E. D. Gal'kovskiĭ, A. I. Nazarov, A general trace formula for the differential operator on a segment with the last coefficient perturbed by a finite signed measure,

Algebra i Analiz, 2018, Volume 30, Issue 3, 30–54

Алгебра и анализ
Том 30 (2018), №3

Памяти Михаила Захаровича Соломяка

ОБЩАЯ ФОРМУЛА СЛЕДОВ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ОТРЕЗКЕ ПРИ ВОЗМУЩЕНИИ МЛАДШЕГО КОЭФФИЦИЕНТА КОНЕЧНЫМ ЗАРЯДОМ

© Е. Д. ГАЛЬКОВСКИЙ, А. И. НАЗАРОВ

В работе получена формула следа первого порядка для дифференциального оператора второго порядка на отрезке, возмущенного оператором умножения на заряд.

§1. Введение

Рассмотрим оператор $\mathbb{L}$ на отрезке $[a,b]$, порождаемый дифференциальным выражением порядка $n \geqslant 2$

$$\ell = (-i)^n D^n + \sum_{k=0}^{n-2} p_k(x) D^k, \tag{1}$$

(здесь $p_k \in L_1(a,b)$ — комплекснозначные функции) и граничными условиями

$$(P_j(D)y)(a) + (Q_j(D)y)(b) = 0, \qquad j = 0, \dots, n-1, \tag{2}$$

(здесь P_j и Q_j — полиномы степени меньше n с комплексными коэффициентами). Обозначим d_j наибольшую из степеней P_j и Q_j, a_j и b_j — коэффициенты при степени d_j у полиномов P_j и Q_j соответственно (таким образом, a_j и b_j не могут одновременно обращаться в нуль).

Ключевые слова: Регуляризованный след, сингулярный потенциал, суммирование по Чезаро.

Основные результаты статьи, теоремы 2.4 и 2.5, получены при поддержке Российского научного фонда, грант №17-11-01003. Теорема 2.3 получена при поддержке гранта РФФИ №16-01-00258а.

Будем считать систему граничных условий (2) нормированной (это означает, что $\sum_{j=0}^{n-1} d_j$ является минимальной среди всех систем граничных условий, которые могут быть получены из (2) невырожденными линейными преобразованиями; см. [4, гл. II, §4], а также [12] в случае более общей постановки).

Предположим, далее, что система (2) регулярна по Биркгофу (см. [4, гл. II, §4]). Тогда оператор $\mathbb{L}$ имеет дискретный спектр[1], который мы будем обозначать $\{\lambda_N\}_{N=1}^{\infty}$. В дальнейшем мы всегда будем нумеровать собственные числа в порядке возрастания модулей с учетом кратности (т.е. $|\lambda_N| \leqslant |\lambda_{N+1}|$).

Обозначим $\mathbb{Q}$ оператор умножения на конечный (комплексный) заряд $\mathfrak{q}$ (пространство таких зарядов будем обозначать $\mathfrak{M}[a,b]$). Тогда оператор $\mathbb{L}_{\mathfrak{q}} = \mathbb{L} + \mathbb{Q}$ также имеет дискретный спектр, который мы будем обозначать $\{\lambda_N(\mathfrak{q})\}_{N=1}^{\infty}$.

Нас будет интересовать регуляризованный след

$$\mathcal{S}(\mathfrak{q}) := \sum_{N=1}^{\infty} \left[\lambda_N(\mathfrak{q}) - \lambda_N - \frac{1}{b-a} \int\limits_{[a,b]} \mathfrak{q}(dx) \right].$$

Не умаляя общности, в дальнейшем будем считать, что

$$\int\limits_{[a,b]} \mathfrak{q}(dx) = 0.$$

Впервые формула регуляризованного следа была получена в 1953 году И. М. Гельфандом и Б. М. Левитаном для задачи

$$-y'' + \mathfrak{q}(x)y = \lambda y; \qquad y(0) = y(\pi) = 0. \tag{3}$$

Именно, в работе [2] было показано, что при вещественной $\mathfrak{q}(x) \in \mathcal{C}^1[0,\pi]$ справедливо соотношение

$$\mathcal{S}(\mathfrak{q}) = -\frac{\mathfrak{q}(0) + \mathfrak{q}(\pi)}{4}.$$

Статья [2] породила многочисленные усиления и обобщения. Обзор результатов в задаче о вычислении регуляризированного следа можно найти в статье В. А. Садовничего и В. Е. Подольского [10].

В недавней работе А. И. Назарова, Д. М. Столярова и П. Б. Затицкого [6] для произвольного $n \geqslant 2$ и регулярных граничных условий была

[1]Заметим, что мы не предполагаем самосопряженности $\mathbb{L}$.

получена формула

$$\mathcal{S}(\mathfrak{q}) = \frac{\psi_a(a+)}{2n} \cdot \mathbf{tr}\,(\mathbb{A}) + \frac{\psi_b(b-)}{2n} \cdot \mathbf{tr}\,(\mathbb{B}), \tag{4}$$

в предположениях, являющихся сейчас стандартными[2]: $\mathfrak{q} \in L_1(a,b)$, и функции

$$\psi_a(x) = \frac{1}{x-a}\int\limits_a^x \mathfrak{q}(t)dt, \qquad \psi_b(x) = \frac{1}{b-x}\int\limits_x^b \mathfrak{q}(t)dt$$

имеют ограниченную вариацию в точках a и b соответственно. В формуле (4) $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — матрицы, элементы которых выражаются через коэффициенты a_j и b_j, $j = 0, \dots, n-1$. Более того, в [6] было показано, что в важном частном случае **почти разделенных** граничных условий множители $\mathbf{tr}\,(\mathbb{A})$ и $\mathbf{tr}\,(\mathbb{B})$ в (4) упрощаются и выражаются через суммы степеней полиномов P_j и Q_j.

Принципиально новый эффект был обнаружен уже в нашем веке А. М. Савчуком и А. А. Шкаликовым [8, 9], см. также [1]. Именно, оказалось, что если в задаче (3) $\mathfrak{q} \in \mathfrak{M}[0,\pi]$ — заряд, локально непрерывный в точках 0 и π, то

$$\mathcal{S}(\mathfrak{q}) = -\frac{\mathfrak{q}(0) + \mathfrak{q}(\pi)}{4} - \frac{1}{8}\sum_j h_j^2, \tag{5}$$

где h_j — скачки функции распределения заряда $\mathfrak{q}$ (ряд $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$ в этом случае суммируется методом средних).

Таким образом, при $\mathfrak{q} \in \mathfrak{M}[a,b]$ регуляризованный след перестает быть линейным функционалом от $\mathfrak{q}$. Для δ-потенциала этот эффект был получен при некоторых других граничных условиях в работе [3].

В настоящей статье мы обобщаем формулу (5) на случай оператора $\mathbb{L}$ с произвольными регулярными граничными условиями.

Статья организована следующим образом. В §2 сформулированы основной результат и несколько промежуточных утверждений. Эти утверждения доказываются в §§3–5. В Приложение вынесены асимптотики собственных чисел и собственных функций операторов Штурма–Лиувилля, необходимые для доказательства теоремы 2.3.

Введем некоторые обозначения. Любой заряд $\mathfrak{q} \in \mathfrak{M}[a,b]$ можно разбить на непрерывную и дискретную составляющие, которые мы обозначим $\mathfrak{c}$ и

[2]Для оператора $\mathbb{L}$ без младших членов и гладкой функции $\mathfrak{q}$ формула (4) была установлена ранее Р. Ф. Шевченко [13].

$\mathfrak{d}$ соответственно, так что

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{c} + \mathfrak{d} = \mathfrak{c} + \sum_j h_j \delta(x - x_j), \quad \sum_j |h_j| < \infty.$$

Полную вариацию заряда $\mathfrak{q}$ обозначим $\|\mathfrak{q}\|$. Определим также функцию распределения

$$\mathcal{Q}(x) = \int\limits_{[a,x]} \mathfrak{q}\,(dt).$$

Таким образом, h_j — скачок функции $\mathcal{Q}$ в точке x_j.

Оператор, порожденный дифференциальным выражением $\ell_0 = (-i)^n D^n$ и регулярными условиями (2), обозначим $\mathbb{L}_0$, а его собственные числа — $\{\lambda_N^0\}_{N=1}^{\infty}$.

Далее, $G(x,y,\lambda)$, $G_{\mathfrak{q}}(x,y,\lambda)$, и $G_0(x,y,\lambda)$ — функции Грина операторов $\mathbb{L} - \lambda$, $\mathbb{L}_{\mathfrak{q}} - \lambda$ и $\mathbb{L}_0 - \lambda$ соответственно (см. [4, гл. I, §3]).

Для произвольной функции $\Phi(\lambda)$, определенной на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, введем функцию $\widetilde{\Phi}(z)$ следующим образом:

$$\widetilde{\Phi}(z) = \Phi(\lambda), \qquad \text{где } z = \lambda^{\frac{1}{n}}, \quad Arg(z) \in [0, \frac{2\pi}{n}). \tag{6}$$

Заметим, что резольвента $\frac{1}{\mathbb{L}-\lambda}$ — интегральный оператор с ядром $G(x,y,\lambda)$, и определим его след

$$\mathbf{Sp}\,\frac{1}{\mathbb{L} - \lambda} = \int\limits_a^b G(x,x,\lambda)\,dx.$$

Напомним определение суммирования ряда методом средних (методом Чезаро порядка 1). Пусть I_ℓ — последовательность частных сумм ряда $\sum_j a_j$. Ряд называется суммируемым методом средних, если существует предел

$$(\mathcal{C},1)\text{-}\lim_{\ell\to\infty} I_\ell := (\mathcal{C},1)\text{-}\sum_{j=1}^{\infty} a_j := \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{\ell=1}^{k} I_\ell.$$

Все положительные константы, значения которых нам не важны, обозначаются буквой C.

§2. Формулировка результатов

Наш основной результат для операторов второго порядка выглядит так:

Теорема 2.1. *Пусть $n = 2$, и функция распределения заряда $\mathfrak{q} \in \mathfrak{M}[a,b]$ дифференцируема в точках a и b. Тогда для любых регулярных граничных условий (2) справедлива формула*[3]

$$\mathcal{S}(\mathfrak{q}) = \mathcal{A}\mathcal{Q}'(a) + \mathcal{B}\mathcal{Q}'(b) - \frac{1}{8}\sum_j h_j^2. \tag{7}$$

Если граничные условия (2) сильно регулярны (см., напр., [12]), то ряд в левой части (7) суммируется методом средних. Если же условия (2) регулярны, но не сильно регулярны, то сначала члены ряда, отвечающие асимптотически близким или совпадающим собственным числам, складываются попарно, а затем полученный ряд суммируется методом средних. Далее,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = \mathcal{B} = -\frac{1}{4} \quad &\textit{при} \quad d_0 = d_1 = 0; \\ \mathcal{A} = \mathcal{B} = \frac{1}{4} \quad &\textit{при} \quad d_0 = d_1 = 1; \\ \mathcal{A} = -\mathcal{B} = \frac{1}{4}\,\frac{a_1b_0 - a_0b_1}{a_1b_0 + a_0b_1} \quad &\textit{при} \quad d_0 = 0,\ d_1 = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, нелинейное слагаемое в (7) **не зависит** от граничных условий, в то время как коэффициенты линейной части полностью определяются граничными условиями.

Для операторов высокого порядка рассматриваемое возмущение является слишком слабым, и зависимость следа от $\mathfrak{q}$ остается линейной.

Гипотеза. *Пусть $n \geqslant 3$, $\mathfrak{q} \in \mathfrak{M}[a,b]$ — заряд, удовлетворяющий условиям теоремы 2.1. Тогда для любых регулярных граничных условий (2) справедлива формула*

$$\mathcal{S}(\mathfrak{q}) = \frac{\mathcal{Q}'(a)}{2n}\cdot \boldsymbol{tr}\,(\mathbb{A}) + \frac{\mathcal{Q}'(b)}{2n}\cdot \boldsymbol{tr}\,(\mathbb{B}),$$

где ряд $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$ суммируется так же, как в теореме 2.1, а матрицы $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ такие же, как в (4) (см. [6, Theorem 2]).

В полном объеме это утверждение мы предполагаем доказать в другой статье. Здесь мы докажем теорему 2.1 и несколько вспомогательных утверждений.

Положим

$$\Gamma^1 = \Big\{ w = e^{i\phi} : \phi \in \Big(0, \frac{\pi}{n}\Big) \Big\}; \qquad \Gamma^2 = \Big\{ w = e^{i\phi} : \phi \in \Big(\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}\Big) \Big\}.$$

[3] Условие на $\mathfrak{q}$, в частности, означает, что $\mathfrak{q}$ не имеет атомов в точках a и b.

Рассмотрим периодическую C^∞ гладкую функцию $R(w)$ на $\overline{\Gamma^1 \cup \Gamma^2}$. Тогда нетрудно определить гладкий замкнутый контур

$$\gamma(w^n) = R^n(w)w^n,$$

а также контур

$$\Gamma(w) = R(w)w.$$

Назовем последовательность построенных таким образом контуров

$$\{\gamma_l\}_{l=1}^\infty$$

допустимой, если для некоторых $c_1, c_2 > 0$ выполнены следующие условия для любых l:

1. $R(1) = R_l \to \infty$;
2. $|R(w) - R(1)| \leqslant c_1$;
3. $|\frac{dR(w)}{dw}| \leqslant c_2 R(w)$;
4. Соответствующие контуры $\{\Gamma_l\}_{l=1}^\infty$ отделены от чисел $(\lambda_N^0)^{\frac{1}{n}}$ и $(\lambda_N)^{\frac{1}{n}}$ равномерно по l.

Замечание 1. Если краевые условия (2) сильно регулярны, то, как известно (см., напр., [4, гл. II, §4] и [12]), собственные числа разбиваются на две последовательности

$$(\lambda_{N,j}^0)^{\frac{1}{n}} = 2\pi N + \alpha_j + O\left(\frac{1}{N}\right),\ j = 1, 2,$$

где α_1 и α_2 различны, причем (см., напр., [5, Theorem 1.1]) $\alpha_1 + \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Поэтому можно провести такую последовательность допустимых контуров, что между любыми двумя соседними контурами находится ровно одно собственное число. Более того, если $\alpha_1 \neq \overline{\alpha_2}$, то в качестве этих контуров можно взять окружности радиуса R_l^n. Если же краевые условия регулярны, но не сильно регулярны, то контуры будем проводить так, чтобы между двумя соседними контурами находилась пара собственных чисел.

Теорема 2.2. *Для любой допустимой последовательности контуров γ_l справедливы следующие соотношения (суммирование ведется по $\lambda_N(\mathfrak{q})$, λ_N, попадающим внутрь контура γ_l):*

(1) *при $n \geqslant 3$*

$$\sum \Big[\lambda_N(\mathfrak{q}) - \lambda_N\Big] = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_l} \int\limits_{[a,b]} G_0(x,x,\lambda)\, \mathfrak{q}(dx)\, d\lambda + o(1);$$

(2) *при* $n = 2$

$$\sum \Big[\lambda_N(\mathfrak{q}) - \lambda_N\Big] = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_l}\int\limits_{[a,b]} G_0(x,x,\lambda)\,\mathfrak{q}(dx)\,d\lambda + \frac{1}{4\pi i}\sum_j h_j^2 \int\limits_{\gamma_l} G_0(x_j,x_j,\lambda)^2\,d\lambda + o(1). \tag{8}$$

Теорема 2.3. *Пусть* $n = 2$, *и* $\mathfrak{q} \in \mathfrak{M}[a,b]$ *— заряд, удовлетворяющий условиям теоремы* 2.1. *Пусть допустимая последовательность контуров* γ_l *построена согласно замечанию* 1. *Тогда*

$$-\frac{1}{2\pi i}\cdot(\mathcal{C},1)\text{-}\lim \int\limits_{\gamma_l}\int\limits_{[a,b]} G_0(x,x,\lambda)\,\mathfrak{q}(dx)\,d\lambda = \mathcal{A}\mathcal{Q}'(a) + \mathcal{B}\mathcal{Q}'(b), \tag{9}$$

где $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *такие же, как в теореме* 2.1.

Теорема 2.4. *Пусть* $n = 2$. *Тогда для любой допустимой последовательности контуров* γ_l *при* $x \neq a, b$ *имеем*

$$\lim_{l\to\infty}\int\limits_{\gamma_l} G_0(x,x,\lambda)^2\,d\lambda = -\frac{\pi i}{2}.$$

§3. Доказательство теоремы 2.2

Нам понадобятся некоторые утверждения из [6]. Первое из них обобщает теорему Я. Д. Тамаркина [11] о равносходимости, второе дает оценки функций Грина.

Предложение 3.1 ([6, Theorem 1]). *Для любой допустимой последовательности контуров* γ_l *имеем*

$$\int\limits_{\gamma_l} |(G_0 - G)(x,y,\lambda)|\,|d\lambda| \to 0$$

равномерно по $x, y \in [a,b]$.

Предложение 3.2 ([6, Lemma 1 и (22)]). *Пусть* γ_l *— допустимая последовательность контуров. Тогда для любого* $x \in [a,b]$ *справедливо соотношение*[4]

$$R_l^{n-1}\cdot|\widetilde{G_0}(x,y,R(w)w)| \to 0 \tag{10}$$

для почти всех $y \in [a,b]$ *и почти всех* $w \in \Gamma^1 \cup \Gamma^2$. *Более того, сходимость равномерная на* $\mathcal{K}\times\mathcal{J}$ *для любого компактного множества* $\mathcal{K} \subset [a,b]^2$,

[4]Напомним, что функция $\widetilde{G_0}(x,y,z)$ вводится согласно формуле (6).

отделенного от углов и диагонали $\{x = y\}$, *и любого компактного множества* $\mathcal{J} \subset \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Далее, предположим, что в дифференциальном выражении (1) *все коэффициенты* $p_k \in \mathfrak{M}[a,b]$, $k = 0, \dots, n-2$. *Тогда для всех* $j = 0, \dots, n-1$ *функции*

$$R_l^{n-1-j} \cdot |(\widetilde{G})_x^{(j)}(x, y, R(w)w)|$$

равномерно ограничены на $[a,b]^2 \times (\Gamma^1 \cup \Gamma^2)$.

Замечание 2. В [6] эти утверждения доказываются в случае, когда γ_l — окружности, а вторая часть Предложения 3.2 доказана для $p_k \in L_1(a,b)$. Однако доказательство при более общих условиях проходит без изменений.

Доказательство теоремы 2.2. Мы начнем с соотношения (см. [6, (24), (25)]; суммирование в левой части ведется по $\lambda_N(\mathfrak{q})$,λ_N, попадающим внутрь контура γ_l):

$$\begin{aligned} &4\pi i \sum \Big[\lambda_N(\mathfrak{q}) - \lambda_N\Big] \\ &= -\int\limits_{\gamma_l} \lambda\, \mathbf{Sp} \left(\left(\frac{1}{\mathbb{L} - \lambda} \mathbb{Q} \frac{1}{\mathbb{L}_{\mathfrak{q}} - \lambda} \right) \mathbb{Q} \left(\frac{1}{\mathbb{L} - \lambda} \mathbb{Q} \frac{1}{\mathbb{L}_{\mathfrak{q}} - \lambda} \right) \right) d\lambda \\ &+ \int\limits_{\gamma_l} \lambda\, \mathbf{Sp} \left(\frac{1}{\mathbb{L} - \lambda} \mathbb{Q} \frac{1}{\mathbb{L} - \lambda} + \frac{1}{\mathbb{L}_{\mathfrak{q}} - \lambda} \mathbb{Q} \frac{1}{\mathbb{L}_{\mathfrak{q}} - \lambda} \right) d\lambda =: -I_1(l) + I_2(l). \end{aligned}$$

Лемма 3.1. *В условиях теоремы* 2.2

$$I_1(l) = o(1) \quad \textit{при} \quad l \to \infty.$$

Доказательство. Запишем $I_1(l)$ через функции Грина:

$$\begin{aligned} I_1(l) = \int\limits_{\gamma_l} \int\limits_a^b \int\limits_{[a,b]} \lambda\, G(x, y, \lambda) \\ \times \int\limits_{[a,b]} \int\limits_{[a,b]} G_{\mathfrak{q}}(y, s, \lambda)\, G(s, t, \lambda)\, G_{\mathfrak{q}}(t, x, \lambda) \mathfrak{q}(dt) \mathfrak{q}(ds) \mathfrak{q}(dy)\, dx\, d\lambda. \end{aligned}$$

При $n \geqslant 3$, воспользовавшись оценкой из предложения 3.2, получим

$$|I_1(l)| \leqslant R_l^{2n} \|\mathfrak{q}\|^3 \, \frac{C}{R_l^{4(n-1)}} = o(1).$$

При $n=2$ доказательство усложняется. Из той же оценки получаем при $x,y\in[a,b]$

$$\left|\lambda \int\limits_{[a,b]}\int\limits_{[a,b]} G_{\mathfrak{q}}(y,s,\lambda)\, G(s,t,\lambda)\, G_{\mathfrak{q}}(t,x,\lambda)\mathfrak{q}(dt)\mathfrak{q}(ds)\right| \leqslant \|\mathfrak{q}\|^2\,\frac{C}{R_l},$$

откуда

$$\begin{aligned}
|I_1(l)| &\leqslant \|\mathfrak{q}\|^2\,\frac{C}{R_l}\int\limits_{\gamma_l}\int\limits_a^b\int\limits_{[a,b]} |G(x,y,\lambda)|\,|\mathfrak{q}|(dy)\,dx\,|d\lambda| \\
&\overset{*}{=} \|\mathfrak{q}\|^2\,\frac{C}{R_l}\int\limits_{\gamma_l}\int\limits_a^b\int\limits_{[a,b]} |G_0(x,y,\lambda)|\,|\mathfrak{q}|(dy)\,dx\,|d\lambda| + o(1) \\
&\leqslant \|\mathfrak{q}\|^2\,C\int\limits_{\Gamma_1\cup\Gamma_2}\int\limits_a^b\int\limits_{[a,b]} R_l\cdot|\widetilde{G}_0(x,y,R(w)w)|\,|\mathfrak{c}|(dy)\,dx\,|dw| \\
&\quad + \sum_j \|\mathfrak{q}\|^2\,C\,|h_j| \int\limits_{\Gamma^1\cup\Gamma^2}\int\limits_a^b R_l\cdot|\widetilde{G}_0(x,x_j,R(w)w)|\,dx\,|dw| + o(1) \\
&=: I_{11}(l) + I_{12}(l) + o(1)
\end{aligned}$$

(равенство $*$ следует из предложения 3.1).

В силу оценки из предложения 3.2 подынтегральное выражение в $I_{12}(l)$ ограничено равномерно по j. Кроме того, в условиях теоремы 2.3 заряд $\mathfrak{q}$ не имеет атомов на концах отрезка, т.е. все $x_j\in(a,b)$. Поэтому соотношение (10) и теорема Лебега дают $I_{12}(l)=o(1)$.

Оценим теперь $I_{11}(l)$. В силу непрерывности заряда $\mathfrak{c}$ для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для любого отрезка длины не более δ полная вариация $\mathfrak{c}$ на этом отрезке не превосходит ε. Выберем компактное множество $\mathcal{K}\subset[a,b]^2$, отделенное от углов и диагонали $\{x=y\}$, так, что при всех $x\in[a,b]$ множество

$$\mathcal{K}_x = \bigl\{y\in[a,b] : (x,y)\notin\mathcal{K}\bigr\}$$

состоит не более чем из трех интервалов длины не более δ каждый. Также выберем компакт $\mathcal{J}\subset\Gamma_1\cup\Gamma_2$, так, что мера множества $(\Gamma_1\cup\Gamma_2)\setminus\mathcal{J}$ не превосходит ε.

Интеграл по множеству $\mathcal{K}\times\mathcal{J}$ стремится к нулю при $l\to\infty$ в силу предложения 3.2. Интеграл по оставшемуся множеству оценивается через $C\varepsilon$.

Таким образом, $|I_1(l)| \leqslant C\varepsilon + o(1)$. Ввиду произвольности ε лемма доказана. $\square$

Продолжим доказательство теоремы. В интеграле $I_2(l)$ воспользуемся тождеством $\mathbf{Sp}(ABC) = \mathbf{Sp}(BCA)$ и проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned}
I_2(l) &= \int\limits_{\gamma_l} \lambda\, \mathbf{Sp}\left(\frac{1}{\mathbb{L}-\lambda}\,\mathbb{Q}\,\frac{1}{\mathbb{L}-\lambda} + \frac{1}{\mathbb{L}_{\mathfrak{q}}-\lambda}\,\mathbb{Q}\,\frac{1}{\mathbb{L}_{\mathfrak{q}}-\lambda}\right) d\lambda \\
&= \int\limits_{\gamma_l} \mathbf{Sp}\left(\left(\frac{\lambda}{(\mathbb{L}-\lambda)^2} + \frac{\lambda}{(\mathbb{L}_{\mathfrak{q}}-\lambda)^2}\right)\mathbb{Q}\right) d\lambda \\
&= -\int\limits_{\gamma_l} \mathbf{Sp}\left(\left(\frac{1}{\mathbb{L}-\lambda} + \frac{1}{\mathbb{L}_{\mathfrak{q}}-\lambda}\right)\mathbb{Q}\right) d\lambda.
\end{aligned}$$

Ко второму слагаемому применим тождество Гильберта. Это дает

$$I_2(l) = -2\int\limits_{\gamma_l} \mathbf{Sp}\left(\frac{1}{\mathbb{L}-\lambda}\,\mathbb{Q}\right) d\lambda + \int\limits_{\gamma_l} \mathbf{Sp}\left(\frac{1}{\mathbb{L}-\lambda}\,\mathbb{Q}\,\frac{1}{\mathbb{L}_{\mathfrak{q}}-\lambda}\,\mathbb{Q}\right) d\lambda. \tag{11}$$

При $n \geqslant 3$ второе слагаемое в (11) ограничено величиной $CR_l^{2-n} = o(1)$ ввиду оценки из предложения 3.2. Выражая первое слагаемое через функцию Грина, получим

$$\begin{aligned}
I_2(l) &= -2\int\limits_{\gamma_l}\int\limits_{[a,b]} G(x,x,\lambda)\mathfrak{q}(dx)\,d\lambda + o(1) \\
&= -2\int\limits_{\gamma_l}\int\limits_{[a,b]} G_0(x,x,\lambda)\mathfrak{q}(dx)\,d\lambda + o(1)
\end{aligned}$$

(последнее равенство следует из предложения 3.1). Объединяя это равенство с леммой 3.1, получим первое утверждение теоремы.

При $n = 2$ ко второму слагаемому в (11) еще раз применим тождество Гильберта. Это дает

$$I_2(l) = \int\limits_{\gamma_l} \mathbf{Sp}\left(\frac{-2}{\mathbb{L}-\lambda}\,\mathbb{Q} + \left(\frac{1}{\mathbb{L}-\lambda}\,\mathbb{Q}\right)^2 - \left(\frac{1}{\mathbb{L}-\lambda}\,\mathbb{Q}\right)^2 \frac{1}{\mathbb{L}_{\mathfrak{q}}-\lambda}\,\mathbb{Q}\right) d\lambda.$$

Последнее слагаемое здесь допускает оценку $CR_l^{-\frac{1}{2}} = o(1)$ ввиду оценки из предложения 3.2. Оставшиеся слагаемые мы выразим через функцию

Грина и заменим G на G_0 аналогично случаю $n \geqslant 3$. Получим

$$\begin{aligned} I_2(l) = -2\int\limits_{\gamma_l}\int\limits_{[a,b]} G_0(x,x,\lambda)\mathfrak{q}(dx)\,d\lambda \\ + \int\limits_{\gamma_l}\int\limits_{[a,b]}\int\limits_{[a,b]} G_0(x,y,\lambda)\,G_0(y,x,\lambda)\mathfrak{q}(dy)\mathfrak{q}(dx)\,d\lambda + o(1). \end{aligned} \tag{12}$$

Осталось преобразовать второе слагаемое в (12). Обозначим его $I_3(l)$ и перепишем в виде

$$\begin{aligned} I_3(l) = \int\limits_{\gamma_l}\int\limits_{[a,b]}\int\limits_{[a,b]} G_0(x,y,\lambda)\,G_0(y,x,\lambda)\mathfrak{c}(dy)(\mathfrak{c}(dx) + 2\mathfrak{d}(dx))\,d\lambda \\ + \int\limits_{\gamma_l}\int\limits_{[a,b]}\int\limits_{[a,b]} G_0(x,y,\lambda)\,G_0(y,x,\lambda)\mathfrak{d}(dy)\mathfrak{d}(dx)\,d\lambda =: I_{31}(l) + I_{32}(l). \end{aligned}$$

Интеграл $I_{31}(l)$ оценивается аналогично $I_{11}(l)$, что дает

$$|I_{31}(l)| \leqslant C\varepsilon + o(1) \qquad \text{для любого} \;\; \varepsilon > 0.$$

Далее,

$$I_{32}(l) = \sum_{j,k} h_k h_j \int\limits_{\Gamma^1\cup\Gamma^2} 2R_l^2 \cdot \widetilde{G}_0(x_j,x_k,R(w)w)\,\widetilde{G}_0(x_k,x_j,R(w)w)\,dw.$$

Все слагаемые с $j \neq k$ стремятся к нулю при $l \to \infty$ ввиду (10). По теореме Лебега

$$\begin{aligned} I_{32}(l) &= \sum_j h_j^2 \int\limits_{\Gamma^1\cup\Gamma^2} 2R_l^2 \cdot \widetilde{G}_0(x_j,x_j,R(w)w)^2\,dw + o(1) \\ &= \sum_j h_j^2 \int\limits_{\gamma_l} G_0(x_j,x_j,\lambda)^2\,d\lambda + o(1), \end{aligned}$$

что вместе с формулой (12) и оценками интегралов I_1 и I_{31} дает (8). □

§4. Доказательство теоремы 2.3

Сделав линейную замену переменной, можно считать, что $a = 0$, $b = 1$. Далее, поскольку для гладких функций $\mathfrak{q}$ формула (9) уже известна, достаточно доказать теорему в случае $\mathcal{Q}'(0) = \mathcal{Q}'(1) = 0$. Более того, можно дополнительно подчинить $\mathfrak{q}$ нескольким условиям ортогональности, что будет использовано ниже.

Нам понадобится следующее утверждение, являющееся частным случаем [9, лемма 1].

Предложение 4.1. *Пусть* $\mathfrak{q} \in \mathfrak{M}[0,1]$ *— заряд, удовлетворяющий условиям теоремы* 2.1, *причем* $\mathcal{Q}'(0) = \mathcal{Q}'(1) = 0$. *Тогда*

$$(\mathcal{C},1)\text{-}\sum_{\ell=1}^{\infty} \int\limits_{[0,1]} \cos(2\pi\ell x)\, \mathfrak{q}(dx) = 0.$$

Доказательство теоремы 2.3. Используя разложение функции Грина в окрестности полюса [4, гл. I, §3] и теорему о вычетах, перепишем интеграл из (9) так (суммирование в правой части ведется по λ_N^0, попадающим внутрь контура γ_l):

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_l} \int\limits_{[0,1]} G_0(x,x,\lambda)\, \mathfrak{q}(dx)\, d\lambda = \sum \int\limits_{[0,1]} y_N(x)\overline{z_N(x)}\, \mathfrak{q}(dx), \tag{13}$$

где y_N и z_N — собственные функции операторов $\mathbb{L}_0$ и $\mathbb{L}_0^*$, отвечающие собственным числам λ_N^0 и $\overline{\lambda_N^0}$ соответственно и нормированные условием

$$\langle y_N, z_N \rangle := \int\limits_0^1 y_N(x)\overline{z_N(x)}\, dx = 1.$$

Если собственному числу $\lambda_N^0 = \lambda_{N+1}^0$ (а тогда и $\overline{\lambda_N^0} = \overline{\lambda_{N+1}^0}$) соответствует жорданова клетка размерности 2, то в правой части (13) слагаемое $y_N(x)\overline{z_N(x)}$ нужно заменить на

$$y_N(x)\overline{\widehat{z}_{N+1}(x)} + \widehat{y}_{N+1}(x)\overline{z_N(x)},$$

где $\widehat{y}_{N+1}$ и $\widehat{z}_{N+1}$ — присоединенные функции операторов $\mathbb{L}_0$ и $\mathbb{L}_0^*$ из этих жордановых клеток, а условие нормировки имеет вид

$$\langle y_N, z_N \rangle = \langle \widehat{y}_{N+1}, \widehat{z}_{N+1} \rangle = 0; \qquad \langle y_N, \widehat{z}_{N+1} \rangle = \langle \widehat{y}_{N+1}, z_N \rangle = 1. \tag{14}$$

Таким образом, нам нужно обосновать переход к пределу в смысле средних в правой части (13). Рассмотрим различные случаи.

Случай $\mathbf{d_0 = d_1 = 0}$ (условия Дирихле) [5]. Этот случай технически наиболее прост. Система (2) приводится к виду

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

[5]Как указывалось во введении, этот случай рассмотрен в работе [9].

Оператор $-D^2$ с этими граничными условиями самосопряжен, его собственные числа и собственные функции имеют вид

$$\lambda_N^0 = (\pi N)^2, \quad y_N(x) = z_N(x) = C\sin(\pi N x), \quad N \in \mathbb{N}.$$

С учетом условия нормировки имеем

$$y_N(x)\overline{z_N(x)} = 1 - \cos(2\pi N x).$$

Константа обнуляется при интегрировании ввиду условия $\int_{[a,b]} \mathfrak{q}(dx) = 0$, а косинус — при переходе к пределу ввиду предложения 4.1. Таким образом, формула (9) доказана.

Случай $\mathbf{d_0 = d_1 = 1}$. В данном случае система (2) приводится к виду

$$\begin{cases} y'(0) + c_0 y(0) + f_0 y(1) = 0, \\ y'(1) + c_1 y(0) + f_1 y(1) = 0, \end{cases}$$

а граничные условия для сопряженного оператора — к виду

$$\begin{cases} z'(0) + \overline{c}_0 z(0) - \overline{c}_1 z(1) = 0, \\ z'(1) - \overline{f}_0 z(0) + \overline{f}_1 z(1) = 0. \end{cases}$$

Используя алгоритм из [4, гл. II, §4], выпишем асимптотики собственных чисел и собственных функций с точностью до $O(N^{-2})$ (см. Приложение, п. 1) и учтем условие нормировки. Получим

$$\begin{aligned} y_{N+1}(x)\overline{z_{N+1}(x)} = 1 + \cos(2\pi N x) - 2\,\frac{\sin(2\pi N x)}{\pi N}\,(c_0(1-x) + f_1 x) \\ + (-1)^N\,\frac{\sin(2\pi N x)}{\pi N}\,(c_1 - f_0)(1-2x) + O(N^{-2}). \end{aligned} \tag{15}$$

Как и в задаче Дирихле, первые два члена в этом разложении обнуляются при интегрировании и переходе к пределу в (13). Остальные члены в (15) порождают ряд, сходящийся в каждой точке отрезка $[0,1]$, причем частные суммы этого ряда равномерно ограничены. Обозначим сумму этого ряда $g(x)$. По теореме Лебега имеем

$$(\mathcal{C},1)\text{-}\sum_{N=1}^{\infty}\int\limits_{[0,1]} y_N(x)\overline{z_N(x)}\,\mathfrak{q}(dx) = \int\limits_{[0,1]} g(x)\,\mathfrak{q}(dx).$$

Но мы уже знаем, что для гладких функций $\mathfrak{q}$ левая часть этого равенства обращается в нуль. Поэтому $g(x) = 0$ для п.в. $x \in [0,1]$.

Осталось заметить, что, согласно известным формулам [7, 5.4.2.9 и 5.4.2.10], третий член в (15) дает при суммировании функцию, имеющую разрывы разве что на концах отрезка, четвертый член — непрерывную функцию (за счет множителя $1-2x$, уничтожающего разрыв в точке $\frac{1}{2}$), и остаток — непрерывную функцию. Поэтому g может отличаться от нуля разве что в точках 0 и 1. Однако в силу условия на $\mathfrak{q}$ эти точки не дают вклада в интеграл, и формула (9) доказана.

Случай $\mathbf{d_0 = 0}$, $\mathbf{d_1 = 1}$. Общий вид граничных условий в этом случае следующий:

$$\begin{cases} a_0 y(0) + b_0 y(1) = 0, \\ a_1 y'(0) + b_1 y'(1) + c_1 y(0) + f_1 y(1) = 0. \end{cases}$$

Не умаляя общности, можно считать, что $a_1 \neq 0$. Тогда граничные условия для сопряженного оператора имеют вид

$$\begin{cases} \bar{b}_0 y'(0) + \bar{a}_0 y'(1) + \dfrac{1}{\bar{a}_1} (\overline{c_1 b_0} - \overline{f_1 a_0}) y(0) = 0, \\ \bar{b}_1 y(0) + \bar{a}_1 y(1) = 0. \end{cases}$$

Для упрощения записи введем следующие обозначения:

$$\mathfrak{A} = b_1 a_0 + a_1 b_0; \qquad \mathfrak{B} = f_1 a_0 - c_1 b_0; \qquad \mathfrak{C} = a_1 a_0 + b_1 b_0$$

(напомним, что $\mathfrak{A} \neq 0$ ввиду регулярности граничных условий).

Возможность $\mathfrak{C} = \pm\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} = 0$: двукратные собственные числа. В этом случае систему граничных условий оператора $\mathbb{L}_0$ можно упростить:

$$a_0 y(0) + b_0 y(1) = 0, \qquad a_1 y'(0) + b_1 y'(1) = 0.$$

Будем считать, что[6] $\mathfrak{C} = -\mathfrak{A}$. Тогда имеется три варианта:

1. $a_1 + b_1 = 0$, $a_0 + b_0 = 0$;
2. $a_1 + b_1 = 0$, $a_0 + b_0 \neq 0$;
3. $a_1 + b_1 \neq 0$, $a_0 + b_0 = 0$.

Легко видеть, что третий вариант получается из второго заменой $\mathbb{L}_0$ на $\mathbb{L}_0^*$.

Вариант $\mathbf{a_1 + b_1 = 0, a_0 + b_0 = 0}$: жордановых клеток нет. Этот вариант наиболее прост. Граничные условия сводятся к периодическим:

$$y'(0) - y'(1) = 0, \qquad y(0) - y(1) = 0. \tag{16}$$

Оператор $\mathbb{L}_0$ с этими граничными условиями самосопряжен, его собственные числа и собственные функции имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_1^0 = 0, &\qquad y_1(x) = z_1(x) \equiv 1; \\ \lambda_{2N}^0 = \lambda_{2N+1}^0 = (2\pi N)^2, &\qquad y_{2N}(x) = z_{2N}(x) = C\sin(2\pi N x), \\ &\qquad y_{2N+1}(x) = z_{2N+1}(x) = C\cos(2\pi N x), \quad N \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

[6] В случае $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}$ формулы вполне аналогичны, если выписать асимптотики по степеням $N - \frac{1}{2}$.

С учетом условия нормировки имеем

$$y_{2N}(x)\overline{z_{2N}(x)} = 1 - \cos(4\pi Nx); \qquad y_{2N+1}(x)\overline{z_{2N+1}(x)} = 1 + \cos(4\pi Nx).$$

Попарное суммирование дает константу, исчезающую при интегрировании. Формула (9) очевидна.

Вариант $\mathbf{a_1 + b_1 = 0}$, $\mathbf{a_0 + b_0 \neq 0}$: жордановы клетки. Граничные условия имеют вид

$$\mathbb{L}_0 : a_0 y(0) + b_0 y(1) = 0, \quad y'(0) - y'(1) = 0;$$
$$\mathbb{L}_0^* : \overline{b}_0 z'(0) + \overline{a}_0 z'(1) = 0, \quad z(0) - z(1) = 0.$$

Выпишем собственные и присоединенные функции (см. Приложение, п. 2) и учтем условие (14). Получим

$$y_{2N}(x)\overline{\widehat{z}_{2N+1}(x)} + \widehat{y}_{2N+1}(x)\overline{z_{2N}(x)} = 2 + 2\cos(4\pi Nx)\,\frac{(a_0+b_0)(2x-1)}{a_0-b_0}. \tag{17}$$

Вычитая при необходимости подходящую гладкую функцию, подчиним $\mathfrak{q}$ дополнительным условиям

$$\int\limits_{[0,\frac{1}{2}]} (2x-1)\,\mathfrak{q}(dx) = \int\limits_{[\frac{1}{2},1]} (2x-1)\,\mathfrak{q}(dx) = 0. \tag{18}$$

Тогда заряд

$$\mathfrak{q}_1(dx) = (2x-1)\,\mathfrak{q}(dx)$$

удовлетворяет условиям предложения 4.1 на отрезках $[0,\frac{1}{2}]$ и $[\frac{1}{2},1]$, и потому правая часть (17) обнуляется при интегрировании и переходе к пределу в (13). Поскольку (18) влечет

$$\int\limits_{[0,1]} y_1(x)\overline{z_1(x)}\,\mathfrak{q}(dx) = 0,$$

формула (9) доказана.

Возможность $\mathfrak{C} = \pm\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \neq 0$: асимптотически близкие собственные числа. Как и в предыдущем случае, будем считать, что $\mathfrak{C} = -\mathfrak{A}$ (случай $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}$ разбирается аналогично). Перепишем условия на $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ в следующем виде:

$$(a_1+b_1)(a_0+b_0) = 0; \quad f_1 a_0 - c_1 b_0 \neq 0.$$

Мы вновь имеем три варианта:

- $a_0 + b_0 = 0$, $a_1 + b_1 \neq 0$, при этом $c_1 + f_1 \neq 0$;
- $a_0 + b_0 \neq 0$, $a_1 + b_1 = 0$;
- $a_0 + b_0 = 0$, $a_1 + b_1 = 0$, при этом $c_1 + f_1 \neq 0$.

Легко видеть, что второй вариант получается из первого заменой $\mathbb{L}_0$ на $\mathbb{L}_0^*$.

Первый вариант. Выпишем асимптотики собственных чисел и собственных функций с точностью до $O(N^{-4})$ (см. Приложение, п. 3.1) и учтем условие нормировки. Складывая члены, соответствующие асимптотически близким собственным числам, попарно, получим

$$\begin{aligned} y_{2N}(x)\overline{z_{2N}(x)} + y_{2N+1}(x)\overline{z_{2N+1}(x)} &= \eta_N^+(x)\overline{\zeta_N^+(x)} + \eta_N^-(x)\overline{\zeta_N^-(x)} \\ &= 2 + 2\cos(4\pi Nx)\,\frac{(a_1+b_1)(1-2x)}{a_1-b_1} \\ &\quad + 2\sin(4\pi Nx)\,\frac{(c_1+f_1)(1-2x)(b_1x-a_1(1-x))}{(a_1-b_1)^2\pi N} + O(N^{-2}). \end{aligned}$$

Первые два члена здесь суммируются, как в формуле (17), а последние — как в (15). Формула (9) доказана.

Третий вариант. В этом варианте систему граничных условий оператора $\mathbb{L}_0$ можно упростить:

$$y(0)-y(1)=0, \qquad y'(0)-y'(1)+c_1y(0)=0.$$

Выпишем асимптотики собственных чисел и собственных функций с точностью до $O(N^{-6})$ (см. Приложение, п. 3.2) и учтем условие нормировки. Складывая члены, соответствующие асимптотически близким собственным числам, попарно, получим

$$\begin{aligned} y_{2N}(x)\overline{z_{2N}(x)} + y_{2N+1}(x)\overline{z_{2N+1}(x)} &= \eta_N^+(x)\overline{\zeta_N^+(x)} + \eta_N^-(x)\overline{\zeta_N^-(x)} \\ &= 2 + \sin(4\pi Nx)\,\frac{c_1(2x-1)}{2\pi N} + O(N^{-2}). \end{aligned}$$

Этот ряд суммируется, как в формуле (15). Формула (9) доказана.

Возможность $\mathfrak{C} \neq \pm\mathfrak{A}$ (сильно регулярный случай). Для упрощения рассуждений мы воспользуемся следующей очевидной леммой.

Лемма 4.1. *Пусть* $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_k}{k} = 0$. *Тогда*

$$\begin{aligned} (\mathcal{C},1)\text{-}\sum_{k=1}^{\infty} a_k &= (\mathcal{C},1)\text{-}\sum_{k=1}^{\infty}(a_{2k-1}+a_{2k}) - \frac{1}{2}\cdot(\mathcal{C},1)\text{-}\lim_{k\to\infty} a_{2k} \\ &= (\mathcal{C},1)\text{-}\sum_{k=1}^{\infty}(a_{2k}+a_{2k+1}) + a_1 - \frac{1}{2}\cdot(\mathcal{C},1)\text{-}\lim_{k\to\infty} a_{2k+1}, \end{aligned} \tag{19}$$

т.е. сумма в левой части (19) *сходится, если сходится одно из выражений в правой части.*

Выпишем асимптотики собственных чисел и собственных функций с точностью до $O(N^{-2})$ (см. Приложение, п. 4). Очевидно, что

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\,y_N(x)\overline{z_N(x)}=0,$$

поэтому можно применить вторую часть формулы (19). Рассмотрим сначала попарные суммы

$$\begin{aligned}
&y_{2N}(x)\overline{z_{2N}(x)}+y_{2N+1}(x)\overline{z_{2N+1}(x)}\\
&\qquad=\eta_N^+(x)\overline{\zeta_N^+(x)}+\eta_N^-(x)\overline{\zeta_N^-(x)}\\
&\qquad=2+2\cos(4\pi Nx)V_0(x,\alpha)+\frac{2}{N}\sin(4\pi Nx)W_1(x,\alpha)+O(N^{-2}).
\end{aligned}$$

Первые два члена здесь суммируются, как в формуле (17), а последние — как в (15), с учетом соотношений (20).

Теперь рассмотрим последний предел в формуле (19). В зависимости от α он может быть переписан одним из двух способов:

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{C},1)\text{-}\lim_{N\to\infty}y_{2N+1}(x)\overline{z_{2N+1}(x)}\\
&\quad=1+\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{N=1}^{k}\cos(4\pi Nx)V_0(x,\pm\alpha)\\
&\qquad+\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{N=1}^{k}\sin(4\pi Nx)V_1(x,\pm\alpha)\\
&\qquad+\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{N=1}^{k}\frac{1}{N}\cos(4\pi Nx)W_0(x,\pm\alpha)\\
&\qquad+\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{N=1}^{k}\frac{1}{N}\sin(4\pi Nx)W_1(x,\pm\alpha).
\end{aligned}$$

Как и ранее, константа обнуляется при интегрировании. Второй и третий член равномерно ограничены и сходятся поточечно всюду, причем предел равен нулю всюду, кроме точек 0 и 1 (здесь мы вновь учли соотношения (20)). Оставшиеся члены сходятся к нулю равномерно. По теореме Лебега можно перейти к пределу под знаком интеграла. В силу условия на $\mathfrak{q}$ концы промежутка не дают вклада в интеграл, и формула (9) доказана. $\square$

§5. Доказательство основного результата

Доказательство теоремы 2.4. Мы начнем с формулы (12) из работы [6], которая при $n=2$ и $x=y$ дает (напомним, что $z=\lambda^{\frac{1}{2}}$)

$$G_0(x,x,\lambda)=\widetilde{G_0}(x,x,z)=\frac{\Delta_{1,1}(z)+e^{-2izx}\Delta_{1,2}(z)-e^{2izx}\Delta_{2,1}(z)-\Delta_{2,2}(z)}{2iz\Delta(z)}.$$

Здесь $\Delta(z)$ и $\Delta_{\alpha,\beta}(z)$ — определители матриц порядка n, определенных в [6, Sec. 2.1]. В нашем случае они имеют следующую асимптотику при $z\to\infty$:

$$\begin{aligned}
\Delta(z)&=\widehat{\Delta}(z)e^{iz(a-b)}(iz)^{d_0+d_1}\cdot(1+O(z^{-1})),\\
\widehat{\Delta}(z)&=\begin{vmatrix} a_0+b_0e^{iz(b-a)} & (-1)^{d_0}(a_0e^{iz(b-a)}+b_0)\\ a_1+b_1e^{iz(b-a)} & (-1)^{d_1}(a_1e^{iz(b-a)}+b_1)\end{vmatrix};\\
\Delta_{1,1}(z)&=\widehat{\Delta}_{1,1}(z)(iz)^{d_0+d_1}\cdot(1+O(z^{-1})),\\
\widehat{\Delta}_{1,1}(z)&=\begin{vmatrix} b_0 & (-1)^{d_0}(a_0e^{iz(b-a)}+b_0)\\ b_1 & (-1)^{d_1}(a_1e^{iz(b-a)}+b_1)\end{vmatrix};\\
\Delta_{1,2}(z)&=\widehat{\Delta}_{1,2}e^{iz(a+b)}(iz)^{d_0+d_1}\cdot(1+O(z^{-1})),\\
\widehat{\Delta}_{1,2}&=\begin{vmatrix} a_0 & b_0\\ a_1 & b_1\end{vmatrix};\\
\Delta_{2,1}(z)&=\widehat{\Delta}_{2,1}e^{-iz(a+b)}(iz)^{d_0+d_1}\cdot(1+O(z^{-1})),\\
\widehat{\Delta}_{2,1}&=(-1)^{d_0+d_1+1}\cdot\widehat{\Delta}_{1,2};\\
\Delta_{2,2}(z)&=\widehat{\Delta}_{2,2}(z)e^{iz(a-b)}(iz)^{d_0+d_1}\cdot(1+O(z^{-1})),\\
\widehat{\Delta}_{2,2}(z)&=\begin{vmatrix} a_0+b_0e^{iz(b-a)} & (-1)^{d_0}b_0\\ a_1+b_1e^{iz(b-a)} & (-1)^{d_1}b_1\end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

По условию, $z=R(w)w$ отделено от $(\lambda_N^0)^{\frac{1}{2}}$, и вследствие регулярности граничных условий (2) определитель $\widehat{\Delta}(z)$ отделен от нуля. Таким образом,

$$\begin{aligned}
&\widetilde{G_0}(x,x,z)\\
&=\frac{\widehat{\Delta}_{1,1}(z)e^{2iz(b-a)}+\widehat{\Delta}_{1,2}e^{2iz(b-x)}-\widehat{\Delta}_{2,1}e^{2iz(x-a)}-\widehat{\Delta}_{2,2}(z)}{2iz\widehat{\Delta}(z)}\cdot(1+O(z^{-1})).
\end{aligned}$$

Поскольку $z\in\Gamma_l$ лежит в верхней полуплоскости, все экспоненты в этом выражении равномерно ограничены и стремятся к нулю при $l\to\infty$ для каждого $x \in (a, b)$ и $w \in \Gamma^1 \cup \Gamma^2$. По теореме Лебега получаем

$$\lim_{l\to\infty} \int\limits_{\gamma_l} G_0(x,x,\lambda)^2\, d\lambda = \lim_{l\to\infty} \int\limits_{\Gamma_l} \widetilde{G}_0(x,x,z)^2\, 2z\, dz$$
$$= -\lim_{l\to\infty} \int\limits_{\Gamma_l} \Big(\frac{\widehat{\Delta}_{2,2}(z)}{\widehat{\Delta}(z)}\Big)^2 \frac{dz}{2z} = -\lim_{l\to\infty} \int\limits_{\Gamma_l} \frac{dz}{2z} = -\frac{\pi i}{2}. \quad \square$$

Доказательство теоремы 2.1. Пусть допустимая последовательность контуров γ_l построена согласно замечанию 1. Рассмотрим формулу (8) и перейдем к пределу при $l \to \infty$.

Теорема 2.3 показывает, что первое слагаемое в (8) сходится к сумме первых двух слагаемых в (7). Далее, подынтегральное выражение во втором слагаемом из (8) имеет суммируемую мажоранту ввиду оценки из предложения 3.2. Теорема 2.4 и теорема Лебега дают последнее слагаемое в (7).

Как указывалось в замечании 1 (см. также доказательство теоремы 2.3), если граничные условия (2) сильно регулярны, то числа $(\lambda_N^0)^{\frac{1}{2}}$ асимптотически разделены. Таким образом, предельный переход в теореме 2.3 соответствует суммированию ряда $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$ методом средних, и утверждение теоремы в этом случае доказано.

Если условия (2) регулярны, но не сильно регулярны, то числа $(\lambda_N^0)^{\frac{1}{2}}$ асимптотически либо попарно сближаются, либо попарно совпадают. Таким образом, предельный переход в теореме 2.3 соответствует суммированию ряда $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$ в порядке, указанном в формулировке теоремы 2.1: сначала члены ряда, отвечающие асимптотически близким или совпадающим собственным числам, складываются попарно, а затем полученный ряд суммируется методом средних. Таким образом, утверждение теоремы доказано и в этом случае. $\square$

Замечание 3. В случае не сильно регулярных граничных условий заменить “сложное” суммирование обычным методом средних, вообще говоря, нельзя. Приведем простой пример.

Пусть $\mathbb{L}$ — оператор на отрезке $[0, 1]$, порождаемый простейшим дифференциальным выражением $-D^2$ и периодическими граничными условиями (16), и пусть $\mathfrak{q}(x) = \delta(x - \frac{1}{2}) - 1$. Тогда легко видеть, что собственные функции

$$y_{2N}(x) = C \sin(2\pi N x), \quad N \in \mathbb{N},$$

сохраняются (собственные числа $\lambda_{2N} = (2\pi N)^2$, естественно, уменьшаются на 1), а собственные функции

$$y_{2N-1}(x) = C \cos(2\pi N x), \quad N \in \mathbb{N},$$

превращаются в

$$\widetilde{y}_{2N-1}(x) = C\cos(\varkappa_N x),$$

где $\varkappa_N$ — положительные корни уравнения $2\varkappa = \operatorname{ctg}(\varkappa/2)$. Таким образом,

$$\lambda_{2N-1}(\mathfrak{q}) - \lambda_{2N-1} = \varkappa_N^2 - (2\pi(N-1))^2 \to 1 \quad \text{при} \quad N \to \infty,$$

а $\lambda_{2N}(\mathfrak{q}) - \lambda_{2N} \equiv -1$. Поэтому лемма 4.1 показывает, что при суммировании обычным методом средних результат изменится.

Приложение

1. Случай $\mathbf{d_0 = d_1 = 1}$. Корни из собственных чисел оператора $\mathbb{L}_0$ имеют следующую асимптотику:

$$\rho_{N+1} := (\lambda_{N+1}^0)^{\frac{1}{2}} = \pi N + \frac{f_1 - c_0}{\pi N} + (-1)^N \frac{c_1 - f_0}{\pi N} + O(N^{-2}).$$

Собственные функции операторов $\mathbb{L}_0$ и $\mathbb{L}_0^*$ при $\rho_N \neq 0$ имеют вид

$$y_N(x) = C_1 \left(\cos(\rho_N x) - c_0 \frac{\sin(\rho_N x)}{\rho_N} + f_0 \frac{\sin(\rho_N(1-x))}{\rho_N} \right);$$

$$\overline{z_N(x)} = C_2 \left(\cos(\rho_N x) - c_0 \frac{\sin(\rho_N x)}{\rho_N} - c_1 \frac{\sin(\rho_N(1-x))}{\rho_N} \right).$$

Асимптотика собственных функций имеет вид

$$y_{N+1}(x) = C_1 \left(\cos(\pi N x) - \sin(\pi N x) \frac{c_0(1-x) + f_1 x}{\pi N} \right.$$
$$\left. - (-1)^N \sin(\pi N x) \frac{f_0(1-x) + c_1 x}{\pi N} \right) + O(N^{-2});$$

$$\overline{z_{N+1}(x)} = C_2 \left(\cos(\pi N x) - \sin(\pi N x) \frac{c_0(1-x) + f_1 x}{\pi N} \right.$$
$$\left. + (-1)^N \sin(\pi N x) \frac{c_1(1-x) + f_0 x}{\pi N} \right) + O(N^{-2}).$$

Асимптотика скалярных произведений:

$$\langle y_{N+1}, z_{N+1} \rangle = \frac{C_1 C_2}{2} + O(N^{-2}).$$

2. Случай $\mathbf{d_0 = 0}$, $\mathbf{d_1 = 1}$. Жордановы клетки. Напомним, что мы рассматриваем случай $\mathfrak{C} = -\mathfrak{A}$. В этом случае у операторов $\mathbb{L}_0$ и $\mathbb{L}_0^*$ имеется собственное число $\lambda_1^0 = 0$, которому соответствуют собственные функции $y_1(x) = x - \frac{a_0}{a_0 + b_0}$ и $z_1(x) \equiv \mathrm{const}$, где константа подбирается из условия нормировки. Остальные собственные числа имеют вид

$$\lambda_{2N}^0 = \lambda_{2N+1}^0 = (2\pi N)^2, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Соответствующие собственные и присоединенные функции, удовлетворяющие первой паре условий (14):

$$y_{2N}(x) = C_1 \sin(2\pi N x),$$
$$\widehat{y}_{2N+1}(x) = C_1\Big(\frac{x\cos(2\pi N x)}{4\pi N} + \frac{\sin(2\pi N x)}{16\pi^2 N^2} - \frac{b_0 \cos(2\pi N x)}{4\pi N(a_0+b_0)}\Big);$$

$$\overline{z_{2N}(x)} = C_2 \cos(2\pi N x),$$
$$\overline{\widehat{z}_{2N+1}(x)} = C_2\Big(-\frac{x\sin(2\pi N x)}{4\pi N} - \frac{\cos(2\pi N x)}{16\pi^2 N^2} + \frac{a_0 \sin(2\pi N x)}{4\pi N(a_0+b_0)}\Big).$$

Скалярные произведения:

$$\langle y_{2N}, \widehat{z}_{2N+1}\rangle = \langle \widehat{y}_{2N+1}, z_{2N}\rangle = \frac{C_1 C_2(a_0-b_0)}{16\pi N(a_0+b_0)}$$

(заметим, что $a_0 \neq b_0$, так как $\mathfrak{A} \neq 0$).

3. Случай $\mathbf{d_0 = 0}$, $\mathbf{d_1 = 1}$. Асимптотически близкие собственные числа. Напомним, что мы вновь рассматриваем случай $\mathfrak{C} = -\mathfrak{A}$. В этом случае все собственные числа оператора $\mathbb{L}_0$, кроме λ_1^0, объединяются в пары λ_{2N} и λ_{2N+1}, $N \in \mathbb{N}$, сближающиеся при $N \to \infty$. Корни из собственных чисел этих пар обозначим $\rho_N^{\pm}$. При этом один из них (не умаляя общности, ρ_N^+) равен $2\pi N$. В связи с тем, что скалярные произведения соответствующих собственных функций (будем обозначать их $\eta_N^{\pm}$ и $\zeta_N^{\pm}$) стремятся к нулю при $N \to \infty$, асимптотики собственных чисел ρ_N^- и собственных функций η_N^-, ζ_N^- выпишем с точностью до $O(N^{-4})$ в варианте 3.1 и с точностью до $O(N^{-6})$ — в варианте 3.2.

3.1. Вариант $\mathbf{a_0 + b_0 = 0}$, $\mathbf{a_1 + b_1 \neq 0}$. В этом варианте получаем

$$\rho_N^- = 2\pi N + \frac{\mathfrak{B}}{\pi N \mathfrak{A}} - \frac{6\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{B}^3}{12\mathfrak{A}^3 N^3 \pi^3} + O(N^{-4}).$$

Собственные функции операторов $\mathbb{L}_0$ и $\mathbb{L}_0^*$ имеют вид

$$\eta_N^+(x) = C_1\Big((a_1+b_1)\cos(2\pi N x) - (c_1+f_1)\,\frac{\sin(2\pi N x)}{2\pi N}\Big),$$
$$\overline{\zeta_N^+(x)} = C_2 \sin(2\pi N x);$$

$$\eta_N^-(x) = C_1\Big(a_1\cos(\rho_N^- x) + b_1\cos(\rho_N^-(1-x)) - c_1\,\frac{\sin(\rho_N^- x)}{\rho_N^-} + f_1\,\frac{\sin(\rho_N^-(1-x))}{\rho_N^-}\Big),$$
$$\overline{\zeta_N^-(x)} = C_2\Big(b_1\sin(\rho_N^- x) - a_1\sin(\rho_N^-(1-x))\Big).$$

Асимптотика скалярных произведений:

$$\langle \eta_N^+, \zeta_N^+ \rangle = -\frac{C_1C_2(c_1+f_1)}{4\pi N};$$
$$\langle \eta_N^-, \zeta_N^- \rangle = C_1C_2\Big(\frac{(c_1+f_1)(a_1+b_1)}{4\pi N} - \frac{(c_1+f_1)^2(a_1f_1+c_1b_1)}{8(a_1-b_1)^2\pi^3N^3}\Big) + O(N^{-4})$$

(заметим, что $a_1 \neq b_1$, так как $\mathfrak{A} \neq 0$).

3.2. Вариант $\mathbf{a_0+b_0=0}$, $\mathbf{a_1+b_1=0}$. В этом варианте получаем

$$\rho_N^- = 2\pi N - \frac{c_1}{2\pi N} + \frac{c_1^3-12c_1^2}{96\pi^3N^3} + \frac{c_1^4-6c_1^3}{96\pi^5N^5} + O(N^{-6}).$$

Собственные функции операторов $\mathbb{L}_0$ и $\mathbb{L}_0^*$ имеют вид

$$\eta_N^+(x) = C_1\sin(2\pi Nx), \qquad \overline{\zeta_N^+(x)} = C_2\sin(2\pi Nx);$$

$$\eta_N^-(x) = C_1\Big(\sin(\rho^- x) + \sin(\rho^-(1-x))\Big),$$
$$\overline{\zeta_N^-(x)} = C_2\Big(\sin(\rho^- x) + \sin(\rho^-(1-x))\Big).$$

Асимптотика скалярных произведений:

$$\langle \eta_N^+, \zeta_N^+ \rangle = \frac{C_1C_2}{2};$$
$$\langle \eta_N^-, \zeta_N^- \rangle = C_1C_2\Big(\frac{c_1^2}{8\pi^2N^2} - \frac{c_1^4-4c_1^3}{128\pi^4N^4}\Big) + O(N^{-6}).$$

4. Случай $\mathbf{d_0=0}$, $\mathbf{d_1=1}$. Разделенные собственные числа. В этом случае корни из собственных чисел λ_{2N}, λ_{2N+1}, $N\in\mathbb{N}$, оператора $\mathbb{L}_0$ образуют две последовательности, сходящиеся к двум различным арифметическим прогрессиям с разностью 2π. Обозначим эти корни $\rho_N^{\pm}$. Тогда при $N\to\infty$ имеем

$$\rho_N^{\pm} = 2\pi N \pm \alpha + \frac{\mathfrak{B}}{2\pi N\mathfrak{A}} + O(N^{-2}),$$

где

$$\alpha = i\log\left(-\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} - \sqrt{\left(\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}\right)^2 - 1}\right),$$

а ветвь логарифма выбирается так, что $|\Re(\alpha)| < \pi$ (выбор другой ветви логарифма приводит к перенумерации собственных чисел). Отметим, что из условия $\mathfrak{C} \neq \pm\mathfrak{A}$ вытекает $\sin(\alpha)\neq 0$.

Собственные функции операторов $\mathbb{L}_0$ и $\mathbb{L}_0^*$ имеют вид

$$\eta_N^{\pm}(x) = a_0 \sin(\rho_N^{\pm} x) - b_0 \sin(\rho_N^{\pm}(1-x)),$$
$$\overline{\zeta_N^{\pm}(x)} = b_0 \cos(\rho_N^{\pm} x) + a_0 \cos(\rho_N^{\pm}(1-x)) + \mathfrak{B}\,\frac{\sin(\rho_N^{\pm} x)}{a_1 \rho_N^{\pm}}.$$

Асимптотика скалярных произведений:

$$\langle \eta_N^{\pm}, \zeta_N^{\pm} \rangle = \pm \sin(\alpha)\frac{a_0^2 - b_0^2}{2} + \mathfrak{B}\frac{\mathfrak{A}a_0 + (\mathfrak{A}b_0 + a_1(a_0^2 - b_0^2))\cos(\alpha)}{4\pi\mathfrak{A}a_1 N} + O(N^{-2})$$

(заметим, что $a_0 \neq \pm b_0$, так как $\mathfrak{C} \neq \pm\mathfrak{A}$).

Нормированные произведения имеют следующую асимптотику:

$$\begin{aligned}
\eta_N^{\pm}(x)\overline{\zeta_N^{\pm}(x)} = 1 &+ \cos(4\pi N x)V_0(x, \pm\alpha) + \sin(4\pi N x)V_1(x, \pm\alpha) \\
&+ \frac{1}{N}\cos(4\pi N x)W_0(x, \pm\alpha) \\
&+ \frac{1}{N}\sin(4\pi N x)W_1(x, \pm\alpha) + O(N^{-2}),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
V_0(x,\alpha) &= \frac{\sin(\alpha(2x-1))}{(a_0^2 - b_0^2)\sin(\alpha)}\,(a_0^2 + b_0^2 + 2a_0 b_0 \cos(\alpha)); \\
V_1(x,\alpha) &= \frac{\cos(\alpha(2x-1))}{(a_0^2 - b_0^2)\sin(\alpha)}\,(a_0^2 + b_0^2 + 2a_0 b_0 \cos(\alpha)); \\
W_0(x,\alpha) &= \frac{\mathfrak{B}(2\mathcal{R}_1 \sin(\alpha)\cos(2\alpha x) - \mathcal{R}_2 \sin(2\alpha x))}{4\mathfrak{A}a_1(a_0^2 - b_0^2)^2 \pi \sin^2(\alpha)}; \\
W_1(x,\alpha) &= -\frac{\mathfrak{B}(2\mathcal{R}_1 \sin(\alpha)\sin(2\alpha x) + \mathcal{R}_2 \cos(2\alpha x))}{4\mathfrak{A}a_1(a_0^2 - b_0^2)^2 \pi \sin^2(\alpha)}; \\
\mathcal{R}_1 &= a_0 b_0 (3\mathfrak{A}b_0 + a_1(a_0^2 - b_0^2)(1+2x)) \\
&\quad + 2(a_0^2 + b_0^2)(\mathfrak{A}b_0 + a_1(a_0^2 - b_0^2)x)\cos(\alpha) \\
&\quad + a_0 b_0(\mathfrak{A}b_0 + a_1(a_0^2 - b_0^2)(2x-1))\cos(2\alpha); \\
\mathcal{R}_2 &= 4\mathfrak{A}a_0^2 b_0 + 2a_1(a_0^4 - b_0^4)(1-x) \\
&\quad + a_0(\mathfrak{A}(2a_0^2 + 5b_0^2) + a_1 b_0(a_0^2 - b_0^2)(5-2x))\cos(\alpha) \\
&\quad + 2(a_0^2 + b_0^2)(\mathfrak{A}b_0 + a_1(a_0^2 - b_0^2)x)\cos(2\alpha) \\
&\quad + a_0 b_0(\mathfrak{A}b_0 + a_1(a_0^2 - b_0^2)(2x-1))\cos(3\alpha).
\end{aligned}$$

Лемма 5.1. *Функции* $V_0(x,\alpha)$, $V_1(x,\alpha)$, $W_0(x,\alpha)$ *и* $W_1(x,\alpha)$ *непрерывны по обеим переменным при* $\sin(\alpha) \neq 0$ *и удовлетворяют следующим тождествам*:

$$\begin{aligned} &V_0(x,\alpha) \equiv V_0(x,-\alpha), \qquad &&V_1(x,\alpha) \equiv -V_1(x,-\alpha);\\ &W_1(x,\alpha) \equiv W_1(x,-\alpha), &&W_0(x,\alpha) \equiv -W_0(x,-\alpha);\\ &V_0(\tfrac{1}{2},\alpha) \equiv 0, &&W_1(\tfrac{1}{2},\alpha) \equiv 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Доказательство. Поскольку $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ — четные функции α, все утверждения леммы очевидны, кроме последнего. Но, учитывая соотношение

$$\mathfrak{A}\cos(\alpha) + \mathfrak{C} = 0,$$

числитель в выражении для W_1 можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} 2\mathcal{R}_1\sin(\alpha)\sin(2\alpha x) + \mathcal{R}_2\cos(2\alpha x) = 2\sin(\alpha(x-\tfrac{1}{2}))&\\ \times\Big(\big(a_0a_1b_0(a_0^2-b_0^2)(2x-1) + a_0b_0^2\mathfrak{A}\big)\sin(\alpha(\tfrac{5}{2}-x))&\\ + \big(2a_1(a_0^4-b_0^4)x + 2b_0(a_0^2+b_0^2)\mathfrak{A}\big)\sin(\alpha(\tfrac{3}{2}-x))&\\ - \big(5a_0^3a_1b_0 + a_0a_1b_0^3 + a_0^4b_1 + 5a_0^2b_0^2b_1\big)\sin(\alpha(x-\tfrac{1}{2}))&\\ - \big(2a_1(a_0^4-b_0^4)(1-x) + 4a_0^2b_0\mathfrak{A}\big)\sin(\alpha(\tfrac{1}{2}+x))&\\ + \big(a_0a_1b_0(a_0^2-b_0^2)(2x-1) - a_0^3\mathfrak{A}\big)\sin(\alpha(\tfrac{3}{2}+x))\Big)&, \end{aligned}$$

и последнее равенство в (20) доказано. □

Список литературы

[1] Винокуров В. А., Садовничий В. А., *Асимптотика собственных значений и собственных функций и формула следа для потенциала, содержащего δ-функции*, Дифференц. уравнения **38**(2002), №6, 735–751.

[2] Гельфанд И. М., Левитан Б. М., *Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка*, Докл. АН СССР **88** (1953), №4, 593–596.

[3] Конечная Н. Н., Сафонова Т. А., Тагирова Р. Н., *Асимптотика собственных значений и регуляризованный след первого порядка оператора Штурма–Лиувилля с δ-потенциалом*, Вестн. САФУ **2016**, №1, 104–113.

[4] Наймарк М. А., *Линейные дифференциальные операторы*, 2-е изд., Наука, М., 1969.

[5] Nazarov A. I., *Exact L_2-small ball asymptotics of Gaussian processes and the spectrum of boundary-value problems*, J. Theoret. Probab. **22** (2009), no. 3, 640–665.

[6] Nazarov A. I., Stolyarov D. M., Zatitskiy P. B., *The Tamarkin equiconvergence theorem and a first-order trace formula for regular differential operators revisited*, J. Spectr. Theory **4** (2014), no. 2, 365–389.

[7] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И., *Интегралы и ряды. Элементарные функции*, Наука, М., 1981.

[8] Савчук А. М., *Регуляризованный след первого порядка оператора Штурма–Лиувилля с δ-потенциалом*, Успехи мат. наук **55** (2000), №6, 155–156.

[9] Савчук А. М., Шкаликов А. А., *Формула следа для операторов Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами*, Мат. заметки **69** (2001), №3, 427–442.

[10] Садовничий В. А., Подольский В. Е., *Следы операторов*, Успехи мат. наук **61** (2006), №5, 89–156.

[11] Тамаркин Я. Д., *О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды*, Петроград, 1917.

[12] Шкаликов А. А., *Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях*, Тр. семин. им. И. Г. Петровского **9** (1983), 140–179.

[13] Шевченко Р. Ф., *О следе дифференциального оператора*, Докл. АН СССР **164** (1965), 62–65.

С.-Петербургский госуниверситет
E-mail: egor_maths@list.ru

Поступило 29 июня 2017 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А. Стеклова РАН;
С.-Петербургский госуниверситет
E-mail: al.il.nazarov@gmail.com