В. М. Миллионщиков, Некоторые метрические пространства гладких преобразований риманова многообразия, *Матем. заметки*, 1985, том 38, выпуск 4, 576–586

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 38, № 4 (1985)

НЕКОТОРЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА ГЛАДКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ РИМАНОВА МНОГООБРАЗИЯ

В. М. Миллионщиков

Введение. В ряде вопросов теории показателей Ляпунова приходится иметь дело с различными пространствами дифференцируемых отображений риманова многообразия. К числу таких вопросов относится, например, изучение показателей Ляпунова динамических систем с дискретным временем с точки зрения теории функций Бэра. Основное условие применимости теории Бэра к функциям, заданным на том или ином метризуемом топологическом пространстве, проще всего выражается как полнота этого пространства в некоторой метрике. Однако бывает так, что метрика, в которой пространство полно, может быть заменена другой метрикой, задающей ту же топологию, в которой пространство не полно, но которая определяется более простой формулой. Результаты применения теории Бэра к функциям на таком топологическом пространстве лучше формулировать с помощью такой проще определяемой метрики.

Результаты предпринятого в [1] изучения пространств диффеоморфизмов риманова многообразия обслуживают те ситуации, в которых изучаемые диффеоморфизмы имеют ограниченную производную, что является для ряда вопросов, вызывающих реальный интерес, излишне стеснительным условием. В предлагаемой на этот раз вниманию читателя статье мы ставим своей целью изучение таких пространств дифференцируемых отображений, в которые попадали бы все гладкие отображения без каких бы то ни было условий ограниченности. Точнее говоря, мы рассматриваем здесь серию пространств гладких отображений риманова многообразия в себя, обладающих тем свойством, что всякое гладкое отображение риманова многообразия в себя является точкой по крайней мере одного из пространств этой серии.

§ 1. Пусть (V, δ) — связное n-мерное риманово многообразие. Здесь V — дифференцируемое многообразие класса C^2, $\delta = \delta(\cdot, \cdot)$ — риманова метрика класса C^1 на V.

1. Напомним некоторые определения и обозначения. Кусочно-гладким путем, идущим из z в y, называется кусочно-гладкое отображение отрезка $[0, 1]$ в многообразие V, значение которого в точке 0 равно z, а в точке 1 равно y. Длина пути u определяется формулой

$$s(u)=\int_0^1 [\delta(\dot{u}_t, \dot{u}_t)]^{1/2}\,\mathrm{d}t; \tag{1}$$

через u_t обозначается значение отображения u в точке t, через $\dot{u}_t$ — его производная в точке t. Расстояние между точками $y \in V$, $z \in V$ определяется как точная нижняя грань длин кусочно-гладких путей, идущих из точки z в точку y:

$$\rho(y, z) = \inf_{u\in G(y, z)} s(u). \tag{2}$$

Здесь и далее через $G(y, z)$ обозначается множество всех кусочно-гладких путей, идущих из z в y.

2. Определение 1. Обозначим через $\mathfrak{S}$ множество всех непрерывно дифференцируемых отображений дифференцируемого многообразия V в себя. Для всякого $j \in \mathfrak{S}$ обозначим через $\mathfrak{S}_j$ множество всех непрерывно дифференцируемых отображений $f\colon V \to V$, удовлетворяющих неравенству

$$\sup_{x\in V}\ \inf_{u\in G(fx,\, jx)} \{s(u) + \| \varphi_u \mathrm{d}j_x - \mathrm{d}f_x \|\} < +\infty. \tag{3}$$

Поясним использованные в определении 1 обозначения, тем более, что они будут неоднократно применяться в дальнейшем изложении. Через φ_u обозначается параллельный перенос вдоль пути u. Как известно, φ_u есть изоморфизм касательного пространства в начальной точке пути на касательное пространство в его конечной точке;

оба пространства рассматриваются как евклидовы пространства, скалярное произведение на которых задается римановой метрикой δ, и под изоморфизмом здесь понимается изоморфизм евклидовых пространств. Через $\mathrm{d}g_x$ обозначается производная дифференцируемого отображения $g\colon V \to V$ в точке x. Норма линейного отображения касательного пространства в касательное пространство определяется стандартным образом — как супремум нормы образа нормированного вектора; при этом нормы в касательных пространствах берутся те самые, которые индуцированы римановой метрикой δ.

Теперь, когда разъяснение смысла обозначений, примененных в формуле (3), закончено, перейдем к изучению множеств $\mathfrak{S}_j$. В следующем пункте мы определим расстояние на $\mathfrak{S}_j$. Точнее говоря, при всяком $j \in \mathfrak{S}$ мы определим некоторое отображение $\mathfrak{S}_j \times \mathfrak{S}_j \to \overline{\mathbf{R}}$ (через $\overline{\mathbf{R}}$ обозначается расширенная действительная прямая: $\overline{\mathbf{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$), а позже докажем, что это отображение есть расстояние на $\mathfrak{S}_j$.

3. Определение 2. Для всякого $j \in \mathfrak{S}$ определим отображение $\tilde{\mathfrak{d}}_j\colon \mathfrak{S}_j \times \mathfrak{S}_j \to \overline{\mathbf{R}}$ формулой

$$\tilde{\mathfrak{d}}_j(f,\ g) = \sup_{x \in V} \inf_{u \in G(fx,\ gx)} \{s(u) + \| \varphi_u \mathrm{d}g_x - \mathrm{d}f_x \|\}. \qquad (4)$$

4. ТЕОРЕМА 1. *Для всякого $j \in \mathfrak{S}$ отображение $\tilde{\mathfrak{d}}_j$ есть расстояние на множестве $\mathfrak{S}_j$.*

5. Доказательство этой теоремы будет дано в § 5 после того, как будут изложены некоторые вспомогательные построения.

В следующих пунктах этого параграфа мы приведем еще два определения и сформулируем еще одну теорему. В этих определениях и теореме речь пойдет о дифференцируемых отображениях с невырожденной производной. Локально, но не всегда глобально, такие отображения являются диффеоморфизмами (в силу теоремы об обратном отображении — частного случая теоремы о неявной функции). Одним из простейших примеров такого рода отображений является преобразование $z \mapsto z^k$ единичной окружности $\{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ в комплексной плоскости, где k — целое число, отличное от нуля.

6. Обозначим через $\mathfrak{S}^*$ множество всех тех непрерывно дифференцируемых отображений $f\colon V \to V$, у которых производная в каждой точке невырождена. Иными словами, $f \in \mathfrak{S}$ принадлежит множеству $\mathfrak{S}^*$ в том и только в том случае, если ядро его производной тождественно равно нулю: $\operatorname{Ker} \mathrm{d}f_x = \{0_x\}$ для всякого $x \in V$. Здесь через 0_x обозначается нулевой вектор касательного пространства в точке x, а ядро линейного отображения определяется стандартным образом — как полный прообраз нулевого вектора.

7. Определение 3. Для всякого $j \in \mathfrak{S}^*$ обозначим через $\mathfrak{S}_j^*$ множество всех $f \in \mathfrak{S}^*$, удовлетворяющих неравенству

$$\sup_{x \in V} \inf_{u \in G(fx,\, jx)} \{s(u) + \| \varphi_u \mathrm{d}j_x - \mathrm{d}f_x \| + \| (\varphi_u \mathrm{d}j_x)^{-1} - (\mathrm{d}f_x)^{-1} \|\} < +\infty. \qquad (5)$$

8. Определение 4. Для всякого $j \in \mathfrak{S}^*$ определим отображение $\mathfrak{d}_j\colon \mathfrak{S}_j^* \times \mathfrak{S}_j^* \to \overline{\mathbf{R}}$ формулой

$$\mathfrak{d}_j(f,\ g) = \sup_{x \in V} \inf_{u \in G(fx,\, gx)} \{s(u) + \| \varphi_u \mathrm{d}g_x - \mathrm{d}f_x \| + \| (\varphi_u \mathrm{d}g_x)^{-1} - (\mathrm{d}f_x)^{-1} \|\}. \qquad (6)$$

9. ТЕОРЕМА 2. *Для всякого $j \in \mathfrak{S}^*$ отображение $\mathfrak{d}_j$ есть расстояние на множестве $\mathfrak{S}_j^*$.*

Доказательство теоремы 2 также удобно несколько отложить. Ему будет предпослан вспомогательный материал, который даст возможность выявить общие черты в доказательствах теорем 1 и 2 и расчленить эти доказательства с целью сделать их более прозрачными.

§ 2. 1. *Струей первого порядка* (1-струей), вытекающей из точки x многообразия V, будем называть пару $(y,\ L)$, где y — точка многообразия V, а L — линейное отображение касательного пространства в точке x в касательное пространство в точке y. Множество всех 1-струй, вытекающих из точки x, т. е. множество всех пар $(y,\ L)$, где $y \in V$, $L \in \operatorname{Hom}(T_x V,\ T_y V)$, будем обозначать через $J_x V$.

Обычно 1-струя, вытекающая из точки x, определяется несколько иначе — как класс эквивалентности дифференцируемых отображений по отношению эквивалентности, которое можно описать так: два дифференцируемых отображения $V \to V$ эквивалентны, если они отображают точку x в одну и ту же точку и их производные (первого порядка) в точке x равны. Определение, приведенное выше, хотя и отличается от этого определения, но согласуется с ним. Чтобы согласовать между собой эти два определения, достаточно заметить следующее. Для всяких точек x, y многообразия V и всякого линейного отображения L касательного пространства в точке x в касательное пространство в точке y найдется дифференцируемое отображение $V \to V$, принимающее в точке x значение y и имеющее в точке x производную, равную L. Поэтому отображение, ставящее в соответствие каждому классу эквивалентности дифференцируемых отображений (по указанному выше отношению эквивалентности) пару (y, L), где y — образ точки x при всяком отображении, являющемся представителем этого класса, а L — производная любого представителя этого класса, взятая в точке x, является биекцией множества 1-струй, вытекающих из точки x (понимаемых как классы эквивалентности дифференцируемых отображений), на множество J_xV, определенное в начале этого пункта. Эта биекция и устанавливает то согласование двух определений, о котором было упомянуто.

2. Определение 5. Для всякого $x \in V$ определим отображение ρ_x: $J_xV \times J_xV \to \overline{\mathbf{R}}$ формулой

$$\rho_x((y, L), (z, M)) = \inf_{u \in G(y,z)} \{s(u) + \| \varphi_u M - L \| \}. \tag{7}$$

Пояснения. Напомним, что через $G(y, z)$ обозначается множество всех кусочно-гладких путей, идущих из z в y. Напомним также, что $s(u)$ — длина пути u и что φ_u — параллельный перенос вдоль пути u; для $u \in G(y, z)$ — это линейное отображение $T_zV \to T_yV$. Для всяких $(y, L) \in J_xV$, $(z, M) \in J_xV$, $u \in G(y, z)$ произведение $\varphi_u M$ линейных отображений M: $T_xV \to T_zV$, φ_u: $T_zV \to T_yV$ есть линейное отображение $T_xV \to T_yV$; а поскольку L тоже есть линейное отображение $T_xV \to T_yV$, то разность $\varphi_u M - L$ определена и является линейным отображением $T_xV \to T_yV$. Норма линейного отображения определяется как супремум нормы образа нормированного вектора (нормы на касательных пространствах индуцированы римановой метрикой δ).

3. Предложение 1. *Для всякого $x \in V$ отображение ρ_x есть расстояние на множестве J_xV.*

Доказательство этого предложения см. [1, предложение 3].

4. *Невырожденной* 1-*струей*, вытекающей из точки $x \in V$, будем называть 1-струю $(y, L) \in J_xV$, у которой линейное отображение L имеет нулевое ядро и потому является изоморфизмом векторного пространства T_xV на

векторное пространство T_yV; последнее вытекает из того, что многообразие V, а с ним и всякое его касательное пространство имеют конечную размерность n. Множество всех невырожденных 1-струй, вытекающих из точки x, будем обозначать через J_x^*V.

5. Определение 6. Для всякого $x \in V$ определим отображение ρ_x^*: $J_x^*V \times J_x^*V \to \overline{\mathbf{R}}$ формулой

$$\rho_x^*((y, L), (z, M)) = \\ = \inf_{u \in G(y, z)} \{s(u) + \| \varphi_u M - L \| + \| (\varphi_u M)^{-1} - L^{-1} \|\}. \quad (8)$$

Пояснения. Напомним, что для всякого $x \in V$, для всякой невырожденной 1-струи (y, L), вытекающей из точки x, отображение L^{-1}: $T_yV \to T_xV$ существует (см. п. 4). Напомним также, что для всяких точек $y \in V$, $z \in V$, для всякого пути $u \in G(y, z)$ отображение φ_u: $T_zV \to T_yV$ (параллельный перенос вдоль пути u) имеет обратное φ_u^{-1}: $T_yV \to T_zV$ (более того, φ_u — изоморфизм евклидовых пространств). Поэтому для всяких

$$(y, L) \in J_x^*V, (z, M) \in J_x^*V, u \in G(y, z)$$

существуют линейные отображения L^{-1}: $T_yV \to T_xV$ и $(\varphi_u M)^{-1} = M^{-1}\varphi_u^{-1} : T_yV \to T_xV$; их разность есть линейное отображение $(\varphi_u M)^{-1} - L^{-1}$: $T_yV \to T_xV$. Норма линейного отображения $T_yV \to T_xV$, как уже пояснялось выше, есть по определению точная верхняя грань нормы образа нормированного вектора.

6. Предложение 2. *Для всякого $x \in V$ отображение ρ_x^* есть расстояние не множестве J_x^*V.*

Доказательство этого предложения получается из доказательства предложения 1 заменой ρ_x на ρ_x^* и каждого выражения вида $\| \varphi_s P - Q \|$ выражением $\| \varphi_s P - Q \| + \| (\varphi_s P)^{-1} - Q^{-1} \|$.

§ 3. 1. *Абстрактным расслоением* называется тройка $(\mathscr{E}, p, \mathscr{B})$, где $\mathscr{E}$ и $\mathscr{B}$ — некоторые множества, а p — отображение множества $\mathscr{E}$ на множество $\mathscr{B}$. Слово «абстрактное» предпослано слову «расслоение» с целью указать на отсутствие топологии или какой-либо иной структуры на множествах $\mathscr{E}$ и $\mathscr{B}$. Соответственно этому и от проекции не требуется ничего, кроме того, что она есть отображение множества $\mathscr{E}$ на множество $\mathscr{B}$.

Сечением абстрактного расслоения $(\mathscr{E}, p, \mathscr{B})$ называется отображение $\sigma\colon \mathscr{B} \to \mathscr{E}$ такое, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{E} \arrow[dr, "p"] & \\ \mathscr{B} \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[rr, "1_{\mathscr{B}}"'] & & \mathscr{B} \end{tikzcd}$$

коммутативна. Множество всех сечений абстрактного расслоения $(\mathscr{E}, p, \mathscr{B})$ обозначим через $\Sigma(\mathscr{E}, p, \mathscr{B})$.

2. *Метрическим абстрактным расслоением* называется пара $((\mathscr{E}, p, \mathscr{B}), \rho)$, где $(\mathscr{E}, p, \mathscr{B})$ — абстрактное расслоение, а ρ — отображение, которое каждому $b \in \mathscr{B}$ ставит в соответствие расстояние $\rho_b = \rho_b(\cdot, \cdot)$ на слое $p^{-1}(b)$.

Пусть дано сечение $\sigma \in \Sigma(\mathscr{E}, p, \mathscr{B})$. Через $\Sigma_\sigma(\rho)$ обозначим множество всех сечений $\tau \in \Sigma(\mathscr{E}, p, \mathscr{B})$, удовлетворяющих неравенству

$$\sup_{b\in\mathscr{B}} \rho_b(\tau b, \sigma b) < +\infty. \tag{9}$$

3. Определение 7. Пусть дано метрическое абстрактное расслоение $((\mathscr{E}, p, \mathscr{B}), \rho)$. Для каждого $\sigma \in \Sigma(\mathscr{E}, p, \mathscr{B})$ определим отображение $\mathrm{dist}_\sigma\colon \Sigma_\sigma(\rho) \times \Sigma_\sigma(\rho) \to \overline{\mathbf{R}}$ формулой

$$\mathrm{dist}_\sigma(\tau, \upsilon) = \sup_{b\in\mathscr{B}} \rho_b(\tau b, \upsilon b). \tag{10}$$

4. Предложение 3. *Для всякого* $\sigma \in \Sigma(\mathscr{E}, p, \mathscr{B})$ *отображение* dist_σ *есть расстояние на множестве* $\Sigma_\sigma(\rho)$.

Доказательство. Пусть дано $\sigma \in \Sigma(\mathscr{E}, p, \mathscr{B})$.

1) Пусть даны $\tau \in \Sigma_\sigma(\rho)$, $\upsilon \in \Sigma_\sigma(\rho)$. Тогда

$$\sup_{b\in\mathscr{B}} \rho_b(\tau b, \sigma b) < +\infty, \tag{11}$$

$$\sup_{b\in\mathscr{B}} \rho_b(\upsilon b, \sigma b) < +\infty. \tag{12}$$

В силу определения 7 имеем

$$\mathrm{dist}_\sigma(\tau, \upsilon) = \sup_{b\in\mathscr{B}} \rho_b(\tau b, \upsilon b) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{b\in\mathscr{B}} (\rho_b(\tau b, \sigma b) + \rho_b(\sigma b, \upsilon b)) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{b\in\mathscr{B}} \rho_b(\tau b, \sigma b) + \sup_{b\in\mathscr{B}} \rho_b(\sigma b, \upsilon b).$$

Правая часть последнего неравенства меньше $+\infty$ вследствие неравенств (11), (12). Поэтому $\mathrm{dist}_\sigma(\tau, \upsilon) < +\infty$.

2) Так как при всяком $b \in \mathscr{B}$ отображение $\rho_b(\cdot, \cdot)$ есть расстояние на $p^{-1}(b)$ и, следовательно, все его значения неотрицательны, то из определения 7 вытекает, что все значения отображения dist_σ неотрицательны.

3) Соединив результаты пунктов 1) и 2), получаем, что dist_σ, первоначально определенное как отображение $\Sigma_\sigma(\rho) \times \Sigma_\sigma(\rho) \to \overline{\mathbf{R}}$, в действительности является отображением $\Sigma_\sigma(\rho) \times \Sigma_\sigma(\rho) \to \mathbf{R}^+$.

4) Для всякого $\tau \in \Sigma_\sigma(\rho)$ имеет место следующая цепочка, первое равенство в которой следует из определения 7, а второе — из того, что $\rho_b(\cdot, \cdot)$ — расстояние на $p^{-1}(b)$ и потому $\rho_b(c, c) = 0$ для всякого $c \in p^{-1}(b)$:

$$\mathrm{dist}_\sigma(\tau, \tau) = \sup_{b \in \mathscr{B}} \rho_b(\tau b, \tau b) = 0.$$

5) Пусть даны $\tau \in \Sigma_\sigma(\rho)$, $\upsilon \in \Sigma_\sigma(\rho)$, для которых $\mathrm{dist}_\sigma(\tau, \upsilon) = 0$. В силу определения 7 это значит, что

$$\sup_{b \in \mathscr{B}} \rho_b(\tau b, \upsilon b) = 0,$$

откуда $\rho_b(\tau b, \upsilon b) \leqslant 0$ для всякого $b \in \mathscr{B}$. А так как $\rho_b(\cdot, \cdot)$ — расстояние, то отсюда следует, что $\tau b = \upsilon b$ для всякого $b \in \mathscr{B}$, т. е. $\tau = \upsilon$.

6) Пусть даны $\tau \in \Sigma_\sigma(\rho)$, $\upsilon \in \Sigma_\sigma(\rho)$. Из определения 7 следуют равенства

$$\mathrm{dist}_\sigma(\tau, \upsilon) = \sup_{b \in \mathscr{B}} \rho_b(\tau b, \upsilon b),$$

$$\mathrm{dist}_\sigma(\upsilon, \tau) = \sup_{b \in \mathscr{B}} \rho_b(\upsilon b, \tau b),$$

правые части которых равны между собой, поскольку функция $\rho_b(\cdot, \cdot)$, будучи расстоянием, симметрична.

7) Пусть даны $\tau \in \Sigma_\sigma(\rho)$, $\upsilon \in \Sigma_\sigma(\rho)$, $\omega \in \Sigma_\sigma(\rho)$. При всяком $b \in \mathscr{B}$ из неравенства треугольника для расстояния $\rho_b(\cdot, \cdot)$ на $p^{-1}(b)$ имеем

$$\rho_b(\tau b, \upsilon b) \leqslant \rho_b(\tau b, \omega b) + \rho_b(\omega b, \upsilon b).$$

Отсюда следует цепочка неравенств

$$\sup_{b \in \mathscr{B}} \rho_b(\tau b, \upsilon b) \leqslant \sup_{b \in \mathscr{B}} (\rho_b(\tau b, \omega b) + \rho_b(\omega b, \upsilon b)) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{b \in \mathscr{B}} \rho_b(\tau b, \omega b) + \sup_{b \in \mathscr{B}} \rho_b(\omega b, \upsilon b).$$

Левая часть первого неравенства этой цепочки в силу опеделения 7 равна $\mathrm{dist}_\sigma(\tau, \upsilon)$, а слагаемые в правой части последнего неравенства этой цепочки в силу того же определения 7 равны соответственно $\mathrm{dist}_\sigma(\tau, \omega)$ и $\mathrm{dist}_\sigma(\omega, \upsilon)$. Поэтому

$$\mathrm{dist}_\sigma(\tau, \upsilon) \leqslant \mathrm{dist}_\sigma(\tau, \omega) + \mathrm{dist}_\sigma(\omega, \upsilon).$$

Предложение доказано.

§ **4. 1.** Обозначив через $\mathscr{E}$ множество всех 1-струй на многообразии V, т. е. положив

$$\mathscr{E} = \bigcup_{x \in V} J_x V,$$

обозначив V через $\mathscr{B}$ и положив $p(y, L) = x$ для всяких $x \in V$, $(y, L) \in J_x V$, мы получаем абстрактное расслоение $(\mathscr{E}, p, \mathscr{B})$.

2. Из этого определения следует, что слоем $p^{-1}(x)$ над точкой $x \in V$ является $J_x V$, т. е. множество всех 1-струй в многообразии V, вытекающих из точки x. Поэтому сечение τ построенного абстрактного расслоения $(\mathscr{E}, p, \mathscr{B})$ есть нечто иное, как отображение, которое каждой точке $x \in V$ ставит в соответствие некоторую 1-струю, вытекающую из этой точки:

$$\tau x = (y(\tau, x), L_{\tau, x}),$$

где $y(\tau, x) \in V$, а $L_{\tau, x} \in \mathrm{Hom}(T_x V, T_{y(\tau, x)} V)$. Таково описание множества $\Sigma(\mathscr{E}, p, \mathscr{B})$ всех сечений абстрактного расслоения, построенного в п. 1.

3. Для всякого непрерывно дифференцируемого отображения $f\colon V \to V$, т. е. для всякого $f \in \mathfrak{S}$, через $\mathrm{jet}\, f$ обозначается одноструйное расширение отображения f, т. е. отображение, которое всякую точку $x \in V$ преобразует в 1-струю $(fx, \mathrm{d}f_x)$, где $\mathrm{d}f_x$ — производная отображения f в точке x. Тем самым определено отображение jet множества $\mathfrak{S}$ в множество $\Sigma(\mathscr{E}, p, \mathscr{B})$ сечений абстрактного расслоения $(\mathscr{E}, p, \mathscr{B})$, определенного в п. 1:

$$(\mathrm{jet}\, f)\, x = (fx, \mathrm{d}f_x)$$

для всякого $x \in V$. В обозначениях предыдущего пункта это выглядит так:

$$y(\mathrm{jet}\, f, x) = fx, \tag{13}$$

$$L_{\mathrm{jet}\, f, x} = \mathrm{d}f_x. \tag{14}$$

4. Если $(\mathrm{jet}\, g)\, x = (\mathrm{jet}\, f)\, x$ при всяком $x \in V$, то $fx = gx$ при всяком $x \in V$, т. е. отображения f и g совпадают. Поэтому отображение jet есть инъекция множества $\mathfrak{S}$ в множество $\Sigma(\mathscr{E}, p, \mathscr{B})$.

§ 5. Доказательство теоремы 1. 1) В силу предложения 1 для всякого $x \in V$ отображение ρ_x: $J_x V \times J_x V \to \overline{\mathbf{R}}$, определенное формулой (7), есть расстояние на $J_x V$. Множество $\Sigma(\mathscr{E}, p, \mathscr{B})$ всех сечений абстрактного расслоения $(\mathscr{E}, p, \mathscr{B})$, построенного в п. 1, описано в п. 2. Напомним, что для всякого $\sigma \in \Sigma(\mathscr{E}, p, \mathscr{B})$ через $\Sigma_\sigma(\rho)$ обозначается множество сечений τ метрического абстрактного расслоения $((\mathscr{E}, p, \mathscr{B}), \rho)$, удовлетворяющих неравенству (9). В ситуации, рассматриваемой сейчас, когда ρ_x определено формулой (7), $\Sigma_\sigma(\rho)$ для всякого $\sigma \in \Sigma(\mathscr{E}, p, \mathscr{B})$ есть множество всех отображений

$$\tau\colon V \to \bigcup_{x \in V} J_x V$$

таких, что

$$\tau x = (y(\tau, x), L_{\tau, x}),$$

где $y(\tau, x) \in V$, $L_{\tau, x} \in \mathrm{Hom}(T_x V, T_{y(\tau, x)} V)$, удовлетворяющих неравенству

$$\sup_{x \in V} \inf_{u \in G(y(\tau, x),\, y(\sigma, x))} \{s(u) + \| \varphi_u L_{\sigma, x} - L_{\tau, x} \|\} < +\infty. \tag{15}$$

2) Пусть дано $j \in \mathfrak{S}$. С помощью (13), (14) формула (15) для $\sigma = \mathrm{jet}\, j$, $\tau = \mathrm{jet}\, f$, где f — любой элемент множества $\mathfrak{S}$, записывается в виде неравенства

$$\sup_{x \in V} \inf_{u \in G(fx, jx)} \{s(u) + \| \varphi_u dj_x - df_x \|\} < +\infty. \tag{16}$$

Поэтому множество тех $f \in \mathfrak{S}$, для которых $\mathrm{jet}\, f \in \Sigma_{\mathrm{jet}\, j}(\rho)$, есть множество тех $f \in \mathfrak{S}$, которые удовлетворяют неравенству (16). А это есть ни что иное, как множество $\mathfrak{S}_j$, введенное в определении 1. Отсюда следует включение

$$\mathrm{jet}\, \mathfrak{S}_j \subset \Sigma_{\mathrm{jet}\, j}(\rho).$$

3) В силу предложения 3 для всякого $\sigma \in \Sigma(\mathscr{E}, p, \mathscr{B})$ отображение dist_σ: $\Sigma_\sigma(\rho) \times \Sigma_\sigma(\rho) \to \overline{\mathbf{R}}$, определенное формулой (10), есть расстояние на множестве $\Sigma_\sigma(\rho)$. Формула (10) выглядит теперь (когда ρ_x определено формулой (7)) так:

$$\mathrm{dist}_\sigma(\tau, \upsilon) = \sup_{x \in V} \inf_{u \in G(y(\tau, x),\, y(\upsilon, x))} \{s(u) + \| \varphi_u L_{\upsilon, x} - L_{\tau, x} \|\}.$$

Положив в только что доказанном утверждении $\sigma = \mathrm{jet}\, j$, получаем, что отображение $\mathrm{dist}_{\mathrm{jet}\, j}\colon \Sigma_{\mathrm{jet}\, j}(\rho) \times \Sigma_{\mathrm{jet}\, j}(\rho) \to \overline{\mathbf{R}}$, определенное формулой

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{jet}\, j}(\tau, \upsilon) = \sup_{x \in V} \inf_{u \in G(y(\tau, x),\, y(\upsilon, x))} \{s(u) + \| \varphi_u L_{\upsilon;\, x} - L_{\tau,\, x} \|\}, \tag{17}$$

является расстоянием на $\Sigma_{\mathrm{jet}\, j}(\rho)$.

4) Пусть даны $f \in \mathfrak{S}_j$, $g \in \mathfrak{S}_j$. Положив $\tau = \mathrm{jet}\, f$, $\upsilon = \mathrm{jet}\, g$ в формуле (17) и используя (13), (14), получаем формулу

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{jet}\, j}(\mathrm{jet}\, f, \mathrm{jet}\, g) = \sup_{x \in V} \inf_{u \in G(fx,\, gx)} \{s(u) + \| \varphi_u dg_x - df_x \|\}. \tag{18}$$

Правые части равенств (18) и (4) совпадают, следовательно, совпадают и левые:

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{jet}\, j}(\mathrm{jet}\, f, \mathrm{jet}\, g) = \tilde{\mathfrak{d}}_j(f, g).$$

Выше мы доказали, что $\mathrm{dist}_{\mathrm{jet}\, j}$ есть расстояние на $\Sigma_{\mathrm{jet}\, j}(\rho) \supset \mathrm{jet}\, \mathfrak{S}_j$. Отображение jet есть инъекция множества $\mathfrak{S} \supset \mathfrak{S}_j$ в множество $\Sigma(\mathscr{E}, p, \mathscr{B})$ (см. п. 4, § 4). Следовательно, отображение $\tilde{\mathfrak{d}}_j\colon \mathfrak{S}_j \times \mathfrak{S}_j \to \overline{\mathbf{R}}$ есть расстояние на множестве $\mathfrak{S}_j$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2 получается из доказательства теоремы 1 заменой ρ_x на ρ_x^*, J_xV на J_x^*V, $\mathfrak{S}$ на $\mathfrak{S}^*$, $\mathfrak{S}_j$ на $\mathfrak{S}_j^*$, $\tilde{\mathfrak{d}}_j$ на $\mathfrak{d}_j$, всякого выражения вида $\| \varphi_u M - L \|$ на выражение $\| \varphi_u M - L \| + \| (\varphi_u M)^{-1} - L^{-1} \|$ и ссылки на предложение 1 ссылкой на предложение 2. Все указаные замены должны быть сделаны всюду, где встречаются указанные выражения. Теорема доказана.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
09.04.85

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Миллионщиков В. М. О некоторых метрических пространствах диффеоморфизмов.— Математические заметки, 1985, т. 37, вып. 4, с. 561—579.