p^r}$ – сплетение групп $H$ и $N_{p^r}$; $\varepsilon$ – первообразный корень степени $p$ из единицы ($\varepsilon\in\mathbb{C}$); $\tilde{\varepsilon}$ – матрица, соответствующая полиному деления круга $\Phi_p(x)$ порядка $p$, и $P=\langle\tilde{\varepsilon}\rangle$ – циклическая группа, порожденная $\tilde{\varepsilon}$.

Представим натуральное число $n$ в виде

$$n = (p-1)n_0 + t \quad (0\leq t<p-1),$$

где $n_0=a_0+a_1p+\ldots+a_sp^s$ ($a_s\neq 0, 0\leq a_j<p$; $j=0,1,\ldots,s$). Тогда произвольная силовская $p$-подгруппа группы $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$ сопряжена с группой

$$B_p = \mathrm{diag}\,[1^{(t)}, G_{p^0}^{(a_0)}, G_p^{(a_1)},\ldots,G_{p^s}^{(a_s)}], \tag{1.1}$$

где

$$G_{p^r} = P\wr N_{p^r},\quad G_{p^r}^{(a_r)} = \mathrm{diag}\,[P_1,\ldots,P_{a_r}] \tag{1.2}$$

$$(P_i = G_{p^r};\ i = 1,\ldots,a_r;\ r = 0,1,\ldots,s).$$

Отметим, что при произвольном $p$ группа $B_p$ является силовской $p$-подгруппой группы $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$, а $G_{p^r}$ – неприводимая силовская $p$-подгруппа группы $\mathrm{GL}(\varphi(p^{r+1}),\mathbb{Z})$ ($r\geq 0$).

**Лемма 1.3** (см. [8-9]). *Пусть $G$ – конечная $p$-группа, $\Delta_1$ и $\Delta_2$ – неэквивалентные неприводимые матричные $\mathbb{Q}$-представления группы $G$, которые неприводимы и над полем $p$-адических чисел $\mathbb{Q}_p$. Тогда группа $G$ обладает неразложимым $\mathbb{Z}$-представлением $\Gamma$ вида:*

$$\Gamma : g \longrightarrow \Gamma(g) = \begin{pmatrix}\Delta_1'(g) & A(g)\\ 0 & \Delta_2'(g)\end{pmatrix}\quad (g\in G),$$

*где $\Delta_i'$ – некоторое неприводимое $\mathbb{Z}$-представление группы $G$, $\mathbb{Q}$-эквивалентное представлению $\Delta_i$ ($i=1,2$). Представление $\Gamma$ неразложимо также над кольцом целых $p$-адических чисел $\mathbb{Z}_p$.*

**Лемма 1.4.** (см. [10]). *Пусть $G$ – конечная группа, $R$ – полное дискретно нормированное кольцо, $RG$ – групповое кольцо группы $G$ над кольцом $R$. Произвольный $RG$-модуль с конечным $R$-базисом однозначно с точностью до изоморфизма разлагается в прямую сумму неразложимых $RG$-модулей с конечными $R$-базисами.*

## § 2. Приводимый случай

Пусть силовская $p$-подгруппа группы $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$ приводима. Выясним вопрос о сопряженности силовских $p$-подгрупп группы $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$. Легко видеть, что группы $G_{p^{-1}}=\langle 1\rangle$, $G_{p^0}, G_p,\ldots,G_{p^s}$ (см. (1.2)) попарно не изоморфны. Рассмотрим два случая.

1) Пусть в группе $B_p$ вида (1.1) при некоторых $i$ и $j$ $(i<j)$ содержатся подгруппы $G_{p^i}$ и $G_{p^j}$. Обозначим через $H_p$ абстрактную группу, изоморфную группе $B_p$. В силу (1.1) группа $H_p$ обладает точным $\mathbb{Z}$-представлением $\Gamma_p$ степени $n$ вида

$$\Gamma_p : h \longrightarrow \operatorname{diag}\,[\Delta_{-1}(h)^{(t)},\ \Delta_0(h)^{(a_0)},\dots,\ \Delta_s(h)^{(a_s)}],$$

где $h\in H_p$ и $\Delta_i$ - такое неприводимое $\mathbb{Z}$-представление группы $H_p$, что $\operatorname{Im}\Delta_i=G_{p^i}$ $(i=-1,0,1,\dots,s)$.

Ввиду леммы 1.3 существует точное $\mathbb{Z}$-представление $\tilde{\Gamma}_p$ группы $H_p$ степени $n$ вида

$$\tilde{\Gamma}_p : h \longrightarrow \tilde{\Gamma}_p(h) = \operatorname{diag}\,[\Gamma'_p(h),\ \Gamma''_p(h)],$$

где $\Gamma'_p(h)$ получается из $\Gamma_p(h)$ отбрасыванием по одному блоку $\Delta_i(h)$ и $\Delta_j(h)$, а

$$\Gamma''_p : h \longrightarrow \Gamma''_p(h) = \begin{pmatrix} \Delta'_i(h) & A(h) \\ 0 & \Delta'_j(h) \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

является неразложимым $\mathbb{Z}$-представлением группы $H_p$ ($\Delta'_i$ и $\Delta'_j$ - некоторые неприводимые $\mathbb{Z}$-представления группы $H_p$, $\mathbb{Q}$-эквивалентные соответственно представлениям $\Delta_i$ и $\Delta_j$).

Пусть $\operatorname{Im}\tilde{\Gamma}_p=\tilde{B}_p$. Покажем, что подгруппы $B_p$ и $\tilde{B}_p$ не сопряжены в группе $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$. Предположим противное. Тогда существует такая матрица $C\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$, что

$$C^{-1}\tilde{\Gamma}_p(h)C = \Gamma_p(\psi(h)) \quad (h\in H_p), \tag{2.2}$$

где $\psi$ - некоторый автоморфизм группы $H_p$. Из [4] вытекает, что $B_p$ является также силовской $p$-подгруппой группы $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q}_p)$ ($\mathbb{Q}_p$ - поле $p$-адических чисел) и $\mathbb{Z}$-представление $\Delta_i$ группы $H_p$ будет неприводимым и над полем $\mathbb{Q}_p$. Значит, $\Gamma_p\colon h\longrightarrow\Gamma_p(\psi(h))$ $(h\in H_p)$ является вполне приводимым $\mathbb{Z}_p$-представлением группы $H_p$ ($\mathbb{Z}_p$ - кольцо целых $p$-адических чисел). Далее, в силу леммы 1.3 $\mathbb{Z}$-представление $\Gamma''_p$ группы $H_p$ (см. (2.1)) будет неразложимым и над кольцом $\mathbb{Z}_p$. Поэтому $\tilde{\Gamma}_p$ не является вполне приводимым $\mathbb{Z}_p$-представлением группы $H_p$. Отсюда и из справедливости теоремы Крулля-Шмидта для $\mathbb{Z}_p$-представлений конечной группы (см. лемму 1.4) вытекает, что $\mathbb{Z}_p$-представления $\tilde{\Gamma}_p$ и $\bar{\Gamma}_p$ группы $H_p$ не эквивалентны над кольцом $\mathbb{Z}_p$. Принимая во внимание (2.2), получаем противоречие. Следовательно, силовские $p$-подгруппы $B_p$ и $\tilde{B}_p$ группы $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ не сопряжены.

2) Пусть $B_p=G_{p^r}^{(a_r)}$ $(p\neq2,\ 1<a_r<p,\ r\geq0)$. Обозначим через $L_p$ абстрактную группу, изоморфную группе $G_{p^r}$. Очевидно, группа $H_p=A_1\times\dots\times A_{a_r}$ $(A_i\cong L_p;\ i=1,\dots,a_r)$ изоморфна группе $B_p$. Рассмотрим подгруппу $A=A_1\times A_2$ группы $H_p$. Пусть $\Delta$ - точное $\mathbb{Z}$-представление группы $L_p$ с $\operatorname{Im}\Delta=G_{p^r}$. Тогда $\Delta$ является неприводимым $\mathbb{Z}$-представлением группы $L_p$. Очевидно,

$$\Gamma_1 : h_1 \longrightarrow \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \Delta(h_1) \end{pmatrix}, \quad h_2 \longrightarrow \begin{pmatrix} \Delta(h_2) & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

($h_i \in A_i$; $i=1,2$; $E$ - единичная матрица) - точное $\mathbb{Z}$-представление группы $A$ с $\operatorname{Im}\Gamma_1 = \operatorname{diag}[G_{p^r}, G_{p^r}]$. $\mathbb{Z}$-представления $\Delta_1 : h_1 \to E$, $h_2 \to \Delta(h_2)$ и $\Delta_2 : h_1 \to \Delta(h_1)$, $h_2 \to E$ группы $A$ неприводимы и неэквивалентны над $\mathbb{Q}$. Тогда по лемме 1.3 группа $A$ обладает неразложимым точным $\mathbb{Z}$-представлением $\Gamma_2$ вида

$$\Gamma_2 : h \longrightarrow \begin{pmatrix} \Delta_1'(h) & V(h) \\ 0 & \Delta_2'(h) \end{pmatrix} \quad (h \in A),$$

где $\Delta_i'$ - некоторое $\mathbb{Z}$-представление группы $A$, $\mathbb{Q}$-эквивалентное представлению $\Delta_i$ ($i=1,2$). Пусть $\operatorname{Im}\Gamma_2 = S$. Далее такими же рассуждениями, как и в случае 1), получаем, что подгруппы $B_p$ и $\tilde{B}_p = \operatorname{diag}[S, G_{p^r}^{(a_r-2)}]$ не сопряжены в группе $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$.

Таким образом, получен следующий результат.

**Предложение 2.1.** *Пусть силовская р-подгруппа $B_p$ группы* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$ *приводима и* $|B_p|>1$. *Тогда в группе* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ *существуют несопряженные силовские р-подгруппы.*

## § 3. Неприводимый случай

Пусть силовская $p$-подгруппа группы $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$ неприводима. Тогда $n=\varphi(p^r)$ ($r \geq 0$, $\varphi$ - функция Эйлера). Исследуем вопрос о сопряженности силовских $p$-подгрупп группы $\mathrm{GL}(\varphi(p^r), \mathbb{Z})$. Рассмотрим ряд случаев.

1) Пусть $n=2$, $p=2$. Легко видеть, что произвольная силовская 2-подгруппа группы $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ сопряжена с группой

$$H_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

2) Пусть $n=p-1>1$ ($p$ - простое число). Очевидно, $P=\langle\tilde{\varepsilon}\rangle$ будет силовской $p$-подгруппой группы $\mathrm{GL}(p-1,\mathbb{Z})$ ($\varepsilon$ - первообразный корень степени $p$ из 1, $\tilde{\varepsilon}$ - матрица, соответствующая полиному деления круга $\Phi_p(x)$ порядка $p$). Пусть $H=\langle a\rangle$ - циклическая группа порядка $p$. Из [11] вытекает, что число неэквивалентных неприводимых $\mathbb{Z}$-представлений степени $p-1$ группы $H=\langle a\rangle$ равно числу $h$ классов идеалов поля $\mathbb{Q}(\varepsilon)$. Следовательно, если $h=1$, то произвольная силовская $p$-подгруппа группы $\mathrm{GL}(p-1,\mathbb{Z})$ сопряжена с группой $P=\langle\tilde{\varepsilon}\rangle$. Пусть $h>1$. Обозначим через $\Delta : a \to A$ неприводимое $\mathbb{Z}$-представление степени $p-1$ группы $H$, которое не эквивалентно над $\mathbb{Z}$ представлению $\Delta_1 : a \to \tilde{\varepsilon}$. Покажем, что силовские $p$-подгруппы $P_1=\langle A\rangle$ и $P=\langle\tilde{\varepsilon}\rangle$ группы $\mathrm{GL}(p-1,\mathbb{Z})$ не сопряжены. Предположим, что $C^{-1}P_1C=P$, где $C \in \mathrm{GL}(p-1,\mathbb{Z})$. Тогда

$$C^{-1}AC = \tilde{\varepsilon}^r \; (1 \leq r < p). \tag{3.1}$$

Легко показать, что $\mathbb{Z}$-представления $\Delta_1 : a \to \tilde{\varepsilon}$ и $\Delta_r : a \to \tilde{\varepsilon}^r$ ($1 \leq r < p$) группы $H$ $\mathbb{Z}$-эквивалентны, т.е. существует такая матрица $C_1 \in \mathrm{GL}(p-1,\mathbb{Z})$, что

$$C_1^{-1}\tilde{\varepsilon}^r C_1 = \tilde{\varepsilon}. \tag{3.2}$$

Из (3.1) и (3.2) получаем, что $\mathbb{Z}$-представления $\Delta$ и $\Delta_1$ $\mathbb{Z}$-эквивалентны, что невозможно. Значит, подгруппы $P$ и $P_1$ группы $\mathrm{GL}(p-1,\mathbb{Z})$ не сопряжены.

3) Пусть $n=\varphi(p^{r+1})=p^r(p-1)(r\geq 1), n>2$. В силу (1.2) группа $G_{p^r}=P\wr N_{p^r}$ является силовской $p$-подгруппой группы $\mathrm{GL}(\varphi(p^{r+1}),\mathbb{Z})$ $(P=<\tilde{\varepsilon}>, \varepsilon^p=1)$. Из [2] вытекает, что группа $T_{p^r}=<\varepsilon>\wr N_{p^r}$ будет силовской $p$-подгруппой группы $\mathrm{GL}(p^r,\mathbb{Z}[\varepsilon])$. Группа $T_{p^r}$ мономиальна. Каждая матрица $\tilde{A}$ из группы $G_{p^r}$ получается из некоторой матрицы $A$ из группы $T_{p^r}$ заменой в ней $\varepsilon^r$ на $\tilde{\varepsilon}^r (1\leq r\leq p)$.

а) Пусть $n=p(p-1)$, $p\neq 2$. Обозначим через $L_p$ силовскую $p$-подгруппу группы $\mathrm{GL}(p(p-1),\mathbb{Z})$, содержащую абелеву подгруппу $H_1=<A,B>$ порядка $p^2$, где

$$A = (\tilde{\varepsilon}\otimes E_p), \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & E_r \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon} & E_{p-1} \\ 0 & E_{p-1} \end{pmatrix},$$

$E_m$ – единичная матрица порядка $m, \tilde{\varepsilon}\otimes E_p$ – тензорное произведение матриц $\tilde{\varepsilon}$ и $E_p$, $r=(p-2)(p-1)$.

Предположим, что подгруппы $G_p=P\wr N_p$ и $L_p$ группы $\mathrm{GL}(p(p-1),\mathbb{Z})$ сопряжены, т.е. $C^{-1}L_pC=G_p$, где $C\in\mathrm{GL}(p(p-1),\mathbb{Z})$. Тогда

$$C^{-1}AC = \tilde{A}_1, \quad C^{-1}BC = \tilde{B}_1, \tag{3.3}$$

где $A_1$ и $B_1$ – матрицы из группы $T_p=<\varepsilon>\wr N_p$, а $\tilde{A}_1\in G_p, \tilde{B}_1\in G_p$.

Нетрудно показать, что существует такая матрица $C_1\in\mathrm{GL}(p,\mathbb{Z}[\varepsilon])$, что

$$C_1^{-1}AC_1 = A_2, \quad C_1^{-1}B_1C_1 = B_2, \tag{3.4}$$

где $B_2$ одна из матриц:

$$V_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon^{r_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon^{r_p} \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ E_{p-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (1 \leq r_i \leq p; \quad i=1,\ldots,p).$$

В случае $B_2=V_1$ из (3.4) вытекает, что для некоторой матрицы $C_2\in\mathrm{GL}(\varphi(p^2),\mathbb{Z})$ $C_2^{-1}BC_2=\tilde{V}_1$. Следовательно, $\mathbb{Z}$-представления $\Gamma_1: b\longrightarrow B$ и $\Gamma_2: b\longrightarrow \tilde{V}_1$ циклической группы $H=<b>$ порядка $p$ эквивалентны над кольцом целых $p$-адических чисел $\mathbb{Z}_p$. Принимая во внимание лемму 1.4, получаем, что это невозможно, так как представление $\Gamma_2$ вполне приводимо над $\mathbb{Z}_p$, а $\Gamma_1$ нет.

Значит, $B_2\neq V_1$. Пусть $B_2=V_2$. Тогда из условия $V_2A_2=A_2V_2$ (см. (3.3)) находим, что $A_2=\varepsilon^k E_p$ $(1\leq k<p)$. Обозначим через $H_2=<a_1>\times<a_2>$ $(a_i^p=1,\ i=1,2)$ абелеву группу типа $(p,p)$. Очевидно, отображение $\Gamma: a_1\longrightarrow A_2, a_2\longrightarrow V_2$ является неразложимым $\mathbb{Z}[\varepsilon]$-представлением группы $H_2$. Отсюда вытекает, что отображение $\Gamma': a_1\longrightarrow \tilde{A}_2, a_2\longrightarrow \tilde{V}_2$ – неразложимое представление группы $H_2$ над кольцом $\mathbb{Z}_p$. Из (3.3) и (3.4) получаем, что $\mathbb{Z}$-представления $\Gamma: a_1\longrightarrow A, a_2\longrightarrow B$ и $\Gamma': a_1\longrightarrow \tilde{A}_2$, $a_2\longrightarrow \tilde{V}_2$ группы $H_2$ $\mathbb{Z}_p$-эквивалентны. С другой стороны, эти представления не могут быть эквивалентными над $\mathbb{Z}_p$, так как представление Г разложимо, а Г′ неразложимо над кольцом $\mathbb{Z}_p$. Полученное противоречие показывает, что подгруппы $G_p$ и $L_p$ группы $GL(\varphi(p^2),\mathbb{Z})$ не сопряжены ($p\neq 2$).

б) Пусть $n=\varphi(p^{r+1})=p^r(p-1)$ $(r>1)$.

Рассмотрим силовскую $p$-подгруппу $Dp^r$ группы $GL(p^r(p-1),\mathbb{Z})$, содержащую циклическую подгруппу $\langle A\rangle$ порядка $p^2$, где

$$A=\begin{pmatrix}\tilde{\xi} & A_0 & 0\\ 0 & \tilde{\varepsilon} & 0\\ 0 & 0 & E\end{pmatrix},\quad A_0=\begin{pmatrix}0 & \dots & 0 & 1\\ 0 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$E$ - единичная матрица, $\tilde{\xi}$ - матрица, соответствующая полиному деления круга $\Phi_{p^2}(x)$ порядка $p^2$. Покажем, что подгруппы $G_{p^r}$ и $D_{p^r}$ не сопряжены в $GL(p^r(p-1),\mathbb{Z})$. Предположим, что они сопряжены. Тогда существует такая матрица $C\in GL(p^r(p-1),\mathbb{Z})$, что

$$C^{-1}AC = \tilde{A}_1, \tag{3.5}$$

где $A_1\in T_{p^r}=\langle\varepsilon\rangle\wr Np^r$ и $A_1\in Gp^r$. Так как группа $T_{p^r}$ мономиальна, то найдется такая матрица $C_1\in GL(p^r,\mathbb{Z}[\varepsilon])$, что

$$C_1^{-1}A_1C_1 = A_2 = \begin{pmatrix}B_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & B_s\end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

где $B_i$ - матрица одного из таких видов:

$$(\alpha),\ \begin{pmatrix}0 & \alpha\\ E_m & 0\end{pmatrix}$$

($\alpha\in\mathbb{Z}[\varepsilon]$; $\alpha^p=1$, $E_m$ - единичная матрица порядка $m$, $(m+1)\in\{p,p^2\}$ при $\alpha=1$ и $m+1=p$ при $\alpha\neq 1$).

Из (3.5) и (3.6) вытекает, что существует такая матрица $C_2\in GL(p^r(p-1),\mathbb{Z})$, что $C_2^{-1}AC_2=\tilde{A}_2$. Следовательно, $\mathbb{Z}$-представления $\Delta_1: a\longrightarrow A$ и $\Delta_2: a\longrightarrow\tilde{A}_2$ циклической группы $H=\langle a\rangle$ порядка $p^2$ $\mathbb{Z}$-эквивалентны. Они будут эквивалентны и над кольцом $\mathbb{Z}_p$. Но это невозможно, так как среди неразложимых над кольцом $\mathbb{Z}_p$ компонент представления $\Delta_2$ не содержится неразложимое представление

$$a\longrightarrow\begin{pmatrix}\tilde{\xi} & A_0\\ 0 & \tilde{\varepsilon}\end{pmatrix}.$$

Отметим, что неразложимость этого представления показана в [12]. Следовательно, подгруппы $G_{p^r}$ и $D_{p^r}$ группы $GL(p^r(p-1),\mathbb{Z})$ не сопряжены $(r>1)$.

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

**Теорема 3.1.** *Силовские $p$-подгруппы группы $GL(\varphi(p^r),\mathbb{Z})$ $(r\geq 0)$ попарно сопряжены тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий: 1) $r=1$ и число классов идеалов поля $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ равно 1 ($\varepsilon$ - первообразный корень степени $p$ из 1); 2)*

$\varphi(p^r)\le 2$.

**Замечание 1.** Из предложения 2.1 и теоремы 3.1 вытекает доказательство теоремы А, сформулированной в начале статьи.

**Замечание 2.** Из [13-14] следует, что при некоторых $n$ силовские $p$-подгруппы группы $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ могут быть неизоморфны.

## Список литературы


[1] Супруненко Д.А. Линейные $p$-группы // ДАН БССР. 1960. Т.4, N 6. С.233-235.

[2] Вольвачев Р.Т. $p$-подгруппы Силова полной линейной группы // Изв.АН СССР. Сер.мат. 1963. Т.27, N 5. С.1031-1054.

[3] Leedham-Green C.R., Plesken W. Some remarks on sylow subgroups of general linear groups // Math.Z. 1986. Vol.191. P.529-535.

[4] Конюх В.С. О линейных $p$-группах // Изв.АН БССР. Сер.физ.-мат.наук. 1987. N 1. С.3-8.

[5] Платонов В.П. Теория алгебраических линейных групп и периодические группы // Изв.АН СССР. Сер.мат. 1966. Т.30, N 3. С.573-620.

[6] Гудивок П.М., Кирилюк А.А. Силовские $p$-подгруппы полной линейной группы над дискретно нормированными кольцами // Докл.АН УССР. Сер.А. 1979. N 5. С.326-329.

[7] Гудивок П.М., Кирилюк А.А., Рудько В.П., Циткин А.И. О конечных подгруппах группы $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ // Кибернетика. 1982. N 6. С.71-82.

[8] Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука, 1969. 668 с.

[9] Reiner I. Module extensions and blocks // J.Algebra. 1967. Vol.5, N 3. P.157-163.

[10] Боревич З.И., Фаддеев Д.К. Теория гомологий в группах. II // Вестн. Ленингр. ун-та. 1959. N 7. С.72-87.

[11] Diederichsen F.E. Über die Ausreduktion ganzzahliger Gruppendarstellungen bei arithmetischer Aquivalenz // Hamb.Abh. 1940. Vol.14. P.357-412.

[12] Берман С.Д., Гудивок П.М. Неразложимые представления конечных групп над кольцом целых $p$-адических чисел // Изв.АН СССР. Сер.мат. 1964. Т.28, N 4. С.875-910.

[13] Abold H., Plesken W. Ein Sylowzatz für endliche $p$-Untergruppen von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ // Math.Ann. 1978. Vol.232, N 5. P.183-186.

[14] Ващук Ф.Г., Гудивок П.М. Целочисленные $p$-адические представления конечных абелевых $p$-групп // ДАН УССР. Сер.А. 1986. N 1. С.3-6.


294018, Ужгород, ул. Готвальда, д. 15, кв. 58

Поступило 21 марта 1990 г.