Е. Ы. Бидайбеков, Об обратных задачах для обыкновенных дифференциальных уравнений,
Матем. заметки, 1979, том 26, выпуск 1, 53–59

https://www.mathnet.ru/mzm6839

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 26, № 1 (1979)

ОБ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Е. Ы. Бидайбеков

В работе [1] приведена в качестве примера одна обратная задача для линейного дифференциального уравнения первого порядка, исследование которой проводится довольно просто. Нашей целью является исследование обратных задач для обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка

$$Ly \equiv y^{(n)} + p_n(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + p_2(x)\,y' + p_1(x)\,y = f(x). \qquad (1)$$

Рассматриваемые обратные задачи будут заключаться в отыскании либо всех коэффициентов $p_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, т. е. линейного дифференциального оператора L, либо правой части $f(x)$ уравнения (1). Везде в дальнейшем будем считать, что все коэффициенты и правая часть уравнения (1) непрерывны, и в этом предположении проведем исследование нижеследующих обратных задач.

1. Пусть для дифференциального уравнения (1) имеется серия прямых задач с данными

$$y^{(i-1)}(x, x_0)\,|_{x=x_0} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (2)$$

зависящими от параметра x_0. Будем считать, что коэффициенты $p_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, известны, а требуется найти функцию $f(x)$, если известно, что

$$y(x, x_0)\,|_{x=x_1} = \varphi(x_0), \qquad (3)$$

т. е. по заданной функции $\varphi(x_0)$ найти неизвестную функцию $f(x)$. При этом полагаем, что $x,\ x_0 \in D_h =$

$= \{x : |x - x_1| \leqslant h\}$, где h — произвольное положительное число, а x_1 — фиксированная точка.

Так как решение задачи (1), (2) при известной функции $f(x) \in C(D_h)$ в любой точке $x = x_0$ из промежутка D_h имеет нуль n-го порядка и дифференцируемо по параметру x_0, то для существования решения поставленной обратной задачи необходимо, чтобы функция $\varphi(x_0)$, $x_0 \in \in D_h$, была дифференцируемой и имела в точке $x_0 = x_1$ нуль n-го порядка, следовательно, ее производная $\varphi'(x_0)$ имела нуль $(n-1)$-го порядка в той же точке $x_0 = x_1$.

Имеет место следующая теорема существования и единственности решения обратной задачи (1), (2), (3).

ТЕОРЕМА 1. *Если*

$$\| p_i(x) \|_{C(D_h)} \leqslant M_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

где M_i — положительные постоянные, а функция $\varphi(x_0)$ удовлетворяет необходимым условиям, указанным выше, и принадлежит $C^1(D_h)$, то существует единственное решение обратной задачи (1), (2), (3) *на любом промежутке D_h при $h < 2h_0$, где h_0 — наименьший положительный корень уравнения*

$$M_1 \frac{h^n}{n!} + M_2 \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + M_n \frac{h}{1!} - 1 = 0. \tag{5}$$

Доказательство. Как известно, решение задачи (1), (2) по методу Коши [2] представляется в виде

$$y(x, x_0) = \int_{x_0}^{x} G(x, t) f(t) \, dt, \tag{6}$$

где функция $G(x, t)$ является решением следующей задачи:

$$LG = 0, \tag{7}$$

$$G^{(k)}|_{x=t} = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-2,$$
$$G^{(n-1)}|_{x=t} = 1, \qquad t \in D_h. \tag{8}$$

Положив $x = x_1$ в равенстве (6) и дифференцируя по параметру x_0, а затем разрешив относительно функции $f(x_0)$, имеем

$$f(x_0) = -\varphi'(x_0)/G(x_1, x_0). \tag{9}$$

Таким образом, мы получили явное выражение для определения функции $f(x_0)$, $x_0 \in D_h$. Покажем теперь, что функция $G(x_1, x_0) \neq 0$ при любом $x_0 \in D_h$, $h < h_0$, $x_0 \neq x_1$. Для этого заметим, что справедлива следующая

ЛЕММА. *Если имеет место неравенство* (4), *то при любом фиксированном t решение задачи* (7), (8) $G(x, t) \neq 0$ *для* $x \in (t - h_0, t) \bigcup (t, t + h_0)$, *где* h_0 — *наименьший положительный корень уравнения* (5).

Доказательство сформулированной леммы непосредственно следует из доказательства теоремы Валле Пуссена [3].

Из этой леммы имеем, что функция $G(x_1, x_0) \neq 0$ при любом $x_0 \in D_h$, $h < h_0$, $x_0 \neq x_1$. А из того, что порядки нулей у функций $\varphi'(x_0)$ и $G(x_1, x_0)$ при $x_0 = x_1$ совпадают и равны $n - 1$, следует однозначность определения по формуле (9) функции $f(x_0)$, непрерывной на любом промежутке D_h при $h < 2h_0$. Что и требовалось доказать.

Отметим, что в случае уравнения второго порядка, как показано в работе [4],

$$h_0 = \left(\sqrt{9M_2^2 + 24M_1} - 3M_2\right) / (2M_1)$$

и возможно дальнейшее уточнение оценки h_0 [4], [5].

2. Рассмотрим следующую обратную задачу: определить оператор L, т. е. коэффициенты $p_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, если относительно решения уравнения

$$Ly \equiv y^{(n)} + p_n(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_2(x) y' + p_1(x) y = 0 \qquad (10)$$

со следующими n сериями прямых задач Коши с данными

$$y_i^{(k)}(x, x_0)\big|_{x=x_0} = \begin{cases} 1, & k = i - 1, \\ 0, & k \neq i - 1, \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 0, 1, \ldots, n - 1, \qquad (11)$$

зависящими от параметра x_0, известно, что

$$y_i(x, x_0)\big|_{x=x_1} = \varphi_i(x_0), \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (12)$$

Нетрудно убедиться в том, что для существования решения данной обратной задачи необходимо, чтобы функции

$$\varphi_1'(x_0), \varphi_\nu'(x_0) - \frac{(x_1 - x_0)^{\nu-2}}{(\nu - 2)!}, \qquad \nu = 2, 3, \ldots, n,$$

имели нули $(n - 1)$-го порядка при $x_0 = x_1$. Покажем теперь, что при выполнении этих необходимых условий решение обратной задачи (10), (11), (12) существует и единственно в классе непрерывных на некотором промежутке $D_h = \{x\colon \mid x - x_1 \mid \leqslant h\}$ функций.

ТЕОРЕМА 2. *Существует такое положительное число h, что на промежутке D_h решение обратной задачи* (10), (11), (12) *существует и единственно в классе непрерывных функций, если выполнены необходимые условия, указанные выше, и* $\varphi_i(x_0) \in C^1(D_h)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Действительно, решения рассматриваемых задач Коши эквивалентны следующим интегро-дифференциальным уравнениям:

$$y_i(x, x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\left[-\sum_{j=1}^{n} p_j(t)\, y_i^{(j-1)}(t, x_0)\right] \mathrm{d}t + \\ + (x - x_0)^{i-1}/((i-1)!), \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \quad (13)$$

Положив в последних равенствах $x = x_1$ и дифференцируя по переменной x_0, получим

$$\frac{(x_1 - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} p_i(x_0) = \\ = \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x_1 - t)^{n-1}}{(n-1)!}\left[\sum_{j=1}^{n} p_j(t) \frac{\partial y_i^{(j-1)}(t, x_0)}{\partial x_0}\right] \mathrm{d}t + \\ + F_i(x_0), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \quad (14)$$

где

$$F_1(x_0) = \varphi_1'(x_0),$$
$$F_\nu(x_0) = \varphi_\nu'(x_0) - (x_1 - x_0)^{\nu-2} / ((\nu-2)!),$$
$$\nu = 2, 3, \ldots, n.$$

Из равенства (13), вычисляя производные по переменной x любого порядка до $n - 1$, имеем

$$y_i^{(k-1)}(x, x_0) = \Phi_{i+kn}(x, x_0) - \\ - \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-k}}{(n-k)!}\left[\sum_{j=1}^{n} p_j(t)\, y_i^{(j-1)}(t, x_0)\right] \mathrm{d}t,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad (15)$$

в которых

$$\Phi_{i+kn}(x, x_0) = \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left[\frac{(x - x_0)^{i-1}}{(i-1)!}\right],$$

$$i = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

а дифференцируя равенства (15) по переменной x_0, находим

$$\frac{\partial y_i^{(k-1)}(x, x_0)}{\partial x_0} = \frac{\partial}{\partial x_0}\Phi_{i+kn}(x, x_0) + p_i(x_0)\frac{(x-x_0)^{n-k}}{(n-k)!} - \\ - \int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^{n-k}}{(n-k)!}\left[\sum_{j=1}^{n} p_j(t)\frac{\partial y_i^{(j-1)}(t, x_0)}{\partial x_0}\right]dt,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n; \; k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (16)$$

Заметим, что из равенства (14) следует, что

$$p_i(x_1) = \lim_{x_0 \to x_1}((n-1)!\, F_i(x_0)/(x_1 - x_0)^{n-1}),$$

$$i = 1, 2, \ldots, n,$$

и принимают вполне определенные значения в силу выполнения необходимых условий для функции $\varphi_i(x_0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Далее в уравнениях (14) заменим переменную x_0 на x, а в уравнениях (16) положим $x_0 = x_1$, тогда, вводя для удобства следующие обозначения:

$$(n-1)!\, F_i(x)/(x_1 - x)^{n-1} = \Psi_i(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\Phi_{i+kn}(x, x_1) + p_i(x_1)\frac{(x-x_1)^{n-k}}{(n-k)!} = \Psi_{i+kn}(x),$$

$$\partial y_i^{(k-1)}(x, x_1)/\partial x_0 = p_{i+kn}(x),$$

$i = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, n$, получим следующую замкнутую систему из $n^2 + n$ интегральных уравнений второго рода:

$$p_i(x) = \Psi_i(x) - \int_{x_1}^{x}\frac{(x_1 - t)^{n-1}}{(x_1 - x)^{n-1}}\sum_{j=1}^{n} p_j(t)\, p_{i+jn}(t)\, dt,$$

$$(17)$$

$$p_{i+kn}(x) = \Psi_{i+kn}(x) - \int_{x_1}^{x}\frac{(x-t)^{n-k}}{(n-k)!}\sum_{j=1}^{n} p_j(t)\, p_{i+jn}(t)\, dt,$$

$i = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, n$, где функции $\Psi_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n^2 + n$, — известные непрерывные функции.

Из теории интегральных уравнений [6], [1] известно, что можно подобрать такое $h = h(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$, что на промежутке D_h система (17) имеет единственное непрерывное решение.

З а м е ч а н и е 1. Начальные условия (11) можно задавать и по-иному, лишь бы y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, в совокупности составляли полную систему линейно независимых решений.

Замечание. 2. Примененный при доказательстве теоремы 2 метод дает возможность не только найти решение обратной задачи, но также позволяет найти одновременно решения прямых задач (10), (11) с их производными до $(n-1)$-го порядка включительно при $x_0 = x_1$.

Замечание 3. Доказанная теорема 2, естественно, представляет собой теорему существования и единственности «в малом». Однако просто решается вопрос о единственности решения обратной задачи (10), (11), (12) «в большом». Действительно, если предположить, что существуют два решения p_i^1, p_i^2, $i = 1, 2, \ldots, n$, данной обратной задачи, то, вводя обозначения $\tilde{p}_k = p_k^1 - p_k^2$, $k = 1, 2, \ldots, n^2 + n$, и используя очевидное тождество

$$p_k^1 p_l^1 - p_k^2 p_l^2 = p_k^1 \tilde{p}_l + p_l^2 \tilde{p}_k,$$

которое имеет место при любых k, l $(k \neq l)$, из системы (17) получим

$$\tilde{p}_j(x) = -\int_{x_1}^{x} \frac{(x_1 - t)^{n-1}}{(x_1 - x)^{n-1}} \sum_{j=1}^{n} [p_j^1 \tilde{p}_{i+jn} + \tilde{p}_j p_{i+jn}^2]\, dt,$$

$$\tilde{p}_{i+mn}(x) = -\int_{x_1}^{x} \frac{(x - t)^{n-m}}{(n - m)!} \sum_{j=1}^{n} [p_j^1 \tilde{p}_{i+jn} + \tilde{p}_j p_{i+jn}^2]\, dt,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n; \quad m = 1, 2, \ldots, n.$$

Полученная система представляет собой систему линейных однородных интегральных уравнений, которая с помощью замены $(x_1 - x)^{n-1}\tilde{p}_i = r_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, может быть сведена к вольтерровой системе и поэтому имеет единственное решение $\tilde{p}_k \equiv 0$, $k = 1, 2, \ldots, n^2 + n$, на любом конечном промежутке, содержащем точку x_1. Отсюда и следует $p_i^1 \equiv p_i^2$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Вычислительный центр
СО АН СССР

Поступило
5.V.1978

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Романов В. Г., Обратные задачи для дифференциальных уравнений, Спецкурс для студентов Новосибирского гос. ун-та, Новосибирск, изд-во НГУ, 1973.

[2] Матвеев Н. М., Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, М., «Высшая школа», 1973.
[3] Сансоне Дж., Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. 1, М., ИЛ, 1953.
[4] Трикоми Ф., Дифференциальные уравнения, М., ИЛ, 1962.
[5] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., «Мир», 1970.
[6] Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А., Михлин С. Г., Раковщик Л. С., Стеценко В. Я., Интегральные уравнения, М., «Наука», 1968.