СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XV, № 3 Май — Июнь 1974

УДК 519.4

Б. Р. ФРЕНКИН

О Σ-СВОБОДНЫХ МОДЕЛЯХ

§ 1. Введение. Основные определения

A) Хорошо известное понятие свободной алгебры неоднократно обобщалось различными способами (см. ([1]), стр. 315; ([2–5]); ([6]), стр. 307). Все эти обобщения, кроме данного в ([4]), укладываются в следующую схему.

1°. Выделяется некоторый класс $\mathfrak{K}$ моделей над данной областью предикатов.

2°. Определяется понятие гомоморфизма $\mathfrak{K}$-моделей.

3°. Каждому (непустому) подмножеству X произвольной $\mathfrak{K}$-модели M эффективным образом сопоставляется некоторая $\mathfrak{K}$-модель N, содержащаяся в M и содержащая X. При этом говорят, что X *порождает* N.

4°. Модель F *называется свободной* $\mathfrak{K}$*-моделью с базисом* X, где X — подмножество в F, если

а) $F \in \mathfrak{K}$;

б) X порождает F (в смысле 3°);

в) всякое отображение (в ([5]) — частичное отображение) множества X в произвольную $\mathfrak{K}$-модель M продолжается до гомоморфизма (в смысле 2°) F в M.

В этой статье мы введем понятие Σ-свободной $\mathfrak{K}$-модели, которое также подпадает под эту схему и охватывает обобщения свободных алгебр, введенные в ([1, 3, 6]). На Σ-свободные модели переносится ряд свойств свободных алгебр (см., например, § 3). Результаты § 4 и § 5 показывают, что Σ-свободные модели могут оказаться полезными при изучении аксиоматизируемых классов моделей, в частности хорновских положительных классов (см. п. *D* § 4).

B) Мы не стремились сформулировать каждый результат в наибольшей общности. Некоторые утверждения по существу являются категорными. Для единообразия мы, однако, всюду ограничивались случаем Σ-свободных $\mathfrak{K}$-моделей.

Большинство результатов использует аксиому выбора.

Относительно понятий, которые используются, но не определяются в статье, см. ([7, 1, 6, 8]). Под *предложением* понимается, как обычно, формула узкого исчисления предикатов с равенством, не содержащая свободных переменных (но, быть может, содержащая индивидные константы). Мы будем рассматривать только *предваренные* предложения (см. ([7]), стр. 220). Вместо терминов «область предикатов», «множество предложений над областью предикатов Ω (определяющее аксиоматизируемый класс $\mathfrak{K}$)» в статье употребляются термины «сигнатура», «(Ω—) описание (класса $\mathfrak{K}$)».

«Класс моделей» всегда означает «класс моделей одинаковой сигнатуры»; класс моделей называется *нетривиальным*, если в нем имеется модель, содержащая более одного элемента.

Будем придерживаться следующих обозначений: Ω — сигнатура; Ω_n (где n — натуральное число) — совокупность всех n-арных предикатов из Ω; $\mathfrak{O}$ — класс всех Ω-моделей; $\mathfrak{K}$ — некоторый непустой класс моделей; Σ — некоторое описание; $\mathfrak{K}_\Sigma$ — аксиоматизируемый класс, заданный описанием Σ. Как обычно, запись $M \vdash S$ ($M \neg\vdash S$), где $M \in \mathfrak{O}$, S — предложение над Ω, выражает тот факт, что S выполнено (не выполнено) в M; запись $\mathfrak{K} \vdash \Sigma$ ($\mathfrak{K} \neg\vdash \Sigma$) означает, что $M \vdash S$ для всех (не для всех) $M \in \mathfrak{K}$, $S \in \Sigma$. Выражение «предложения S_1 и S_2 равносильны на $\mathfrak{K}$» означает, что $\mathfrak{K} \vdash (S_1 \Leftrightarrow S_2)$.

Если в сигнатуру модели M входит n-арный предикат P и этот предикат истинен на элементах $a_1, \ldots, a_n$ из M, то будем говорить, что в M *выполнено соотношение* $P(a_1, \ldots, a_n)$. Говоря, что модель M состоит из таких-то элементов с такими-то соотношениями, мы имеем в виду, что в M выполнены *только* эти соотношения.

Мы рассматриваем только *непустые* множества и *непустые* модели, что не везде существенно.

Гомоморфизмом будем называть слабый гомоморфизм Ω-моделей, т. е. любое такое отображение φ: $M \to N$ ($M, N \in \mathfrak{O}$), что для всех натуральных n, всех $P \in \Omega_n$ и всех $a_1, \ldots, a_n \in M$ из $P(a_1, \ldots, a_n)$ следует $P(a_1\varphi, \ldots, a_n\varphi)$ в N. Термин *гомоморфный образ* употребляется в том же смысле, что и в ([7]), но не в ([6]): Ω-модель M является гомоморфным образом Ω-модели N, если существует гомоморфизм N на M. Как обычно, подмодель N модели M — это подмножество в M, на котором выполнены те же соотношения, что и в M (для элементов из N).

Для данного класса моделей $\mathfrak{K}$ совокупность всех гомоморфных образов, подмоделей, элементарных подмоделей, прямых произведений, ультрапроизведений непустых (не обязательно конечных) семейств $\mathfrak{K}$-моделей обозначается соответственно $\mathbf{H}(\mathfrak{K})$, $\mathbf{S}(\mathfrak{K})$, $\mathbf{E}(\mathfrak{K})$, $\mathbf{P}(\mathfrak{K})$, $\mathbf{U}(\mathfrak{K})$. Приведем некоторые свойства операторов $\mathbf{H}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{U}$, используемые в дальнейшем:

(1.1) $\mathbf{PH}(\mathfrak{K}) \subseteq \mathbf{HP}(\mathfrak{K})$;

(1.2) $\mathbf{U}(\mathfrak{K}) \subseteq \mathbf{HP}(\mathfrak{K})$;

(1.3) $\mathbf{PE}(\mathfrak{K}) \subseteq \mathbf{EP}(\mathfrak{K})$;

(1.4) $\mathbf{UE}(\mathfrak{K}) \subseteq \mathbf{EU}(\mathfrak{K})$.

Свойства (1.1) и (1.2) очевидны; (1.3) вытекает из того, что (кратко говоря) прямое произведение элементарных подмоделей есть элементарная подмодель прямого произведения (см. ([9]); ([6]); стр. 291); (1.4) вытекает из основного свойства ультрапроизведений (см. ([7]), стр. 227; ([1]), стр. 205).

Пренебрегающий функтор (см. ([7]), стр. 125) из категории Ω-моделей и гомоморфизмов в категорию множеств и отображений обозначаем St. Для удобства ссылок сформулируем очевидное

Предложение 1.1. *Функтор* St *перестановочен с прямыми произведениями: если модель M является прямым произведением моделей M_i*

($i \in I$) *с проекциями* π_i (*см.* ([1]), *стр.* 71—72; *см. также стр.* 73—75), *то множество* $\mathrm{St}(M)$ — *прямое произведение множеств* $\mathrm{St}(M_i)$ *с проекциями* $\mathrm{St}(\pi_i)$.

Для краткости мы иногда говорим о подмножестве модели (а не множества ее элементов), отображении множества в модель и т. п. Умножение гомоморфизмов и отображений — *слева направо*; умножение операторов, применяемых к классам моделей,— *справа налево*.

Алгебраическая n-арная операция ω рассматривается как $(n+1)$-арный предикат P_ω, подчиненный условиям

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists x P_\omega(x_1, \ldots, x_n, x); \tag{2.1}$$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y \forall z (P_\omega(x_1, \ldots, x_n, y) \& P_\omega(x_1, \ldots, x_n, z)) \Rightarrow (y=z) \tag{2.2}$$

(запись $P_\omega(x_1, \ldots, x_n, x)$ равнозначна $x_1 \ldots x_n \omega = x$). В случае частичных операций остается лишь условие (2.2). Сообразно этому алгебраические системы в смысле Мальцева (в том числе универсальные алгебры) трактуются как частный случай моделей.

Конец доказательства обозначается ■. Остальные определения и обозначения вводятся по ходу дела.

C) Чтобы определить понятие Σ-свободной $\mathfrak{K}$-модели в соответствии с изложенной в п. *A* схемой, мы должны задать класс $\mathfrak{K}$, понятие гомоморфизма и процедуру порождения. В качестве $\mathfrak{K}$ возьмем произвольный класс Ω-моделей; понятие гомоморфизма определено в п. *B*. Процедуру порождения мы введем такую же, как и Грэтцер (([6]), стр. 301—303), но в более общей ситуации.

Пусть S — некоторое предложение над Ω, $M \in \mathfrak{O}$. Если $M \vdash S$, то каждому квантору существования в S (если таковые имеются) отвечает набор разрешающих (сколемских) функций на M; их определение можно найти, например, в ([10]), стр. 177—178; ([8]), стр. 81—82, а в терминах «обратных элементов» — в ([6]), стр. 301—302. Если же $M \neg\vdash S$, то по аналогии можно построить *частичные разрешающие функции* (быть может, нигде не определенные). Фиксируем теперь Ω-описание Σ, Ω-модель M и множество $X \subseteq \mathrm{St}(M)$, $X \neq \varnothing$. Рассмотрим все (частичные) разрешающие функции на M, отвечающие всем кванторам существования во всех предложениях из Σ. Присоединим к X значения всех этих (частичных) функций на всевозможных элементах (наборах элементов) из X. Полученное множество обозначим через X_1. Применив к нему ту же процедуру, получим множество X_2, и т. д. Множество $\overline{X}(\Sigma, M) = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ назовем Σ-*замыканием*, а определенную на нем подмодель $\overline{X}_\Omega(\Sigma, M)$ модели M, соответственно, Ω-Σ-*замыканием* множества X в M.

Определение 1. Множество X Σ-*порождает* Ω-модель M, если $\varnothing \neq X \subseteq \mathrm{St}(M)$ и $\overline{X}(\Sigma, M) = \mathrm{St}(M)$ (что равносильно $\overline{X}_\Omega(\Sigma, M) = M$).

Определение 2. Пусть Ω — сигнатура, Σ — некоторое Ω-описание,

$\mathfrak{K}\subseteq\mathfrak{D}$, $F\in\mathfrak{D}$, $X\subseteq\mathrm{St}(F)$, $|X|=\alpha>0$. Модель F называется *Σ-свободной $\mathfrak{K}$-моделью ранга α с базисом X*, если:

а) $F\in\mathfrak{K}$;

б) X Σ-порождает F;

в) всякое отображение X в любую $\mathfrak{K}$-модель M продолжается (быть может, не единственным образом) до гомоморфизма F в M.

D) Примеры. 1°. Пусть $\mathfrak{K}$ — произвольный класс алгебраических систем в смысле Мальцева ((1), стр. 46), Σ — совокупность предложений (2.1), (2.2), где ω — всевозможные операции из сигнатуры класса $\mathfrak{K}$ (которая может содержать также предикаты помимо операций). Тогда Σ-порождение — не что иное, как обычное порождение с помощью алгебраических операций, а Σ-свободные $\mathfrak{K}$-модели — это свободные в классе $\mathfrak{K}$ алгебраические системы.

2°. Пусть $\mathfrak{K}$ — некоторое многообразие частичных алгебр в смысле Бурмайстера, (3); Σ — совокупность предложений (2.1), (2.2), где ω — всевозможные частичные операции из сигнатуры класса $\mathfrak{K}$ (заметим, что, вообще говоря, (2.1) не выполняется в $\mathfrak{K}$). Тогда Σ-свободные $\mathfrak{K}$-модели совпадают с $\mathfrak{K}$-свободными частичными алгебрами Бурмайстера, (3).

3°. В определении свободных Σ-систем Грэтцера (см. (6), стр. 307) процедура порождения та же, что и в определении 2, но $\mathfrak{K}=\mathfrak{K}_\Sigma$ и понятие гомоморфизма значительно у́же. Поэтому определение свободных Σ-систем не есть частный случай определения Σ-свободных $\mathfrak{K}$-моделей, но первые входят в число вторых.

Замечание. Пусть Σ содержит предложение S, начинающееся с квантора существования (разрешающие функции, которые отвечают ему,— константы), и пусть $\mathfrak{K}\vdash S$. Тогда для пустого $X\subseteq\mathrm{St}(M)$, $M\in\mathfrak{K}$, описанная в п. *C* процедура дает $\overline{X}(\Sigma, M)\neq\varnothing$. Поэтому для таких Σ и $\mathfrak{K}$ имеет смысл говорить о модели, порожденной пустым множеством. Наши определения и результаты нетрудно переформулировать для этого случая; мы не будем отдельно упоминать о нем. При таком подходе обобщение свободных алгебр, введенное в (2), также охватывается понятием Σ-свободной $\mathfrak{K}$-модели; впрочем, это обобщение фактически является частным случаем понятия относительно свободной алгебраической системы (в смысле Мальцева, (1)) ранга 0.

§ 2. Простейшие свойства Σ-свободных моделей

A) Предложение 2.1. *Если $M\in\mathfrak{D}$, $\varnothing\neq X\subseteq\mathrm{St}(M)$, то X Σ-порождает свое Ω-Σ-замыкание* в M ■.

Предложение 2.2. *Пусть M, $N\in\mathfrak{D}$, N — подмодель* в M, $X\subseteq\mathrm{St}(N)$. *Тогда*

а) *если X Σ-порождает N, $\mathrm{St}(N)$ Σ-порождает M, то X Σ-порождает M (транзитивность Σ-порождения)*;

б) *если X Σ-порождает M, то X не обязательно Σ-порождает N.*

Доказательство. а) Очевидно.

б) Пусть $\Omega=\Omega_2=\{P\}$; Σ состоит из предложения $\forall x\exists y P(x, y)$; M — из элементов a, b, c с соотношениями $P(a, b)$, $P(b, c)$, $P(c, a)$; N — подмодель

в M, состоящая из элементов, a, c (с соотношением $P(c, a)$); $X=\{a\}$. Тогда $\overline{X}(\Sigma, M)=\mathrm{St}(M)$, $\overline{X}(\Sigma, N)=X$. ■

Предложение 2.3. *Если* $M\in\mathfrak{D}$, $M\vdash\Sigma$, $\varnothing\neq X\subseteq\mathrm{St}(M)$, *то* $\overline{X}_\Omega(\Sigma, M)\vdash\vdash\Sigma$. ■

Очевиден и обратный факт: достаточно положить $X=\mathrm{St}(M)$.

Во избежание недоразумений отметим, что в предположениях предложения 2.3 $\overline{X}_\Omega(\Sigma, M)$ не обязательно является *наименьшей* подмоделью в M, содержащей X и удовлетворяющей Σ, даже если такая и существует.

Предложение 2.4. *Если* Σ *состоит из универсальных предложений, то для любых* $M\in\mathfrak{D}$, $X\subseteq\mathrm{St}(M)$, $X\neq\varnothing$ *имеем* $X(\Sigma, M)=X$. ■

B) Определение 3. Пусть Σ_1 и Σ_2 — два Ω-описания. Будем говорить, что *Σ_1-порождение совпадает с Σ_2-порождением,* если для любых $M\in\mathfrak{D}$, $X\subseteq\mathrm{St}(M)$, $X\neq\varnothing$ имеем $\overline{X}(\Sigma_1, M)=\overline{X}(\Sigma_2, M)$.

Предложение 2.5. *Если Σ_1-порождение совпадает с Σ_2-порождением, то всякая Σ_1-свободная $\mathfrak{K}$-модель является Σ_2-свободной $\mathfrak{K}$-моделью с тем же базисом.* ■

Предложение 2.6. *Пусть* Σ — *произвольное Ω-описание. Тогда найдется такое Ω-описание T, состоящее из тождественно истинных предложений, что Σ-порождение и T-порождение совпадают.*

Доказательство. Вычеркнем из Σ все универсальные предложения. Если предложение S при этом не вычеркнуто, то найдется переменное x, которое входит в S с квантором существования. Пусть переменное y не входит в S. Допишем к S слева: $\forall y$, а справа: $\bigvee(x=y)$. Проделаем это с каждым из невычеркнутых предложений. (Если таковых нет, но мы хотим, чтобы T было непустым, то добавим предложение $\forall x\ x=x$.) Предоставляем читателю убедиться, что полученное описание — искомое. ■

В силу предложений 2.5 и 2.6 при изучении Σ-свободных $\mathfrak{K}$-моделей можно было бы считать, не ограничивая существенно общности, что Σ тождественно истинно или по крайней мере, что $\mathfrak{K}\vdash\Sigma$. Нам, однако, будет удобнее не накладывать таких условий.

C) Если $\Sigma_1\not\Leftrightarrow\Sigma_2$, то Σ_1-порождение может не совпадать с Σ_2-порождением; вследствие этого Σ_1-свободная $\mathfrak{K}$-модель не обязательно Σ_2-свободна, и обратно.

Пример. $\Omega=\Omega_1=\{P, Q\}$; Σ_1 состоит из предложения $\exists x\exists y P(x)\&\&Q(x)\&P(y)$; Σ_2 — из предложения $\exists x\exists y P(x)\&Q(x)\&Q(y)$; $\mathfrak{K}=\mathfrak{K}_{\Sigma_1}$; модель F состоит из элементов a, b, c с соотношениями $P(a)$, $Q(a)$, $P(b)$. Очевидно, $\Sigma_1\not\Leftrightarrow\Sigma_2$, F является Σ_1-свободной $\mathfrak{K}$-моделью с базисом $\{c\}$, но $\{c\}$ Σ_2-порождает в F лишь множество $\{a, c\}$.

Предложение 2.7. *Пусть* $\Sigma_1\subseteq\Sigma_2$. *Тогда если* $M\in\mathfrak{D}$, $X\subseteq\mathrm{St}(M)$, $X\neq\varnothing$, *то* $X(\Sigma_1, M)\subseteq X(\Sigma_2, M)$. *В частности, если X Σ_1-порождает M, то X Σ_2-порождает M.* ■

Следствие 2.1. *Если* $\Sigma_1\subseteq\Sigma_2$, *то всякая Σ_1-свободная $\mathfrak{K}$-модель Σ_2-свободна в $\mathfrak{K}$ с тем же базисом.* ■

Следствие 2.2. *Пусть T — теория класса $\mathfrak{K}_\Sigma$, т. е. замыкание описания Σ относительно логических следствий. Тогда всякая Σ-свободная $\mathfrak{K}$-модель T-свободна в $\mathfrak{K}$ с тем же базисом.* ■

Таким образом, мы могли бы ограничиться рассмотрением лишь таких Σ, которые замкнуты относительно импликации: ввиду следствия 2.2. среди моделей, Σ-свободных для таких Σ, содержатся все Σ-свободные для любых Σ. Практически, однако, удобнее, чтобы описание содержало как можно меньше предложений. В то же время, если Σ замкнуто относительно следствий, то можно забыть о процедуре порождения, поскольку всякая Ω-модель Σ-порождается любым своим подмножеством: достаточно рассмотреть предложение $\exists x\ x=x$, тождественно истинное и потому содержащееся в Σ*).

D) Обозначим $\mathrm{S}_\Sigma(\mathfrak{K})=\mathrm{S}(\mathfrak{K})\cap\mathfrak{K}_\Sigma$.

Предложение 2.8. а) $\mathfrak{K}\subseteq\mathrm{S}_\Sigma(\mathfrak{K})$ *в точности тогда, когда* $\mathfrak{K}\subseteq\mathfrak{K}_\Sigma$.

б) *Если* $\mathfrak{K}=\mathfrak{K}_\Sigma$, *то*

$$\mathfrak{K}=\mathrm{S}_\Sigma(\mathfrak{K}). \tag{3}$$ ■

Пусть Σ_1 и Σ_2 — произвольные Ω-описания.

Предложение 2.9. *Пусть* $\mathrm{S}_{\Sigma_2}(\mathfrak{K})=\mathfrak{K}$; F — Σ_1-*свободная* $\mathfrak{K}$-*модель с базисом* X; $X\supseteq Y\neq\varnothing$; $G=\overline{Y}_\Omega(\Sigma_2, F)$. *Тогда модель* G Σ_2-*свободна в* $\mathfrak{K}$ *с базисом* Y.

Доказательство. Из $\mathrm{S}_{\Sigma_2}(\mathfrak{K})=\mathfrak{K}$ и предложения 2.8 а) следует, что $F\vdash\Sigma_2$. Отсюда и из предложения 2.3 получаем $G\vdash\Sigma_2$, и, снова ввиду $\mathrm{S}_{\Sigma_2}(\mathfrak{K})=\mathfrak{K}$, мы имеем $G\in\mathfrak{K}$, т. е. для G выполнено условие а) определения 2. Условие б) выполнено в силу предложения 2.1. Осталось проверить условие в). Пусть $M\in\mathfrak{K}$, φ — отображение Y в $\mathrm{St}(M)$. Продолжим φ (произвольным образом) до отображения χ: $X\to\mathrm{St}(M)$. Поскольку F Σ_1-свободна с базисом X, то χ продолжается до гомоморфизма ψ: $F\to M$. Ограничение ψ на G является искомым гомоморфизмом G в M, продолжающим φ. ■

Следствие 2.3. *Если* $\mathrm{S}_{\Sigma_2}(\mathfrak{K})=\mathfrak{K}$, *то из существования* Σ_1-*свободной* $\mathfrak{K}$-*модели ранга* α *вытекает существование* Σ_2-*свободной* $\mathfrak{K}$-*модели того же ранга, притом содержащейся в первой и натянутой на тот же базис.*

Доказательство. Положим в предложении 2.9 $|X|=\alpha$, $Y=X$. ■

Следствие 2.4. *Если в* $\mathfrak{K}$ *выполнено* (3) *и существует* Σ-*свободная* $\mathfrak{K}$-*модель ранга* α, *то это же верно для всех меньших* (*положительных*) *рангов.*

Доказательство. Положим в предложении 2.9 $\Sigma_1=\Sigma_2=\Sigma$, $|X|=\alpha$. ■

Е) Предложение 2.10. *Пусть* $\mathfrak{K}_1\supseteq\mathfrak{K}_2$, F — Σ-*свободная* $\mathfrak{K}_1$-*модель и* $F\in\mathfrak{K}_2$. *Тогда* F Σ-*свободна в* $\mathfrak{K}_2$ *с тем же базисом.* ■

Предложение 2.11. *Пусть* $P\in\Omega_n$; F — Σ-*свободная* $\mathfrak{K}$-*модель с базисом* X; $a_1,\ldots,a_n\in X$; *в* F *выполнено соотношение* $P(a_1,\ldots,a_n)$. *Тогда в* $\mathfrak{K}$ *выполнено тождество* $\forall x_1\ldots\forall x_n P(x_1,\ldots,x_n)$.

Доказательство. Для алгебраических систем см. ([1]), стр. 313—314; в общем случае доказательство аналогично. ■

---

*) Замечание принадлежит С. В. Полину.

§ 3. Классы, обладающие Σ-свободными моделями

A) Определение 4. *Класс $\mathfrak{K}$ обладает Σ-свободными моделями, если существуют Σ-свободные $\mathfrak{K}$-модели всех (положительных) рангов.*

Теорема 3.1. *Пусть $\mathfrak{K}$ обладает Σ-свободными моделями. Тогда* $\mathbf{P}(\mathfrak{K})\subseteq\mathbf{H}(\mathfrak{K})$.

Доказательство. Пусть модель M — прямое произведение непустого семейства $\mathfrak{K}$-моделей $\{M_i \mid i\in I\}$ с проекциями π_i. Нужно показать, что $M\in\mathbf{H}(\mathfrak{K})$.

Пусть F — Σ-свободная $\mathfrak{K}$-модель с базисом $\mathrm{St}(M)$; μ: $\mathrm{St}(M)\to\mathrm{St}(F)$ — естественное вложение. Отображения $\mathrm{St}(\pi_i):\mathrm{St}(M)\to\mathrm{St}(M_i)$ согласно определению 2 (условие в)) продолжаются до гомоморфизмов $\varphi_i: M\to M_i$,

$$\mu\,\mathrm{St}(\varphi_i)=\mathrm{St}(\pi_i),\quad i\in I. \tag{4}$$

По свойству прямого произведения (см. ([1]), стр. 73) существует гомоморфизм $\varphi: F\to M$ со свойством

$$\varphi\pi_i=\varphi_i,\quad i\in I. \tag{5}$$

Из (4) и (5) вытекает

$$\mu\,\mathrm{St}(\varphi)\,\mathrm{St}(\pi_i)=\mathrm{St}(\pi_i),\quad i\in I. \tag{6}$$

Из (6), предложения 1.1 и свойств прямого произведения следует

$$\mu\,\mathrm{St}(\varphi)=1, \tag{7}$$

где $1:\mathrm{St}(M)\to\mathrm{St}(M)$ — тождественное отображение. Из (7) вытекает, что $\mathrm{St}(\varphi)$ — сюръекция (см. ([11]), стр. 18). Значит, M — гомоморфный образ модели $F\in\mathfrak{K}$. ■

Следствие 3.1. *Если класс $\mathfrak{K}$ обладает Σ-свободными моделями, то любая $\mathfrak{K}$-модель M есть гомоморфный образ любой Σ-свободной $\mathfrak{K}$-модели, ранг которой не ниже* $|\mathrm{St}(M)|$.

Доказательство. Положим в теореме 3.1 $|I|=1$, $M_i=M$. ■

Следствие 3.2. *Если $\mathfrak{K}$ обладает Σ-свободными моделями и* $\mathbf{H}(\mathfrak{K})=\mathfrak{K}$, то $\mathbf{P}(\mathfrak{K})=\mathfrak{K}$. ■

B) Предложение 3.1. *Пусть выполнено* (3), $M\in\mathfrak{K}$, $\varnothing\neq X\subseteq\mathrm{St}(M)$, $\alpha=\max(|X|, |\Omega|, \aleph_0)$. *Тогда в M найдется подмодель N со свойствами:*

а) $X\subseteq\mathrm{St}(N)$;

б) *X Σ-порождает N;*

в) $|\mathrm{St}(N)|\leqslant\alpha$;

г) $N\in\mathfrak{K}$.

Доказательство. В работе ([12]) (см. также ([7]), стр. 247—248; ([6]), стр. 236—237) доказана «теорема Левенгейма — Сколема — Тарского», которая совпадает с нашим утверждением для случая, когда Σ — полная теория, $\mathfrak{K}=\mathfrak{K}_\Sigma$; доказательство без изменений переносится на случай,

когда Σ — произвольное описание, $\mathfrak{K}=\mathfrak{K}_\Sigma$. В общем случае ввиду (3) и предложения 2.8 а) имеем $M\in\mathfrak{K}_\Sigma$; значит, в M существует подмодель N со свойствами а)—в), принадлежащая $\mathfrak{K}_\Sigma$. И опять в силу (3) получаем $N\in\mathfrak{K}$. ■

C) Теорема 3.2. *Пусть $\mathfrak{K}$ — нетривиальный класс моделей* (см. § 1, п. *B*), $\mathbf{P}(\mathfrak{K})\subseteq\mathbf{H}(\mathfrak{K})$, $\mathbf{S}_\Sigma(\mathfrak{K})=\mathfrak{K}$. *Тогда $\mathfrak{K}$ обладает Σ-свободными моделями.*

Доказательство*). Пусть X — множество произвольной мощности $\alpha>0$. Нужно показать, что X является базисом Σ-свободной $\mathfrak{K}$-модели. Положим $\beta=\max(\alpha, |\Omega|, \aleph_0)$. Из каждого класса изоморфных $\mathfrak{K}$-моделей, содержащих не более β элементов, выберем по представителю. Нетрудно видеть, что эти представители составляют множество (а не собственный класс); обозначим его $\mathfrak{M}$. Существует лишь множество отображений X в $\mathfrak{M}$-модели; обозначим это множество $\mathfrak{N}$. Ввиду предложения 3.1 $\mathfrak{M}$ непусто; любая $\mathfrak{K}$-модель содержит (с точностью до изоморфизма) некоторую $\mathfrak{M}$-модель. Множество $\mathfrak{N}$ также непусто; более того, если a, $b\in X$, $a\neq b$, то найдется отображение $\varphi\in\mathfrak{N}$ такое, что $a\varphi\neq b\varphi$. В самом деле, по условию в $\mathfrak{K}$ есть модель A, содержащая более одного элемента. Пусть c, $d\in\mathrm{St}(A)$, $c\neq d$. Согласно предложению 3.1 в A найдется $\mathfrak{K}$-подмодель B, содержащая c и d и имеющая не более $\max(2, |\Omega|, \aleph_0)$ элементов; с точностью до изоморфизма $B\in\mathfrak{M}$. Определим отображение $\varphi: X\to\mathrm{St}(B)$, положив $a\varphi=c$, $x\varphi=d$ при $x\in X$, $x\neq a$. Очевидно, φ является искомым отображением.

Пусть M_0 — прямое произведение (непустого) семейства моделей M_φ с проекциями $\pi_\varphi: M_0\to M_\varphi$, где φ пробегает $\mathfrak{N}$ и M_φ совпадает с той моделью из $\mathfrak{M}$, в которую φ отображает X. Согласно условию $M_0\in\mathbf{H}(\mathfrak{K})$; пусть $L\in\mathfrak{K}$, ψ — гомоморфизм L на M_0. В силу предложения 1.1 и свойств прямого произведения (см. ([11]), стр. 90) существует отображение $\chi: X\to\mathrm{St}(M_0)$ со свойством

$$\chi\,\mathrm{St}(\pi_\varphi)=\varphi,\quad \varphi\in\mathfrak{N}. \tag{8}$$

Выберем для каждого элемента из $X\chi$ по одному прообразу при ψ (эти прообразы существуют, поскольку ψ — сюръекция). Мы получим вложение $\rho: X\chi\to\mathrm{St}(L)$. Если a, $b\in X$, $a\chi\rho=b\chi\rho$, то ввиду взаимной однозначности ρ мы имеем $a\chi=b\chi$; из (8) тогда вытекает $a\varphi=a\chi\,\mathrm{St}(\pi_\varphi)=b\chi\,\mathrm{St}(\pi_\varphi)=b\varphi$ для всех $\varphi\in\mathfrak{N}$. Из доказанного в предыдущем абзаце следует, что $a=b$. Таким образом, отображение $\chi\rho$ взаимно однозначно; поэтому отождествим каждый элемент $a\in X$ с $a\chi\rho$. Тогда $X\subseteq\mathrm{St}(L)$; если $\mu: X\to\mathrm{St}(L)$ — естественное вложение, то

$$\mu\,\mathrm{St}(\psi)=\chi. \tag{9}$$

Пусть $F=\overline{X}_\Omega(\Sigma, L)$; покажем, что F является Σ-свободной $\mathfrak{K}$-моделью с базисом X. Ввиду (3) $L\in\mathfrak{K}_\Sigma$; тогда в силу предложения 2.3 $F\in\mathfrak{K}_\Sigma$; снова

*) По сути дела, мы соединяем теорему о существовании свободных алгебр и нетривиальных классах, замкнутых относительно подалгебр и прямых произведений (см. ([7]), стр. 153—154; ([1]), стр. 320) и «теорему Левенгейма — Сколема — Тарского».

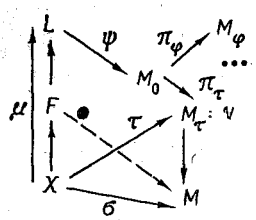
ввиду (3) $F \in \mathfrak{K}$, т. е. условие а) определения 2 выполняется. Условие б) выполнено в силу предложения 2.1. Остается проверить условие в).

Пусть дано отображение $\sigma: X \to \mathrm{St}(M)$, $M \in \mathfrak{K}$. Из предложения 3.1 вытекает, что в M найдется $\mathfrak{K}$-подмодель N, содержащая $X\sigma$ и такая, что $|\mathrm{St}(N)| \leqslant \max(|X\sigma|, |\Omega|, \aleph_0)$. Поскольку $|X\sigma| \leqslant |X| = \alpha$, то $|\mathrm{St}(N)| \leqslant \beta$; поэтому (с точностью до изоморфизма) $N \in \mathfrak{M}$. Отображение σ, рассмотренное как отображение X в $\mathrm{St}(N)$, обозначим через τ; тогда $\tau \in \mathfrak{K}$, и в силу (8) и (9)

$$\mu\, \mathrm{St}(\psi)\, \mathrm{St}(\pi_\tau) = \tau.$$

Таким образом, гомоморфизм $\psi\pi_\tau: L \to N$ продолжает τ на L. Рассмотрев $\psi\pi_\tau$ как гомоморфизм L в M и ограничив на F, мы получим искомый гомоморфизм F в M, продолжающий σ. ■

Проиллюстрируем доказательство следующей диаграммой, на которой мы ради простоты пренебрегли пренебрегающим функтором.



Из теорем 3.1 и 3.2 вытекает

Следствие 3.3. *Если* $\mathbf{S}_\Sigma(\mathfrak{K}) = \mathfrak{K}$ *и* $\mathfrak{K}$ *нетривиален, то* $\mathfrak{K}$ *обладает* Σ*-свободными моделями в точности тогда, когда* $\mathbf{P}(\mathfrak{K}) \subseteq \mathbf{H}(\mathfrak{K})$ (*например, если* $\mathfrak{K}$ *замкнут относительно прямых произведений*). ■

D) Аналогично предыдущим результатам может быть доказано следующее утверждение о свободных алгебрах, которое мы выведем из этих результатов.

Теорема 3.3. *Пусть* $\mathfrak{K}$ — *нетривиальный класс универсальных алгебр, замкнутый относительно подалгебр. Тогда следующие утверждения равносильны:*

а) $\mathfrak{K}$ *обладает* $\mathfrak{K}$*-свободными алгебрами* (*всех рангов*);

б) *прямое произведение* $\mathfrak{K}$*-алгебр есть фактор-алгебра* $\mathfrak{K}$*-алгебры*;

в) *замыкание* $\mathfrak{K}$ *относительно фактор-алгебр является многообразием.*

Замечание. Замкнутость относительно подалгебр или фактор-алгебр еще не влечет **S**- или **H**-замкнутости: подмодель алгебры есть, вообще говоря, частичная алгебра, а гомоморфный образ алгебры — «алгебра» с многозначными операциями.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — класс всех алгебр сигнатуры класса $\mathfrak{K}$; Σ — совокупность предложений (2.1), (2.2) для всех ω из этой сигнатуры; **F** — оператор присоединения фактор-алгебр. Тогда $\mathfrak{A} = \mathfrak{K}_\Sigma$; для $\mathfrak{K}$ выполнено (3); $\mathfrak{K}$-свободная алгебра — то же самое, что Σ-свободная $\mathfrak{K}$-

модель; S_Σ — оператор присоединения подалгебр. Очевидно,

(10.1) $\mathbf{F}^2(\mathfrak{K})=\mathbf{F}(\mathfrak{K})=\mathfrak{K}$; $\mathbf{F}(\mathfrak{K})=\mathfrak{A}\cap\mathbf{H}(\mathfrak{K})$; *)

(10.2) $\mathbf{P}(\mathfrak{A})=\mathfrak{A}$;

(10.3) $\mathbf{S}_\Sigma\mathbf{F}(\mathfrak{K})\subseteq\mathbf{F}\mathbf{S}_\Sigma(\mathfrak{K})$.

а)⇒б). Если существуют $\mathfrak{K}$-свободные алгебры всех рангов, то ввиду теоремы 3.1 $\mathbf{P}(\mathfrak{K})\subseteq\mathbf{H}(\mathfrak{K})$; из (10.2) следует $\mathbf{P}(\mathfrak{K})\subseteq\mathbf{P}(\mathfrak{A})=\mathfrak{A}$; отсюда ввиду (10.1) $\mathbf{P}(\mathfrak{K})\subseteq\mathbf{F}(\mathfrak{K})$.

б)⇒в). Пусть $\mathbf{P}(\mathfrak{K})\subseteq\mathbf{F}(\mathfrak{K})$. Тогда $\mathbf{PF}(\mathfrak{K})\subseteq\mathbf{F}^2(\mathfrak{K})=\mathbf{F}(\mathfrak{K})$. Из (3) и (10.3) следует, что $\mathbf{S}_\Sigma\mathbf{F}(\mathfrak{K})\subseteq\mathbf{F}\mathbf{S}_\Sigma(\mathfrak{K})=\mathbf{F}(\mathfrak{K})$. Таким образом, класс $\mathbf{F}(\mathfrak{K})$ $\mathbf{P}$- и $\mathbf{S}_\Sigma$-замкнут, кроме того, он $\mathbf{F}$-замкнут и непуст (поскольку содержит, например, свободные алгебры класса $\mathfrak{K}$). Значит, $\mathbf{F}(\mathfrak{K})$ — многообразие.

в)⇒а). Пусть $\mathbf{F}(\mathfrak{K})$ — многообразие. Тогда $\mathbf{P}(\mathfrak{K})\subseteq\mathbf{PF}(\mathfrak{K})=\mathbf{F}(\mathfrak{K})\subseteq$ $\subseteq\mathbf{H}(\mathfrak{K})$, и остается применить теорему 3.2. ■

§ 4. H-замкнутые классы и Σ-свободные модели

А) Теорема 4.1. *Пусть класс $\mathfrak{K}$ обладает Σ-свободными моделями. Тогда следующие утверждения равносильны:*

а) $\mathfrak{L}\subseteq\mathbf{H}(\mathfrak{K})$ *и все Σ-свободные $\mathfrak{K}$-модели принадлежат $\mathfrak{L}$;*

б) *всякая Σ-свободная $\mathfrak{K}$-модель является Σ-свободной $\mathfrak{L}$-моделью с тем же базисом.*

Доказательство. а)⇒б). Пусть $\mathfrak{L}\subseteq\mathbf{H}(\mathfrak{K})$, $\mathbf{F}$ — Σ-свободная $\mathfrak{K}$-модель с базисом X, $F\in\mathfrak{L}$, $M\in\mathfrak{L}$, σ — отображение X в $\mathrm{St}(M)$. Поскольку $\mathfrak{L}\subseteq\mathbf{H}(\mathfrak{K})$, то существует гомоморфизм φ $\mathfrak{K}$-модели N на M. Отобразим каждый элемент $x\in X$ в такой элемент $y\in\mathrm{St}(N)$, что $y\,\mathrm{St}(\varphi)=x\sigma$. Поскольку $N\in\mathfrak{K}$, то полученное отображение продолжается до гомоморфизма ψ: $F\to N$. Очевидно, гомоморфизм $\psi\varphi: F\to M$ продолжает σ. Таким образом, для F выполнено условие в) определения 2 с заменой $\mathfrak{K}$ на $\mathfrak{L}$. В условии б) этого определения класс $\mathfrak{K}$ не фигурирует, а а) выполнено по условию. Значит, F является Σ-свободной $\mathfrak{K}$-моделью с базисом X.

б)⇒а). Пусть все Σ-свободные $\mathfrak{K}$-модели являются Σ-свободными $\mathfrak{L}$-моделями с теми же базисами. Тогда $\mathfrak{L}$ обладает Σ-свободными моделями; применив следствие 3.1, получаем, что всякая $\mathfrak{L}$-модель есть гомоморфный образ Σ-свободной $\mathfrak{K}$-модели и, следовательно, принадлежит $\mathbf{H}(\mathfrak{K})$. ■

Следствие 4.1. *Если $\mathfrak{K}$ обладает Σ-свободными моделями, то*

а) $\mathbf{H}(\mathfrak{K})$ *также обладает Σ-свободными моделями;*

б) $\mathbf{H}(\mathfrak{K})$ $\mathbf{P}$-*замкнут.*

Доказательство. Утверждение а) следует из теоремы 4.1, а утверждение б) — из а) и следствия 3.2. ■

Следствие 4.2. *Если классы $\mathfrak{K}_1$ и $\mathfrak{K}_2$ H-замкнуты и обладают Σ-свободными моделями, причем их наборы для $\mathfrak{K}_1$ и $\mathfrak{K}_2$ совпадают, то $\mathfrak{K}_1=\mathfrak{K}_2$.*

Доказательство. Применим теорему 4.1. ■

В случае свободных алгебр, как известно (см. ([1]), стр. 340), всякая алгебра, свободная в некотором классе, свободна и в наименьшем много-

*) В общем случае фактор-модель и гомоморфный образ модели не одно и то же, но внутри класса алгебр эти понятия совпадают (см. ([1]), стр. 63).

образии, содержащем этот класс, и многообразия однозначно определяются наборами своих свободных алгебр. Теорема 4.1 и следствие 4.2 показывают, что в общем случае Σ-свободных моделей подобную роль играют **H**-замкнутые классы, обладающие Σ-свободными моделями.

B) Когда же нетривиальный **H**-замкнутый класс $\mathfrak{K}$ обладает Σ-свободными моделями? Для случая $\mathfrak{K}=\mathfrak{K}_\Sigma$ ответ дается предложением 5.2 (см. § 5, п. *A*). В общем случае ввиду следствия 3.2 и теоремы 3.2 для этого необходимо, чтобы $\mathfrak{K}$ был **P**-замкнут, и достаточно, чтобы $\mathfrak{K}$ был **P**-замкнут, $\mathbf{S}_\Sigma$-замкнут и содержался в $\mathfrak{K}_\Sigma$. Первое из этих условий, однако, не является достаточным, а совокупность всех — необходимой, как показывают следующие примеры.

Пример 1. Пусть $\Omega=\Omega_1=\{P, Q\}$, Σ состоит из предложения

$$\forall x \neg P(x), \tag{11}$$

$\mathfrak{K}$ — элементарный класс, заданный предложением

$$\exists x Q(x). \tag{12}$$

Очевидно, $\mathfrak{K}$ **H**- и **P**-замкнут (или, что то же, **HP**-замкнут) и нетривиален.

Предположим, что существует Σ-свободная $\mathfrak{K}$-модель F с некоторым базисом X. В силу предложения 2.4 $\mathrm{St}(F)=X$. Из (12) следует, что для некоторого $a\in X$ выполнено соотношение $Q(a)$. Тогда ввиду предложения 2.11 тождество $\forall x Q(x)$ выполнено в $\mathfrak{K}$, т. е. вытекает из (12), что заведомо неверно.

Пример 2. Пусть $\Omega=\Omega_1=\{P, Q, R\}$; Σ состоит из (11) и предложения $\exists x Q(x) \vee R(x)$; $\mathfrak{K}$ тот же, что в примере 1. Нетрудно видеть, что $\mathbf{S}_\Sigma(\mathfrak{K}) \not\subseteq \mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{K}_\Sigma$; в то же время $\mathfrak{K}$ обладает Σ-свободными моделями: любая модель, состоящая из непустых непересекающихся множеств X и Y с соотношениями $\{Q(y) \mid y\in Y\}$, является Σ-свободной $\mathfrak{K}$-моделью с базисом X.

Поскольку мощность множества Y можно взять любой, то отсюда, между прочим, вытекает, что *для данных* Σ, $\mathfrak{K}$ *и мощности* α *может существовать класс, не являющийся множеством, попарно не изоморфных* Σ*-свободных* $\mathfrak{K}$*-моделей ранга* α. Для сравнения напомним, что свободные алгебраические системы (см. ([1]), стр. 316) и вообще свободные Σ-системы Грэтцера (см. ([6]), стр. 309) определяются рангом с точностью до изоморфизма.

C) Классы, обладающие Σ-свободными моделями, для случая $\mathbf{S}_\Sigma(\mathfrak{K})=\mathfrak{K}$ описаны следствием 3.3. В общем случае такие классы строятся следующим образом: берем нетривиальный **HP**-замкнутый класс $\mathfrak{K}$, обладающий Σ-свободными моделями (например, удовлетворяющий (3)), и выбрасываем из него произвольный подкласс таким образом, чтобы в остатке $\mathfrak{L}$ содержалось хотя бы по одной Σ-свободной $\mathfrak{K}$-модели каждого ранга. Предложение 2.10 и теорема 4.1 показывают, что таким путем мы получим в качестве $\mathfrak{L}$ все классы, обладающие Σ-свободными моделями, и только их.

D) Предложение называется *положительным*, если в его записи участвуют из логических связок лишь конъюкция и дизъюнкция, и *хорнов-*

ским положительным (ниже — **HP**-*предложением*), если оно положительно и не содержит дизъюнкции. Аксиоматизируемый класс называется *положительным* (соответственно *хорновским положительным*, или **HP**-*классом*), если он может быть задан некоторой совокупностью положительных (соответственно **HP**-) предложений. Непустой аксиоматизируемый класс **H**-замкнут в точности тогда, когда он положителен (см. ([13, 14]); ([6]), стр. 280—282), и **HP**-замкнут в точности тогда, когда является **HP**-классом ([15]).

Введем следующие обозначения. 1. Запись $\mathfrak{K}\in\mathbf{HP}$ означает, что $\mathfrak{K}$ является **HP**-классом.

2. Аксиоматизируемый класс, заданный совокупностью всех положительных предложений, выполненных на классе $\mathfrak{K}$, обозначается $\mathrm{Pos}\,\mathfrak{K}$.

Очевидно, $\mathrm{Pos}\,\mathfrak{K}$ — наименьший положительный класс, содержащий $\mathfrak{K}$, и $\mathrm{Pos}\,(\mathrm{Pos}\,\mathfrak{K})=\mathrm{Pos}\,\mathfrak{K}$. Для аксиоматизируемого $\mathfrak{K}$

(13.1) $\qquad \mathrm{Pos}\,\mathfrak{K}=\mathbf{EH}(\mathfrak{K})$,

откуда следует

(13.2) $\qquad \mathbf{EHEH}(\mathfrak{K})=\mathbf{EH}(\mathfrak{K})$;

в общем случае

(14) $\qquad \mathrm{Pos}\,\mathfrak{K}\supseteq\mathbf{EH}(\mathfrak{K})$

(см. ([6]), стр. 281—282).

Предложение 4.1. *Если $\mathfrak{K}$ — аксиоматизируемый класс, то* $\mathrm{Pos}\,\mathfrak{K}\in$ $\in$*HP в точности тогда, когда* $\mathbf{P}(\mathfrak{K})\subseteq\mathbf{EH}(\mathfrak{K})$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{Pos}\,(\mathfrak{K})\in HP$. Тогда $\mathbf{P}(\mathfrak{K})\subseteq\mathbf{P}(\mathrm{Pos}\,\mathfrak{K})=$ $=\mathrm{Pos}\,\mathfrak{K}=\mathbf{EH}(\mathfrak{K})$. Обратно, пусть $\mathbf{P}(\mathfrak{K})\subseteq\mathbf{EH}(\mathfrak{K})$. Тогда из (13.1), (1.3), (1.1) и (13.2) вытекает

$$\mathbf{P}(\mathrm{Pos}\,\mathfrak{K})=\mathbf{PEH}(\mathfrak{K})\subseteq\mathbf{EPH}(\mathfrak{K})\subseteq\mathbf{EHP}(\mathfrak{K})\subseteq\mathbf{EHEH}(\mathfrak{K})=$$
$$=\mathbf{EH}(\mathfrak{K})=\mathrm{Pos}\,\mathfrak{K},$$

а это означает, что $\mathrm{Pos}\,\mathfrak{K}\in HP$. ■

Теорема 4.2. *Пусть класс $\mathfrak{K}$ обладает Σ-свободными моделями (для некоторого описания Σ). Тогда*

(15) $\qquad \mathrm{Pos}\,\mathfrak{K}\in HP$.

Доказательство. Положим $\mathfrak{L}=\mathbf{H}(\mathfrak{K})$, $\mathfrak{M}=\mathbf{EH}(\mathfrak{K})$. Ввиду следствия 4.1 (утверждение б)) класс $\mathfrak{L}$ **P**-замкнут; поскольку $\mathfrak{L}$ и **H**-замкнут, то он **U**-замкнут ввиду (1.2). Из (1.4) тогда следует, что $\mathfrak{M}$ также **U**-замкнут; поскольку $\mathfrak{M}$ и **E**-замкнут, а также замкнут относительно изоморфизмов *), то $\mathfrak{M}$ — аксиоматизируемый класс (см. ([6]), стр. 257, 258). Из (1.3) и **P**-замкнутости класса $\mathfrak{L}$ получаем, что $\mathbf{P}(\mathfrak{M})=\mathbf{PE}(\mathfrak{L})\subseteq\mathbf{EP}(\mathfrak{L})=\mathbf{E}(\mathfrak{L})=\mathfrak{M}\subseteq$ $\subseteq\mathbf{EH}(\mathfrak{M})$. Применив предложение 4.1, имеем $\mathrm{Pos}\,\mathfrak{M}\in HP$. Но ввиду (14) $\mathfrak{K}\subseteq\mathfrak{M}\subseteq\mathrm{Pos}\,\mathfrak{K}$, поэтому $\mathrm{Pos}\,\mathfrak{M}=\mathrm{Pos}\,\mathfrak{K}$. ■

*) Класс $\mathfrak{L}$ замкнут относительно изоморфизмов, даже если $\mathfrak{K}$ не обладает этим свойством; отсюда нетрудно вывести соответствующее утверждение и для $\mathfrak{M}$.

Замечание. Приняв обобщенную континуум-гипотезу и использовав имеющуюся для этого случая характеризацию элементарной эквивалентности с помощью ультрастепеней (см. ([7]), стр. 256—263; ([6]), стр. 252—255), можно доказать, что $\mathrm{Pos}\,\mathfrak{K}=\mathfrak{M}$.

E) Теорема 4.2 полезна тем, что дает синтаксическое необходимое условие существования Σ-свободных $\mathfrak{K}$-моделей.

Пусть S — некоторое (предваренное) предложение; приведем S к конъюнктивной нормальной форме (см. ([7]), стр. 210). Матрица (бескванторная часть) полученного предложения S_0 имеет вид

$$(S_{11}\vee\ldots\vee S_{1l_1})\&\ldots\&(S_{k1}\vee\ldots\vee S_{kl_k}), \tag{16}$$

где k, $l_1,\ldots,l_k$ — натуральные числа, а формулы $S_{11},\ldots,S_{kl_k}$ являются атомарными формулами или их отрицаниями. Пусть $1\leqslant m_1\leqslant l_1;\ldots;$ $1\leqslant m_k\leqslant l_k$; заменим (16) на

$$S_{1m_1}\&\ldots\&S_{km_k}, \tag{17}$$

а из приставки предложения S_0 (совокупности переменных с кванторами) удалим все те переменные (с относящимися к ним кванторами), которые не встречаются в (17). Полученное предложение назовем *срезом* исходного предложения S.

Предложение 4.2 а) *Если S' — срез предложения S, то S следует из S'.*

б) *Предложение S положительно в точности тогда, когда любой его срез является HP-предложением.* ■

Предложение 4.3. *Следующие утверждения о классе $\mathfrak{K}$ равносильны:*

а) $\mathrm{Pos}\,\mathfrak{K}\in HP$.

б) *Всякое положительное предложение S равносильно на $\mathfrak{K}$ некоторому своему срезу.*

Доказательство. а)$\Rightarrow$б). Для случая $\mathfrak{K}=\mathrm{Pos}\,\mathfrak{K}$ это по существу доказано Бингом, ([15]). Аналогичный результат (с аналогичным доказательством) об универсальных предложениях имеется в ([1]) (стр. 187—188). Поэтому примем, что для положительных классов $\mathfrak{K}$ импликация а)$\Rightarrow$б) установлена. Пусть теперь $\mathfrak{K}$ — произвольный класс, $\mathrm{Pos}\,\mathfrak{K}\in HP$, S — положительное предложение. Тогда найдется такой его срез S', что $\mathrm{Pos}\,\mathfrak{K}\vdash$ $\vdash(S'\Rightarrow S)$; тем более $\mathfrak{K}\vdash(S'\Rightarrow S)$.

б)$\Rightarrow$а). Пусть П-совокупность всех положительных предложений, выполненных во всех $\mathfrak{K}$-моделях; пусть для каждого из них найдется срез, также выполненный на $\mathfrak{K}$. Совокупность таких срезов обозначим П$'$. В силу предложения 4.2 (утверждение а)) П$'\Rightarrow$П, поэтому $\mathfrak{K}_{\Pi'}\subseteq\mathfrak{K}_{\Pi}=\mathrm{Pos}\,\mathfrak{K}$. Но $\mathfrak{K}\vdash\Pi'$, и в силу предложения 4.2 (утверждение б)) $\mathfrak{K}_{\Pi'}\in HP$, поэтому $\mathfrak{K}_{\Pi'}\supseteq\mathrm{Pos}\,\mathfrak{K}$. Значит, $\mathrm{Pos}\,\mathfrak{K}=\mathfrak{K}_{\Pi'}\in HP$. ■

Из теоремы 4.2 и предложения 4.3 вытекает

Следствие 4.3. *Если $\mathfrak{K}$ обладает Σ-свободными моделями и положительное предложение выполнено в $\mathfrak{K}$, то найдется его срез, также выполненный в $\mathfrak{K}$.* ■

§ 5. Собственные свободные модели в аксиоматизируемых классах

А) Определение 5. Аксиоматизируемый класс $\mathfrak{K}$ *обладает собственными свободными моделями*, если $\mathfrak{K}$ обладает Σ-свободными моделями для некоторого описания Σ со свойством $\mathfrak{K}=\mathfrak{K}_\Sigma$.

Предложение 5.1. *Если $\mathfrak{K}$ обладает собственными свободными моделями, то $\mathfrak{K}$ обладает Σ-свободными моделями для любого Σ со свойством $\mathfrak{K}=\mathfrak{K}_\Sigma$.*

Доказательство вытекает из предложения 2.8 (утверждение б)) и следствия 2.3. ■

Предложение 5.2. а) *Нетривиальный аксиоматизируемый класс $\mathfrak{K}$ обладает собственными свободными моделями в точности тогда, когда* $\mathbf{P}(\mathfrak{K})\subseteq\mathbf{H}(\mathfrak{K})$.

б) *В частности, при этом* $\mathrm{Pos}\,\mathfrak{K}\in HP$.

в) *Нетривиальный положительный класс обладает собственными свободными моделями в точности тогда, когда он является HP-классом.*

Доказательство. Утверждение а) вытекает из утверждения б) предложения 2.8 и следствия 3.3; утверждение б) — из теоремы 4.2; утверждение в) — из утверждения а). ■

Из утверждений а) и б) предложения 5.2 вытекает

Следствие 5.1. *Если $\mathfrak{K}$ — нетривиальный аксиоматизируемый класс со свойством*

$$\mathrm{Pos}\,\mathfrak{K}=\mathbf{H}(\mathfrak{K}), \tag{18}$$

то $\mathfrak{K}$ обладает собственными свободными моделями в точности тогда, когда $\mathrm{Pos}\,\mathfrak{K}\in HP$. ■

Многие аксиоматизируемые классы обладают свойством (18). В частности, без труда доказывается

Теорема 5.1. *Если $\mathfrak{K}$ — универсальный класс, то $\mathfrak{K}$ обладает свойством* (18).

Доказательство. Пусть $M\in\mathrm{Pos}\,\mathfrak{K}$; тогда ввиду (13.1) найдется модель N такая, что M — подмодель в N и существует гомоморфизм φ $\mathfrak{K}$-модели N_1 на N. Пусть M_1 — подмодель в N_1, служащая полным прообразом M при φ. Так как универсальный класс замкнут относительно подмоделей (см ([1]), стр. 176; ([7]), стр. 243), то $M_1\in\mathfrak{K}$; $M_1\varphi=M$, поэтому $M\in\mathbf{H}(\mathfrak{K})$. ■

Аналогичное утверждение справедливо и для экзистенциальных классов, но здесь мы не можем на этом останавливаться.

Существуют аксиоматизируемые классы, обладающие собственными свободными моделями, но не удовлетворяющие (18). Пусть, например, $\Omega=\Omega_2=\{R\}$; класс $\mathfrak{K}$ задан предложением

$$\exists x\exists y\forall z\exists t\quad R(x,y)\&\{R(x,z)\Rightarrow[R(x,t)\&R(z,t)]\}; \tag{19}$$

как показано в ([13]), этот класс не удовлетворяет (18). В то же время он обладает собственными свободными моделями. Действительно, (19) равносильно хорновскому (см. ([1]), стр. 183—184) предложению

$$\exists x\exists y\forall z\exists t\ R(x,y)\&[\neg R(x,z)\vee R(x,t)]\&[\neg R(x,z)\vee R(z,t)],$$

поэтому $\mathfrak{K}$ P-замкнут (([1], стр. 183—184), и остается применить предложение 5.2 (утверждение а)).

B) Возникает вопрос, не является ли условие $\mathrm{Pos}\,\mathfrak{K}\in HP$ достаточным для того, чтобы класс $\mathfrak{K}$ обладал Σ-свободными моделями. Следующий пример (по существу, модификация предыдущего) показывает, что это не так даже в случае элементарных *) классов и собственных свободных моделей.

Теорема 5.2. *Пусть* $\Omega=\Omega_2=\{P, Q, R, S\}$; Σ *состоит из предложений*

$$\exists x\exists r\exists y\exists s\forall z\forall u\exists t\exists v\forall w\ P(x, y)\&Q(r, s)\&R(x, r)\&R(y, r)\&R(y, s)\& \tag{20.1}$$
$$\&\{[P(x, z)\&Q(r, u)\&R(z, u)]\Rightarrow[P(x, t)\&P(z, t)\&$$
$$\&Q(r, v)\&Q(u, v)\&R(t, v)\&(R(z, w)\Rightarrow R(t, w))]\};$$

$$\exists k\forall l\forall m\quad Q(l, m)\Rightarrow[R(k, l)\vee S(k, l)]; \tag{20.2}$$

$\mathfrak{K}=\mathfrak{K}_\Sigma$. *Тогда*

а) $\mathfrak{K}$ *не обладает* Σ-*свободными моделями никакого ранга;*

б) $\mathrm{Pos}\,\mathfrak{K}\in HP$.

Замечание. Ввиду предложений 4.1 и 5.2 это означает, что $\mathbf{P}(\mathfrak{K})\subseteq\subseteq\mathbf{EH}(\mathfrak{K})$, но $\mathbf{P}(\mathfrak{K})\not\subseteq\mathbf{H}(\mathfrak{K})$.

Доказательство. а) Из (20.1) вытекает существование в любой $\mathfrak{K}$-модели двух счетных цепочек из элементов $x_0, x_1, x_2, \ldots$ и $r_0, r_1, r_2, \ldots$ (не обязательно попарно различных) со свойствами

$$P(x_0, x_i);\quad P(x_i, x_{i+1});\quad Q(r_0, r_i);\quad Q(r_i, r_{i+1});\quad (i>0); \tag{21}$$
$$R(x_i, r_j)\quad (i\geqslant j\geqslant 0)$$

(см. рис. 1).

Предположим, что в $\mathfrak{K}$ существует Σ-свободная модель F какого-то ранга, и пусть k_0 — такой элемент из F, что для любых $l, m\in\mathrm{St}\,(F)$

$$Q(l, m)\Rightarrow[R(k_0, l)\vee S(k_0, l)] \tag{22}$$

(такой элемент k_0 существует ввиду (20.2)). Из (21) вытекает наличие в F элементов $s_0, s_1, s_2, \ldots$ со свойствами $Q(s_0, s_i)$, $Q(s_i, s_{i+1})$ $(i=1, 2, \ldots)$. Из (22) вытекает

$$R(k_0, s_i)\vee S(k_0, s_i),\quad i=0, 1, 2, \ldots \tag{23}$$

Пусть для некоторого $i=i_0$ выполнено соотношение

$$R(k_0, s_{i0}). \tag{24}$$

Рассмотрим модель M, состоящую из двух непересекающихся цепочек попарно различных элементов $x_0, x_1, \ldots$ и $r_0, r_1, \ldots$ и еще одного элемента k', с соотношениями (21) и $S(k', r_i)$ $(i=0, 1, 2, \ldots)$. Модель M см. на рис. 2.

Очевидно, $M\in\mathfrak{K}$; поскольку F Σ-свободна в $\mathfrak{K}$, то существует гомоморфизм φ: $F\to M$. Образы всех элементов $s_0, s_1, s_2, \ldots$ при φ различны, поскольку иначе в M нашелся бы элемент s со свойством $Q(s, s)$, чего на самом деле нет. Отсюда с учетом (23) и (24) получаем, что элемент

*) Т. е. заданных конечным описанием или (эквивалентно) одним предложением.

$k_0\varphi \in \mathrm{St}(M)$ обладает следующими свойствами: из $k_0\varphi$ выходит (на рис. 2, если его продолжить вправо до бесконечности) в общей сложности бесконечное множество прерывистых и пунктирных стрелок, в том числе хотя бы одна прерывистая. Но такого элемента в M нет.

Полученное противоречие показывает, что для всех $i \geqslant 0$ может быть лишь

(25) $\qquad S(k_0, s_i)$.

Заменим тогда в M все пунктирные стрелки на прерывистые (S на R). Очевидно, полученная модель M' по-прежнему принадлежит $\mathfrak{K}$; поэтому существует гомоморфизм φ': $F \to M'$, и из (25) следует $S(k_0\varphi', s_i\varphi')$ ($i=$

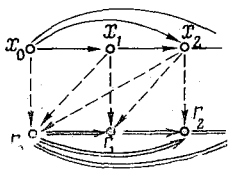


Рис. 1. Сплошная стрелка из a в b отвечает соотношению $P(a, b)$, двойная – $Q(a, b)$, прерывистая – $R(a, b)$

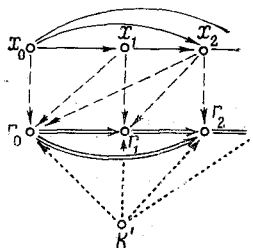


Рис. 2. Пунктирная стрелка из k' в r_i отвечает соотношению $S(k', r_i)$, а остальные стрелки имеют тот же смысл, что на рис. 1

$=0, 1, \ldots$). Однако предикат S в M' тождественно ложен. Мы снова получили противоречие; значит, в $\mathfrak{K}$ нет Σ-свободной модели никакого ранга.

б) Покажем, что $\mathrm{Pos}\,\mathfrak{K}$ определяется совокупностью следующих HP-предложений S_n:

$$\exists x_0 \exists x_1 \ldots \exists x_n \exists r_0 \exists r_1 \ldots \exists r_n [P(x_0, x_1) \& P(x_0, x_2) \& \ldots \& P(x_0, x_n) \& P(x_1, x_2) \&$$
$$\& P(x_2, x_3) \& \ldots \& P(x_{n-1}, x_n)] \& [Q(r_0, r_1) \& \ldots \& Q(r_0, r_n) \& Q(r_1, r_2) \& \ldots$$
$$\ldots \& Q(r_{n-1}, r_n)] \& [R(x_0, r_0) \& R(x_1, r_0) \& \ldots \& R(x_n, r_0)] \& [R(x_1, r_1) \& \ldots$$
$$\ldots \& R(x_n, r_1)] \& \ldots \& R(x_n, r_n) \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Нетрудно убедиться (см. рис. 1), что для любого n S_n следует из (20.1); поэтому $\mathrm{Pos}\,\mathfrak{K} \vdash S_n$. Обратно, пусть в Ω-модели A выполнены S_n для всех натуральных n; покажем, что $A \in \mathrm{Pos}\,\mathfrak{K}$.

Для каждого натурального n пусть $x_{n0}, \ldots, x_{nn}, r_{n0}, \ldots, r_{nn}$ — такие элементы из A, что подстановка их в S_n вместо переменных $x_0, \ldots, x_n, r_0, \ldots, r_n$ соответственно обращает S_n в истинную формулу. Пусть, далее, A^I — счетная прямая степень модели A, где множество индексов I отождествлено с натуральным рядом; B — ультрастепень модели A по ультрафильтру Фреше (см. ([7]), стр. 213) $\mathfrak{F}$ на I; ν: $A^I \to B$ — естественный эпиморфизм. Положим $x_0 = \nu(x_{10}, \ldots, x_{n0}, \ldots)$; $x_n = \nu(x_{11}, \ldots, x_{nn}, x_{n+1,\,n}, \ldots)$; $r_0 = \nu(r_{10}, \ldots, r_{n0}, \ldots)$; $r_n = \nu(r_{11}, \ldots, r_{nn}, r_{n+1,\,n}, \ldots)$; $k = \nu(x_{11}, \ldots, x_{nn}, x_{n+1,\,n+1}, \ldots)$; $(n=1, 2, \ldots)$. Пусть $i \geqslant j \geqslant 1$; $J = \{i' \mid i' \in I,\ i' \geqslant i\}$; поскольку $I \setminus J$ конечно и $\mathfrak{F}$ — ультрафильтр Фреше, то $J \in \mathfrak{F}$. Для всех $i' \in J$ мы имеем

по предположению $R(x_{i',i}, r_{i',j})$; отсюда и из определения ультрастепени (см. ([7]), стр. 226—227) вытекает, что в B выполнено соотношение

(26.1) $R(x_i, r_j)$.

Аналогично выполнены соотношения

(26.2) $P(x_0, x_i)$; $P(x_i, x_{i+1})$; $Q(r_0, r_i)$; $Q(r_i, r_{i+1})$ $(i=1, 2, \ldots)$,

(26.3) $R(k, r_i)$ $(i=0, 1, 2, \ldots)$.

«Сотрем» теперь в B все соотношения, кроме (26.1)—(26.3); полученная модель C, как нетрудно видеть, принадлежит $\mathfrak{K}$ (чтобы получить C, нужно к модели M' из доказательства утверждения а) добавить некоторое множество элементов, не накладывая новых соотношений). Тождественное отображение C на B является гомоморфизмом; значит, $B \in \mathbf{H}(\mathfrak{K})$. Модель A является элементарной подмоделью своей ультрастепени B (см. ([6]), стр. 246; ([7]), стр. 233); поэтому $A \in \mathbf{EH}(\mathfrak{K})$, откуда (см. (13.1)) $A \in \mathrm{Pos}\,\mathfrak{K}$. ■

C) Представляются интересными следующие вопросы:

1°. Дать синтаксическую характеристику аксиоматизируемых классов, обладающих собственными свободными моделями, т. е. таких нетривиальных аксиоматизируемых классов, у которых (см. предложение 5.2а)) **P**-замыкание содержится в **H**-замыкании.

2°. В случае аксиоматизируемых классов и собственных свободных моделей не будет ли существование свободной модели ранга $\max(|\Omega|, \aleph_0)$ достаточным для того, чтобы существовали свободные модели всех рангов? (В силу следствия 2.4 достаточно рассмотреть бо́льшие ранги.) Не достаточно ли для этого, чтобы существовала свободная модель счетного ранга? Всех конечных рангов?

Автор весьма признателен Т. М. Баранович за внимание к работе и ряд ценных советов. Автор благодарен также В. А. Артамонову и С. В. Полину за плодотворное обсуждение рассмотренных здесь вопросов.

Поступила в редакцию
28 апреля 1973 г.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Мальцев А. И.*, Алгебраические системы, «Наука», М., 1970.
[2] *Fujiwara T.*, On the construction of the least universal Horn class containing a given class, Osaka J. Math, 8, № 3 (1971), 425—436.
[3] *Burmeister P.*, Free partial algebras, J. reine und angew. Math., 241 (1970), 75—86.
[4] *Slominski J.*, Peano-algebras and quasi-algebras, Diss. mathem., 57 (1968).
[5] *Kerkhoff R.*, Gleichungsdefinierbare Klassen partieller Algebren, Math. Ann., 185, № 2 (1970), 112—133.
[6] *Grätzer G.*, Universal Algebra, Van Nostrand company, Princeton — Toronto — London — Melbourne, 1968.
[7] *Кон П. М.*, Универсальная алгебра, «Мир», М., 1968.
[8] *Робинсон А.*, Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры, «Наука», М., 1967.
[9] *Feferman S., Vaught R. L.* The first order properties of products of algebraic systems, Fund. math., 47, № 1 (1959), 57—103.

[10] *Новиков П. С.*, Элементы математической логики, Физматгиз, М., 1959.
[11] *Цаленко М. С., Шульгейфер Е. Г.*, Лекции по теории категорий, Изд-во МГУ, М., 1970.
[12] *Tarski A., Vaught R. L.*, Arithmetical extensions of relational systems, Compos. math., 13, № 2 (1957), 81–102.
[13] *Lyndon R. C.*, Properties preserved under homomorphism, Pacif. J. Math., 9, № 1 (1959), 143–154.
[14] *Keisler H. J.*, Theory of models with generalized atomic formulas, J. Symbol. Log., 25, № 1 (1960), 1–26.
[15] *Bing K.*, On arithmetical classes not closed under direct union, Proc. Amer. Math. Soc., 6, № 5 (1955), 836–846.