В. Г. Кротов, М. А. Прохорович, Функции из пространств Соболева и Бесова с максимальной размерностью Хаусдорфа исключительного множества Лебега, *Фундамент. и прикл. матем.*, 2013, том 18, выпуск 5, 145–153

Функции из пространств Соболева и Бесова с максимальной размерностью Хаусдорфа исключительного множества Лебега*

В. Г. КРОТОВ
Белорусский государственный университет
e-mail: krotov@bsu.by

М. А. ПРОХОРОВИЧ
Белорусский государственный университет
e-mail: prokhorovich@bsu.by

УДК 517.518.2

Ключевые слова: точки Лебега, классы Соболева, классы Бесова, размерность Хаусдорфа.

Аннотация

В работе доказано, что для $p > 1$ и $0 < \alpha < n/p$ существует функция из класса бесселевых потенциалов $J_\alpha\big(L^p(\mathbb{R}^n)\big)$, размерность Хаусдорфа исключительного множества Лебега которой равна $n-\alpha p$. Показано также, что такая функция может быть выбрана в классе Бесова $B^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ с любым $q > 0$.

Abstract

V. G. Krotov, M. A. Prokhorovich, Functions from Sobolev and Besov spaces with maximal Hausdorff dimension of the exceptional Lebesgue set, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 5, pp. 145—153.

We prove that for $p > 1$ and $0 < \alpha < n/p$ there exists a function from the Bessel potentials class $J_\alpha\big(L^p(\mathbb{R}^n)\big)$ such that the Hausdorff dimension of its exceptional Lebesgue set is $n - \alpha p$. We also show that such a function may be taken from the Besov class $B^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ with any $q > 0$.

1. Основные определения

1.1. Точки Лебега

Пусть μ — мера Лебега на $\mathbb{R}^n$ и $L^p(\mathbb{R}^n)$ — обычные лебеговы пространства, порождённые этой мерой. Для функции $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ обозначаем через $\Lambda(f)$ дополнение множества тех точек $x \in \mathbb{R}^n$, в которых существует предел

$$\lim_{r\to+0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} f\,d\mu. \tag{1}$$

*Работа второго автора выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф13М-036).

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 5, с. 145—153.

Здесь $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < r\}$ — евклидов шар с центром в точке x радиуса $r > 0$.

Точки, в которых существует предел (1), часто называют точками Лебега функции f. В таких точках функция имеет естественные значения, не зависящие от её переопределения на множествах меры нуль. Множество $\Lambda(f)$ будем называть исключительным множеством Лебега функции f.

Если $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, то $\mu\big(\Lambda(f)\big) = 0$. Это утверждение является классическим и известно как теорема Лебега.

Для регулярных функций можно получить более сильный результат (см. теорему 1 ниже). В этой работе мы построим функцию из класса бесселевых потенциалов (или из класса Бесова), которая имеет максимальные размеры исключительного множества Лебега. Для оценок размеров множеств используются бесселевы ёмкости и размерность Хаусдорфа. Все необходимые определения и детали приведены ниже.

Отметим, что функции из $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ определены лишь μ-почти всюду, а их свойства, с которыми мы будем иметь дело ниже, зависят от изменения значений функции на множествах μ-меры нуль, поэтому мы считаем, что значения всех локально суммируемых функций в каждой точке определяются равенством

$$f(x) = \varlimsup_{r\to+0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} f\, d\mu.$$

1.2. Классы бесселевых потенциалов

Для $l \in \mathbb{N}$ и $1 < p \leqslant \infty$ пространство Соболева $W^p_l(\mathbb{R}^n)$ определяется как множество функций $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, для которых все частные производные (в смысле теории распределений)

$$D^\nu f = \frac{\partial^{\nu_1+\ldots+\nu_n} f}{\partial x_1^{\nu_1}\partial x_2^{\nu_2}\ldots\partial x_n^{\nu_n}}$$

порядка $|\nu| = \nu_1 + \ldots + \nu_n \leqslant l$ принадлежат $L^p(\mathbb{R}^n)$. Норма в $W^p_l(\mathbb{R}^n)$ вводится следующим образом:

$$\|f\|_{W^p_l} = \sum_{|\nu|\leqslant l} \|D^\nu\|_{L^p}.$$

Одним из распространённых способов определения пространств Соболева $W^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$ для любых $\alpha > 0$ является использование потенциалов Бесселя

$$J_\alpha g(x) = g * G_\alpha(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_\alpha(x-y) g(y)\, dy,$$

где ядро Бесселя G_α определяется равенством

$$G_\alpha(x) = c_\alpha \int\limits_0^\infty e^{-|x|^2/t - t/4} t^{(\alpha-n)/2}\, \frac{dt}{t},$$

а постоянная c_α выбирается так, чтобы выполнялось равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_\alpha(x)\,dx = 1.$$

Для $\alpha > 0$ и $p > 1$ пространства бесселевых потенциалов определяются как $J_\alpha\bigl(L^p(\mathbb{R}^n)\bigr)$ с нормировкой

$$\|f\|_{J_\alpha(L^p(\mathbb{R}^n))} = \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

если $f = J_\alpha g$, где $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

В случае целых $\alpha = l \in \mathbb{N}$ классы $J_l\bigl(L^p(\mathbb{R}^n)\bigr)$ совпадают с пространствами Соболева $W_l^p(\mathbb{R}^n)$ и нормы в этих пространствах эквивалентны [5] (см. также [3, п. 1.2.6; 2, § 5.3, теорема 3]).

Классы $J_\alpha\bigl(L^p(\mathbb{R}^n)\bigr)$ порождают ёмкости

$$\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E) = \inf\{\|g\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \colon g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ G_\alpha * g \geqslant 1 \text{ в окрестности } E\}.$$

Здесь $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ — класс Шварца быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^n$.

Напомним определение s-меры Хаусдорфа $\mathbb{H}^s(E)$ и хаусдорфовой размерности $\dim_{\mathbb{H}}(E)$ множества $E \subset \mathbb{R}^n$ (см., например, [1, § 2.10]):

$$\mathbb{H}^s_\delta(E) = \inf\biggl\{\sum_{i=1}^\infty r_i^s \colon E \subset \bigcup_{i=1}^\infty B(x_i, r_i),\ r_i < \delta\biggr\}, \quad \mathbb{H}^s(E) = \lim_{\delta\to+0} \mathbb{H}^s_\delta(E),$$

$$\dim_{\mathbb{H}}(E) = \inf\{s \colon \mathbb{H}^s(E) = 0\} = \sup\{s \colon \mathbb{H}^s(E) = \infty\}.$$

Следующее утверждение показывает связь между бесселевыми ёмкостями $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}$ и размерностью Хаусдорфа множества $E \subset \mathbb{R}^n$ (см., например, [3, п. 5.1]): если $\alpha p < n$, то

$$\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E) = 0 \Longrightarrow \dim_{\mathbb{H}}(E) \leqslant n - \alpha p. \tag{2}$$

2. Оценки множеств $\Lambda(f)$

Оценкам исключительного множества Лебега $\Lambda(f)$ для функций из $J_\alpha\bigl(L^p(\mathbb{R}^n)\bigr)$ было посвящены работы [8] (случай $\alpha = 1$), [4], [6] и [11]. Мы приведём результирующее утверждение, следуя [3, п. 6.2].

Теорема 1. *Пусть $p > 1$, $\alpha > 0$, $\alpha p < n$ и $f \in J_\alpha\bigl(L^p(\mathbb{R}^n)\bigr)$. Тогда существует такое множество $E \subset \mathbb{R}^n$, $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E) = 0$, что при всех $x \notin E$ существует предел*

$$\lim_{r\to+0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} f\,d\mu = f^*(x)$$

(т. е. $\Lambda(f) \subset E$) и

$$\lim_{r\to+0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} |f - f^*(x)|^q\,d\mu = 0, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}.$$

В частности,

$$\operatorname{Cap}_{\alpha,p}\big(\Lambda(f)\big)=0,\quad \dim_{\mathbb{H}}\big(\Lambda(f)\big)\leqslant n-\alpha p.$$

Следующее утверждение показывает, что теорема 1 является точной.

Теорема 2. *Если $1<p<n/\alpha$, то существует функция $f_0\in J_\alpha\big(L^p(\mathbb{R}^n)\big)$, для которой*

1) $\dim_{\mathbb{H}}\big(\Lambda(f_0)\big)=n-\alpha p$;
2) $\operatorname{Cap}_{\beta,r}\big(\Lambda(f_0)\big)>0$ *для любой пары* $\beta>0$, $r>1$ *с* $\beta r>\alpha p$.

Теорема 2 будет выведена из теоремы 3, утверждающей, что существует функция f_0 со свойствами 1) и 2) в более узком классе. Чтобы сформулировать результат, нам понадобится определение пространств Бесова $B^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Для них имеется много различных описаний (см. [12, 13]). Мы приводим определение, использующее разностные операторы

$$\Delta_h^M f(x)=\sum_{j=0}^{M}(-1)^{M-j}C_M^j f(x+jh),\quad M\in\mathbb{N},$$

где C_M^j — биномиальные коэффициенты.

Классы Бесова $B^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$, $0<q<\infty$, $\alpha>0$, состоят из функций $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, для которых

$$\|f\|_{B^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n)}=\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}+\Bigg(\int\limits_{|h|<1}|h|^{-\alpha q}\|\Delta_h^M f\|^q_{L^p(\mathbb{R}^n)}\frac{dh}{|h|^n}\Bigg)^{1/q}<\infty,\tag{3}$$

где $M>\alpha$ (см., например, [13, п. 2.6.1]).

Теорема 3. *Пусть $1<p<n/\alpha$, $0<q<\infty$. Тогда существует функция $f_0\in B^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, для которой*

1) $\dim_{\mathbb{H}}\big(\Lambda(f_0)\big)=n-\alpha p$;
2) $\operatorname{Cap}_{\beta,r}\big(\Lambda(f_0)\big)>0$ *для любой пары* $\beta>0$, $r>1$ *с* $\beta r>\alpha p$.

Отметим, что при фиксированных α и p справедливы включения

$$B^\alpha_{p,q_1}(\mathbb{R}^n)\subset B^\alpha_{p,q_2}(\mathbb{R}^n),\quad 0<q_1<q_2.$$

Поэтому утверждение теоремы 3 тем сильнее, чем меньше q.

Теорема 3 справедлива также для пространств Трибеля—Лизоркина $F^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ (определение см. в [12, п. 2.3.1]), так как имеют место включения

$$B^\alpha_{p,\min(p,q)}(\mathbb{R}^n)\subset F^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n)\subset B^\alpha_{p,\max(p,q)}(\mathbb{R}^n)$$

(см. [13, с. 96]).

Для некоторых пространств соболевского типа утверждения, подобные теореме 2, приведены нами в [10, теорема 2] и [9, теорема 15].

3. Доказательство теорем 2 и 3

3.1. Конструкция множества $C(\beta)$

При доказательствах мы используем однопараметрическую конструкцию множества типа ковра Серпинского. Обозначим

$$C(x^0, r) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \colon |x_j - x_j^0| \leqslant \frac{r}{2},\ j = 1, \ldots, n\right\}$$

куб с центром в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$ с рёбрами длины $r > 0$, $C_0 = C(0, 1)$.

Зафиксируем число $\beta \in (0, 1/2)$ и построим по индукции последовательность множеств $\{C_i(\beta)\}_{i=0}^{\infty}$, начиная с $C_0(\beta) = C_0$. На первом шаге из $C_0(\beta)$ удаляем «крест»

$$K_0(\beta) = \bigcup_{i=1}^{n} S_i(\beta), \quad \text{где} \quad S_i(\beta) = \left\{x \in C_0 \colon |x_j| < \frac{1-2\beta}{2},\ i \neq j = 1, \ldots, n\right\},$$

получая множество

$$C_1(\beta) = C_0(\beta) \setminus K_0(\beta) = \bigcup_{i=1}^{2^n} C_{1,i}(\beta),$$

представленное в виде суммы кубов $C_{1,i}(\beta) \equiv C(x^{1,i}, \beta)$ с центрами в некоторых точках $x^{1,i} \in C_0$ и рёбрами длины β.

Введём обозначение

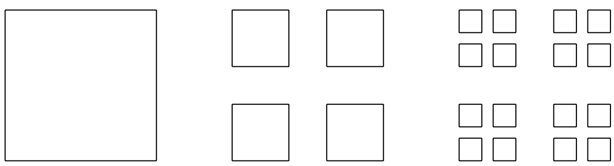
$$K(x^0, \beta) = \beta K_0(\beta) + x^0$$

(это сжатый в $1/\beta$ раз крест $K_0(\beta)$, сдвинутый так, чтобы его центр совпал с x^0) и из каждого куба $C_{1,i}(\beta)$ удалим крест $K(x^{1,i}, \beta)$, получая множество

$$C_2(\beta) = \bigcup_{i=1}^{2^n} \bigl(C_{1,i}(\beta) \setminus K(x^{1,i}, \beta)\bigr) = \bigcup_{i=1}^{2^{2n}} C_{2,i}(\beta),$$

представленное в виде суммы кубов $C_{2,i}(\beta) \equiv C(x^{2,i}, \beta^2)$ с центрами в некоторых точках $x^{2,i} \in C_0$ и рёбрами β^2.

На рисунке представлены множества $C_k(\beta)$ $(k = 0, 1, 2)$ для случая $\mathbb{R}^2$.



Продолжая описанный процесс по индукции, получаем последовательность множеств $\{C_k(\beta)\}_{k=0}^{\infty}$, причём множество $C_k(\beta)$ состоит из 2^{kn} n-мерных кубов

$C_{k,i}(\beta)$ с центрами в некоторых точках $x^{k,i}$ $(i=1,\dots,2^{kn})$, длиной ребра β^k и мерой $\mu\bigl(C_{k,i}(\beta)\bigr)=\beta^{kn}$:

$$C_k(\beta)=\bigcup_{i=1}^{2^{(k-1)n}}\bigl(C_{k-1,i}(\beta)\setminus K(x^{k-1,i},\beta^{k-1})\bigr)=\bigcup_{i=1}^{2^{kn}}C_{k,i}(\beta), \tag{4}$$
$$\mu\bigl(C_{k,i}(\beta)\bigr)=\beta^{kn},\quad \operatorname{diam}\bigl(C_{k,i}(\beta)\bigr)=\sqrt{n}\beta^k,$$
$$C(\beta)=\bigcap_{k=0}^{\infty}C_k(\beta).$$

Обозначения $C(\beta)$, $C_k(\beta)$, $C_{k,i}(\beta)$ и $x^{k,i}$ сохраняют силу до конца статьи.

Хаусдорфова размерность множества $C(\beta)$ вычисляется по формуле

$$\dim_{\mathbb{H}}\bigl(C(\beta)\bigr)=-\frac{n\ln 2}{\ln\beta}, \tag{5}$$

которая вытекает из [7, теорема 9.3].

3.2. Построение функции f_0

Зафиксируем $0<\varepsilon<n-\alpha p$ и построим функцию $f_\varepsilon\in B^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ так, чтобы выполнялось соотношение $\dim_{\mathbb{H}}\bigl(\Lambda(f_\varepsilon)\bigr)>n-\alpha p-\varepsilon$. Для этого обозначим

$$\beta=e^{-n\ln 2/(n-\alpha p-\varepsilon)}$$

и для выбранного β построим множество $C(\beta)$ (см. (4)). Согласно (5) размерность Хаусдорфа множества $C(\beta)$ равна

$$\dim_{\mathbb{H}}\bigl(C(\beta)\bigr)=-\frac{n\ln 2}{\ln\beta}=n-\alpha p-\varepsilon.$$

Найдём числа

$$0<\rho<\frac{1}{2\beta}-1,\quad 0<a<\frac{1}{2M}\left(\frac{1}{2\beta}-1-\rho\right), \tag{6}$$

где M берётся из определения класса Бесова (3), построим неотрицательную функцию $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, такую что $\varphi(x)\geqslant 1$ при $x\in C(0,1)$, $\varphi(x)=0$ при $x\notin C(0,1+\rho)$. Обозначим

$$\varphi^{k,i}(x)=\varphi(\beta^{-k}x-x^{k,i}),\quad \psi_k=\sum_{i=1}^{2^{kn}}\varphi^{k,i},\quad f_\varepsilon=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k \tag{7}$$

и покажем, что f_ε удовлетворяет нужным требованиям. Сначала докажем, что $f_\varepsilon\in B^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Для этого оценим норму $\|\psi_k\|_{B^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$.

Расстояния между носителями функций $\varphi^{k,i}$ при различных $i=1,\dots,2^{kn}$ не меньше, чем

$$\beta^{k-1}-2\beta^k(1+\rho)>2Ma\beta^k$$

(см. (6)). Поэтому при $|h| < a\beta^k$ функции $\Delta_h^M \varphi^{k,i}$ при различных i также имеют непересекающиеся носители и

$$\|\Delta_h^M \psi_k\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \Big\| \sum_{i=1}^{2^{kn}} \Delta_h^M \varphi^{k,i} \Big\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big| \sum_{i=1}^{2^{kn}} \Delta_h^M \varphi^{k,i}(x) \Big|^p dx =$$

$$= 2^{kn} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\Delta_h^M \varphi^{k,1}(x)|^p \, dx = 2^{kn}\beta^{kn} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\Delta^M_{\beta^{-k}h} \varphi(x)|^p \, dx \leqslant c 2^{kn}\beta^{kn}(\beta^{-k}h)^{pM}.$$

Здесь и всюду ниже c обозначает различные положительные постоянные, значения которых не важны для нас.

Итак, мы показали, что

$$\|\Delta_h^M \psi_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant c(2\beta)^{kn/p}(\beta^{-k}|h|)^M. \tag{8}$$

Точно так же из того, что носители функций $\varphi^{k,i}$ при различных $i = 1, \ldots, 2^{kn}$ не пересекаются, выводятся неравенства

$$\|\psi_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant c(2\beta)^{kn/p}. \tag{9}$$

Используя (8), получаем оценку

$$\int\limits_{|h| \leqslant a\beta^k} |h|^{-\alpha q} \|\Delta_h^M \psi_k\|^q_{L^p(\mathbb{R}^n)} \frac{dh}{|h|^n} \leqslant c \int\limits_{|h| \leqslant a\beta^k} |h|^{-\alpha q} (2\beta)^{qkn/p} (\beta^{-k}|h|)^{qM} \frac{dh}{|h|^n} =$$

$$= c 2^{qkn/p} \beta^{-qk(M-n/p)} \int\limits_{|h| \leqslant a\beta^k} |h|^{q(M-\alpha)-n} \, dh = c 2^{qkn/p} \beta^{-qk(\alpha - n/p)}.$$

Далее, так как

$$\|\Delta_h^M \psi_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant 2^M \|\psi_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

согласно (9) имеем

$$\int\limits_{|h| \geqslant a\beta^k} |h|^{-\alpha q} \|\Delta_h^M \psi_k\|^q_{L^p(\mathbb{R}^n)} \frac{dh}{|h|^n} \leqslant 2^{qM} \int\limits_{|h| \geqslant a\beta^k} |h|^{-\alpha q} \|\psi_k\|^q_{L^p(\mathbb{R}^n)} \frac{dh}{|h|^n} \leqslant$$

$$\leqslant c(2\beta)^{qkn/p} \int\limits_{|h| \geqslant a\beta^k} |h|^{-\alpha q - n} \, dh = c(2\beta)^{qkn/p} \beta^{-\alpha q k} = c 2^{qkn/p} \beta^{qk(n/p - \alpha)}.$$

Таким образом, мы установили неравенство

$$\bigg(\int\limits_{|h| \leqslant 1} |h|^{-\alpha q} \|\Delta_h^M \psi_k\|^q_{L^p(\mathbb{R}^n)} \frac{dh}{|h|^n} \bigg)^{1/q} \leqslant c 2^{kn/p} \beta^{k(n/p - \alpha)},$$

которое вместе с (9) означает, что

$$\|\psi_k\|_{B^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c(2^n \beta^{n - \alpha p})^{k/p}.$$

Так как

$$2^n \beta^{n-\alpha p} = e^{-\varepsilon n \ln 2/(n-\alpha p-\varepsilon)} < 1,$$

то ряд из (7), определяющий функцию f_ε, сходится в $B^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ и $f_\varepsilon \in B^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Покажем, что функция f_ε удовлетворяет условию

$$\varlimsup_{r\to+0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} f_\varepsilon \, d\mu = \infty \tag{10}$$

для всех $x \in C(\beta)$. В самом деле, если $x \in C(\beta)$, то $x \in C_k(\beta)$ для каждого k и $x \in C_{k,i_k}(\beta)$ при некотором i_k. Пусть $r_k = \sqrt{n}\beta^k$. Тогда $C_{k,i_k}(\beta) \subset B(x, r_k)$ и

$$\frac{1}{\mu(B(x,r_k))} \int\limits_{B(x,r_k)} f_\varepsilon \, d\mu \geqslant k \frac{\mu(C_{k,i_k}(\beta))}{\mu(B(x,r_k))} \geqslant ck.$$

Из (10) следует, что

$$\dim_{\mathbb{H}}\bigl(\Lambda(f_\varepsilon)\bigr) \geqslant \dim_{\mathbb{H}}\bigl(C(\beta)\bigr) = n - lp - \varepsilon > n - lp - \varepsilon.$$

Искомая функция строится теперь следующим образом. Возьмём $\varepsilon = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$, и построим функции $f_{1/m}$. Положим

$$f_0 = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} f_{1/m} \|f_{1/m}\|^{-1}_{B^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n)}.$$

Ясно, что $f_0 \in B^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, так как для любого $m \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $f_0(x) \geqslant f_{1/m}(x)$, то $\Lambda(f_0) \supset \Lambda(f_{1/m})$ и

$$\dim_{\mathbb{H}}\bigl(\Lambda(f_0)\bigr) \geqslant \dim_{\mathbb{H}}\bigl(\Lambda(f_{1/m})\bigr) \geqslant n - \alpha p - \frac{1}{m}, \quad m \in \mathbb{N},$$

и $\dim_{\mathbb{H}}\bigl(\Lambda(f_0)\bigr) = n - \alpha p$ (см. также теорему 1). То, что $\mathrm{Cap}_{\beta,r}\bigl(\Lambda(f_0)\bigr) > 0$ при $\beta r > \alpha p$, следует из (2). Теорема 3 доказана.

Как уже отмечалось выше, утверждение теоремы 3 справедливо и для пространств Трибеля—Лизоркина $F^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Из этого факта и из равенства $J_\alpha\bigl(L^p(\mathbb{R}^n)\bigr) = F^\alpha_{p,2}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$ (см. [12, п. 2.3.5]), следует теперь теорема 2.

Литература

[1] Федерер Г. Геометрическая теория меры. — М.: Наука. 1987.

[2] Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. — М.: Мир, 1973.

[3] Adams D. R., Hedberg L. I. Function spaces and potential theory. — Berlin: Springer, 1996.

[4] Bagby T., Ziemer C. Pointwise differentiability and absolute continuity // Trans. Am. Math. Soc. — 1974. — Vol. 191. — P. 129—148.

[5] Calderón A. P. Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions // Proc. Symp. Pure Math. Vol. 4. — Providence: Amer. Math. Soc., 1961. — P. 33—49.

[6] Calderon C. P., Fabes E. B., Riviere N. M. Maximal smoothing operators // Indiana Univ. Math. J. — 1974. — Vol. 232, no. 10. — P. 889—898.

[7] Falconer K. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. — Chichester: Wiley, 1990.

[8] Federer H., Ziemer C. The Lebesgue sets of a function whose distribution derivatives are pth power summable // Indiana Univ. Math. J. — 1972. — Vol. 22, no. 2. — P. 139—158.

[9] Krotov V. G. Maximal functions measuring smoothness // Recent Advances in Harmonic Analysis and Applications in Honor of Konstantin Oskolkov. — Berlin: Springer, 2013. — (Springer Proc. Math. Stat. Vol. 25). — P. 197—223.

[10] Krotov V. G., Prokhorovich M. A. Estimates for the exceptional Lebesgue sets of functions from Sobolev classes // Recent Advances in Harmonic Analysis and Applications in Honor of Konstantin Oskolkov. — Berlin: Springer, 2013. — (Springer Proc. Math. Stat. Vol. 25). — P. 225—234.

[11] Meyers N. G. Taylor expansion of Bessel potentials // Indiana Univ. Math. J. — 1974. — Vol. 23, no. 11. — P. 1043—1049.

[12] Triebel H. Theory of Function Spaces. — Basel: Birkhäuser, 1983.

[13] Triebel H. Theory of Function Spaces. II. — Basel: Birkhäuser, 1992.