



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Гордиенко, Матричные элементы вещественных представлений групп $O(3)$ и $SO(3)$, *Сиб. матем. журн.*, 2002, том 43, номер 1, 51–63

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.81

15 марта 2025 г., 07:19:00



МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП $O(3)$ И $SO(3)$

В. М. Гордиенко

Аннотация: Для спинорных представлений групп $O(3)$, $SO(3)$ и $SU(2)$ указаны базисы, в которых матрицы представлений вещественны. Вычислены матричные элементы в этих базисах. Описаны преобразования этими матричными элементами классических ортогональных гармонических полиномов в трехмерном пространстве. Библиогр. 4.

§ 1. Постановка задачи

Мы будем вычислять матричные элементы вещественных неприводимых представлений группы $O(3)$ ортогональных преобразований трехмерного пространства и ее подгруппы $SO(3)$, состоящей из преобразований (3×3 матриц) с положительным определителем. Любой элемент $Q \in O(3)$ представим либо в виде $Q = P$, либо в виде $Q = -P$, где $P \in SO(3)$. Удобно параметризовать группу $SO(3)$ при помощи комплексных параметров α и β таких, что $\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1$, параметризующих группу $SU(2)$, состоящую из унитарных матриц

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Каждая такая матрица g задает вращение трехмерного пространства $P \in SO(3)$:

$$\begin{pmatrix} x'_{-1} \\ x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_{-1} \\ x_0 \\ x_1 \end{pmatrix},$$

с помощью формулы

$$\begin{pmatrix} x'_0 & x'_1 + ix'_{-1} \\ x'_1 - ix'_{-1} & -x'_0 \end{pmatrix} = g^* \begin{pmatrix} x_0 & x_1 + ix_{-1} \\ x_1 - ix_{-1} & -x_0 \end{pmatrix} g. \quad (1)$$

Более того, выписанная формула задает представление группы $SU(2)$ в $SO(3)$. Очевидно, что матрицы g и $-g$ задают одно и то же вращение. Можно показать, что каждому вращению из $SO(3)$ соответствует только одна пара матриц g и $-g$ из $SU(2)$. Понятно, что если мы имеем представление T_g группы $SU(2)$ такое, что $T_g = T_{-g}$, то это представление может рассматриваться как представление группы $SO(3)$. Известно, что любое однозначное представление T_g группы $SU(2)$ обладает свойством $T_g = T_{-g}$ и, значит, порождает представление группы $SO(3)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01-01-00766).

Для описания представлений группы $SU(2)$ важно описать неприводимые представления, так как произвольное представление раскладывается в прямую сумму неприводимых. Известно [1–3], что однозначные неприводимые представления группы $SU(2)$ существуют только в пространстве нечетной размерности $2N + 1$. При этом любые два неприводимых представления в пространствах размерности $2N + 1$ эквивалентны. Число N называется *весом представления*.

Удобно реализовывать неприводимое представление веса N группы $SU(2)$ в пространстве однородных полиномов $h^{(N)}(\xi, \eta)$ степени $2N$ от двух формальных переменных ξ и η . Это пространство имеет размерность $2N + 1$. Для таких полиномов установилось название «спинорные полиномы». Представление T_g ($g \in SU(2)$) в пространстве спинорных полиномов определим следующим образом:

$$T_g h(\xi, \eta) = h(\xi', \eta') = h(\bar{\alpha}\xi - \beta\eta, \bar{\beta}\xi + \alpha\eta),$$

где

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = g^* \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Итак, мы описали неприводимые представления групп $SU(2)$ и $SO(3)$. Остановимся коротко на представлениях группы $O(3)$. Мы уже отмечали, что любой элемент $Q \in O(3)$ представим либо в виде $Q = P$, либо в виде $Q = (-I_3)P$, где I_m — единичная матрица порядка m . Поэтому если задано неприводимое представление T_P веса N группы $SO(3)$, то для задания представления группы $O(3)$ достаточно определить преобразование $T_{(-I_3)}$. Из общих соображений следует, что имеются две возможности $T_{(-I_3)} = \pm I_{2N+1}$. Таким образом, для каждого N существуют два различных неприводимых представления веса N полной ортогональной группы $O(3)$. Величину, преобразующуюся по неприводимому представлению веса N группы $O(3)$, называют *вектором*, если $T_{(-I_3)} = (-1)^N I_{2N+1}$, и *псевдовектором*, если $T_{(-I_3)} = (-1)^{N+1} I_{2N+1}$.

Если в пространстве однородных спинорных полиномов степени выбран какой-либо базис $h_n^{(N)}(\xi, \eta)$, $n = -N, \dots, 0, \dots, N$, то представление T_g задается матрицей $\Omega^{(N)}(\alpha, \beta)$, элементы которой определяются следующей производящей функцией:

$$T_g h_n^{(N)}(\xi, \eta) = h_n^{(N)}(\bar{\alpha}\xi - \beta\eta, \bar{\beta}\xi + \alpha\eta) = \sum_{k=-N}^{k=N} \Omega_{nk}^{(N)}(\alpha, \beta) h_k^{(N)}(\xi, \eta).$$

Излагая теорию представлений групп $SU(2)$, $SO(3)$, $O(3)$, как правило, отмечают тот факт, что конечномерные представления этих групп в подходящем базисе описываются унитарными матрицами [1–3]. На самом деле справедливо более сильное утверждение: представления этих групп описываются в подходящем базисе вещественными ортогональными матрицами. Так как нам не удалось найти соответствующего изложения в широко доступной литературе, мы приводим в этой заметке описание базиса, в котором представления групп $SU(2)$, $SO(3)$ и $O(3)$ вещественны, и вычисляем матричные элементы.

Как обычно, через $\bar{h}(\xi, \eta)$ обозначаем полином с комплексно-сопряженными коэффициентами. Нетрудно показать, что в базисе $\hat{h}_n^{(N)}(\xi, \eta) = \bar{h}_n^{(N)}(-\eta, \xi)$ элементы матрицы представления $\widehat{\Omega}^{(N)}(\alpha, \beta)$ оказываются комплексно-сопряженными элементам матрицы $\Omega^{(N)}(\alpha, \beta)$, т. е. $\widehat{\Omega}_{nk}^{(N)}(\alpha, \beta) = \overline{\Omega_{nk}^{(N)}(\alpha, \beta)}$.

В самом деле,

$$\begin{aligned} \hat{h}^{(N)}(\bar{\alpha}\xi - \beta\eta, \bar{\beta}\xi + \alpha\eta) &= \bar{h}_n^{(N)}(-\bar{\beta}\xi - \alpha\eta, \bar{\alpha}\xi - \beta\eta) = \overline{h^{(N)}(\bar{\alpha}(-\eta) - \beta\xi, \bar{\beta}(-\eta) + \alpha\xi)} \\ &= \sum_{k=-N}^{k=N} \overline{\Omega_{nk}^{(N)}(\alpha, \beta) h_k^{(N)}(-\eta, \xi)} = \sum_{k=-N}^{k=N} \overline{\Omega_{nk}^{(N)}(\alpha, \beta)} \hat{h}_k^{(N)}(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Поэтому если выбранный базис в пространстве спинорных полиномов обладает свойством

$$h_n^{(N)}(\xi, \eta) = \bar{h}_n(-\eta, \xi), \quad (2)$$

то в этом базисе матричные элементы будут обладать свойством

$$\Omega_{nk}^{(N)}(\alpha, \beta) = \overline{\Omega_{nk}^{(N)}(\alpha, \beta)},$$

т. е. будут вещественными.

Выберем полиномы $h_n^{(N)}(\xi, \eta)$ обладающие свойством (2):

$$h_{-n}^{(N)}(\xi, \eta) = i^{N+1} \sqrt{\frac{(2N+1)!}{2(N+n)!(N-n)!}} [\xi^{N+n} \eta^{N-n} - (-1)^n \xi^{N-n} \eta^{N+n}], \quad n \geq 1,$$

$$h_0^{(N)}(\xi, \eta) = i^N \frac{\sqrt{(2N+1)!}}{N!} \xi^N \eta^N,$$

$$h_n^{(N)}(\xi, \eta) = -i^N \sqrt{\frac{(2N+1)!}{2(N+n)!(N-n)!}} [\xi^{N+n} \eta^{N-n} + (-1)^n \xi^{N-n} \eta^{N+n}], \quad n \geq 1.$$

Скалярное произведение в пространстве спинорных полиномов зададим так, чтобы выписанные полиномы были ортонормированны. В этом базисе матрица представления $\Omega^{(N)}(\alpha, \beta)$ вещественна (и ортогональна).

После того как выбран базис в пространстве спинорных полиномов, любой полином может быть записан в виде

$$h^{(N)}(\xi, \eta) = \sum_{n=-N}^{n=N} a_n^{(N)} h_n^{(N)}(\xi, \eta).$$

Очевидно, что коэффициенты $a_n^{(N)}$ можно рассматривать как координаты вектора $a^{(N)}$ в пространстве размерности $2N+1$. При этом если преобразование базисных полиномов задается матрицей $\Omega^{(N)}(\alpha, \beta)$

$$\begin{pmatrix} T_g h_{-N}^{(N)}(\xi, \eta) \\ \vdots \\ T_g h_N^{(N)}(\xi, \eta) \end{pmatrix} = \Omega^{(N)}(\alpha, \beta) \begin{pmatrix} h_{-N}^{(N)}(\alpha, \beta) \\ \vdots \\ h_N^{(N)}(\alpha, \beta) \end{pmatrix},$$

то и преобразование вектора

$$a^{(N)} = \begin{pmatrix} a_{-N}^{(N)} \\ \vdots \\ a_N^{(N)} \end{pmatrix}$$

задается той же матрицей: $a'^{(N)} = \Omega^{(N)}(\alpha, \beta) a^{(N)}$.

Покажем, что преобразование трехмерного вектора согласуется с правилом (1). В самом деле, если $g \in SU(2)$ и $\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = g^* \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$, то $(-\eta' \ \xi') = (-\eta \ \xi)g$. Заметим еще, что

$$\begin{aligned} a_{-1}^{(1)}h_{-1}^{(1)}(\xi, \eta) + a_0^{(1)}h_0^{(1)}(\xi, \eta) + a_1^{(1)}h_1^{(1)}(\xi, \eta) \\ = -\frac{\sqrt{6}}{2}i(-\eta \ \xi) \begin{pmatrix} a_0^{(1)} & a_1^{(1)} + ia_{-1}^{(1)} \\ a_1^{(1)} - ia_{-1}^{(1)} & -a_0^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} a_{-1}^{(1)}h_{-1}^{(1)}(\xi, \eta) + a_0^{(1)}h_0^{(1)}(\xi, \eta) + a_1^{(1)}h_1^{(1)}(\xi, \eta) \\ = -\frac{\sqrt{6}}{2}i(-\eta \ \xi) \begin{pmatrix} a_0^{(1)} & a_1^{(1)} + ia_{-1}^{(1)} \\ a_1^{(1)} - ia_{-1}^{(1)} & -a_0^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \\ = -\frac{\sqrt{6}}{2}i(-\eta \ \xi)gg^* \begin{pmatrix} a_0^{(1)} & a_1^{(1)} + ia_{-1}^{(1)} \\ a_1^{(1)} - ia_{-1}^{(1)} & -a_0^{(1)} \end{pmatrix} gg^* \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \\ = -\frac{\sqrt{6}}{2}i(-\eta' \ \xi') \begin{pmatrix} a_0'^{(1)} & a_1'^{(1)} + ia_{-1}'^{(1)} \\ a_1'^{(1)} - ia_{-1}'^{(1)} & -a_0'^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} \\ = a_{-1}'^{(1)}h_{-1}'^{(1)}(\xi', \eta') + a_0'^{(1)}h_0'^{(1)}(\xi', \eta') + a_1'^{(1)}h_1'^{(1)}(\xi', \eta'). \end{aligned}$$

Значит, выражение

$$x_{-1}h_{-1}^{(1)}(\xi, \eta) + x_0h_0^{(1)}(\xi, \eta) + x_1h_1^{(1)}(\xi, \eta)$$

является инвариантом.

Обычно базис в пространстве спинорных полиномов выбирают следующим образом:

$$e_n^{(N)}(\xi, \eta) = (-1)^{N+n} \sqrt{\frac{(2N+1)!}{(N+n)!(N-n)!}} \xi^{N+n} \eta^{N-n}, \quad n = -N, \dots, 0, \dots, N.$$

Предлагаемый базис с этим базисом связан формулами ($n \geq 1$)

$$\begin{aligned} h_{-n}^{(N)}(\xi, \eta) &= \frac{(-i)^{N-1}}{\sqrt{2}} [(-1)^n e_n^{(N)}(\xi, \eta) - e_{-n}^{(N)}(\xi, \eta)], \\ h_0^{(N)}(\xi, \eta) &= (-i)^N e_0^{(N)}(\xi, \eta), \\ h_n^{(N)}(\xi, \eta) &= -\frac{(-i)^N}{\sqrt{2}} [(-1)^n e_n^{(N)}(\xi, \eta) + e_{-n}^{(N)}(\xi, \eta)]. \end{aligned}$$

Очевидно, что переход от одного базиса к другому осуществляется унитарным преобразованием.

В группе $SU(2)$ выделяют следующие три однопараметрические подгруппы:

$$\begin{aligned} g_{-1}(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad g_0(\varphi) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}, \\ g_1(\omega) &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\omega}{2} & -i \sin \frac{\omega}{2} \\ -i \sin \frac{\omega}{2} & \cos \frac{\omega}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Инфинитезимальные операторы представления T_g этих подгрупп в пространстве спинорных полиномов $G_j = \frac{d}{d\omega} T_{g_j(\omega)}|_{\omega=0}$ ($j = -1, 0, 1$) задаются формулами

$$G_{-1} = \frac{1}{2} \left(-\eta \frac{\partial}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial}{\partial \eta} \right), \quad G_0 = \frac{i}{2} \left(-\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right), \quad G_1 = \frac{i}{2} \left(\eta \frac{\partial}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial}{\partial \eta} \right),$$

при этом $T_{g_j(\omega)} = e^{\omega G_j}$.

Приведем формулы, описывающие действие инфинитезимальных операторов на базисные полиномы:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} G_{-1} & G_1 \\ -G_1 & G_{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{-n}^{(N)}(\xi, \eta) \\ h_n^{(N)}(\xi, \eta) \end{pmatrix} &= -\sqrt{(N+n)(N-n+1)} \begin{pmatrix} h_{-n+1}^{(N)}(\xi, \eta) \\ h_{n-1}^{(N)}(\xi, \eta) \end{pmatrix}, \quad n \geq 2; \\ \begin{pmatrix} G_{-1} & G_1 \\ -G_1 & G_{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{-1}^{(N)}(\xi, \eta) \\ h_1^{(N)}(\xi, \eta) \end{pmatrix} &= \sqrt{2N(N+1)} \begin{pmatrix} 0 \\ h_0^{(N)}(\xi, \eta) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} G_{-1} & -G_1 \\ G_1 & G_{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{-n}^{(N)}(\xi, \eta) \\ h_n^{(N)}(\xi, \eta) \end{pmatrix} &= \sqrt{(N+n+1)(N-n)} \begin{pmatrix} h_{-n-1}^{(N)}(\xi, \eta) \\ h_{n+1}^{(N)}(\xi, \eta) \end{pmatrix}, \quad n \geq 1; \\ \begin{pmatrix} G_{-1} & -G_1 \\ G_1 & G_{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0^{(N)}(\xi, \eta) \\ h_1^{(N)}(\xi, \eta) \end{pmatrix} &= -\sqrt{\frac{N(N+1)}{2}} \begin{pmatrix} h_{-1}^{(N)}(\xi, \eta) \\ h_1^{(N)}(\xi, \eta) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & G_0 \\ -G_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{-n}^{(N)}(\xi, \eta) \\ h_n^{(N)}(\xi, \eta) \end{pmatrix} &= n \begin{pmatrix} h_{-n}^{(N)}(\xi, \eta) \\ h_n^{(N)}(\xi, \eta) \end{pmatrix}, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

При описанном соответствии $SU(2) \rightarrow SO(3)$ выделенным однопараметрическим подгруппам $g_j(\omega)$ в $SU(2)$ соответствуют однопараметрические подгруппы в $SO(3)$ — вращения вокруг координатных осей:

$$\begin{aligned} g_{-1}(\omega) &\rightarrow P_{-1}(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & -\sin \omega \\ 0 & \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix}, \\ g_0(\omega) &\rightarrow P_0(\omega) = \begin{pmatrix} \cos \omega & 0 & \sin \omega \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \omega & 0 & \cos \omega \end{pmatrix}, \\ g_1(\omega) &\rightarrow P_1(\omega) = \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Любое $g \in SU(2)$ можно представить в виде произведения трех матриц из указанных однопараметрических подгрупп, а именно

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = g_0(\omega) \cdot g_{-1}(\theta) \cdot g_0(\varphi).$$

При этом параметры Кэли — Клейна α, β оказываются выраженными через углы Эйлера

$$\alpha = e^{-\frac{i}{2}(\varphi+\omega)} \cos \frac{\theta}{2}, \quad \beta = e^{\frac{i}{2}(\varphi-\omega)} \sin \frac{\theta}{2}.$$

По определению представления имеем разложение

$$T_g = T_{g_0(\omega)} \cdot T_{g_{-1}(\theta)} \cdot T_{g_0(\varphi)}.$$

Поэтому матричные элементы представления T_g будут вычислены, если мы вычислим матричные элементы представлений $T_{g^{-1}(\theta)}$ и $T_{g_0(\varphi)}$ двух однопараметрических подгрупп.

Матрицы этих представлений обозначим через $\Omega_{-1}^{(N)}(\theta)$ и $\Omega_0^{(N)}(\varphi)$ соответственно, а их элементы — через $\Omega_{-1,n,k}^{(N)}(\theta)$ и $\Omega_{0,n,k}^{(N)}(\varphi)$. В следующем параграфе мы вычислим эти матричные элементы, а здесь приведем результаты вычислений.

Для матрицы $\Omega_0^{(N)}(\varphi)$ имеем

$$\Omega_{0,0,0}^{(N)}(\varphi) = 1, \quad \Omega_{0,n,n}^{(N)}(\varphi) = \cos n\varphi, \quad \Omega_{0,-n,n}^{(N)} = \sin n\varphi$$

при $n = \pm 1, \pm 2, \pm N$ и $\Omega_{0,n,k}^{(N)}(\varphi) = 0$ в остальных случаях.

Для матрицы $\Omega_{-1}^{(N)}(\theta)$

$$\begin{aligned} \Omega_{-1,\pm n,\pm k}^{(N)}(\theta) &= \frac{(-1)^{N-k}}{2^N(1-\mu^2)^{k/2}} \sqrt{\frac{(N+k)!}{(N-k)!(N-n)!(N+n)!}} \\ &\quad \times \left\{ \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} \right)^{\frac{n}{2}} \frac{d^{N-k}}{d\mu^{N-k}} [(1+\mu)^{N+n}(1-\mu)^{N-n}] \right. \\ &\quad \left. \pm (-1)^n \left(\frac{1+\mu}{1-\mu} \right)^{\frac{n}{2}} \frac{d^{N-k}}{d\mu^{N-k}} [(1+\mu)^{N-n}(1-\mu)^{N+n}] \right\} \quad \text{при } n, k \geq 1; \end{aligned}$$

$$\Omega_{-1,0,0}^{(N)}(\theta) = \frac{(-1)^N}{2^N \cdot N!} \frac{d^N}{d\mu^N} (1-\mu^2)^N,$$

$$\Omega_{-1,0,k}^{(N)}(\theta) = -\frac{(-1)^{N-k}}{2^N \cdot N!} \sqrt{\frac{2 \cdot (N+k)!}{(N-k)!}} \frac{1}{(1-\mu^2)^{k/2}} \frac{d^{N-k}}{d\mu^{N-k}} (1-\mu^2)^N \quad \text{при } k \geq 1,$$

$$\Omega_{-1,n,0}^{(N)}(\theta) = -\frac{(-1)^N}{2^N \cdot N!} \sqrt{\frac{2 \cdot (N+n)!}{(N-n)!}} \frac{1}{(1-\mu^2)^{n/2}} \frac{d^{N-n}}{d\mu^{N-n}} (1-\mu^2)^N \quad \text{при } n \geq 1,$$

В частности, в §3 описаны преобразования этими матричными элементами классических ортогональных гармонических полиномов в трехмерном пространстве. Как это ни удивительно, соответствующих формул для тессеральных полиномов найти не удалось. (Преобразование для полиномов с цилиндрической симметрией приводится в учебниках и справочниках.) Формулы сложения в [2, 4] используют комплексный базис, в котором выделение ортогональных представлений из унитарных затруднительно.

§ 2. Вычисление матричных элементов

Вычислим матричные элементы представления $T_{g_0(\varphi)}$, т. е. $\Omega_{0,n,k}^{(N)}(\varphi)$ — элементы матрицы $\Omega_0^{(N)}(\varphi)$. Для спинорного полинома $h(\xi, \eta)$ имеем

$$T_{g_0(\varphi)} h(\xi, \eta) = h(e^{\frac{i\varphi}{2}} \xi, e^{-\frac{i\varphi}{2}} \eta).$$

Проводя несложные вычисления для базисных полиномов $h_n^{(N)}(\xi, \eta)$, получим ($n \geq 1$)

$$\begin{aligned} T_{g_0(\varphi)} h_{-n}^{(N)}(\xi, \eta) &= \cos n\varphi \cdot h_{-n}^{(N)}(\xi, \eta) + \sin n\varphi \cdot h_n^{(N)}(\xi, \eta), \\ T_{g_0(\varphi)} h_0^{(N)}(\xi, \eta) &= h_0^{(N)}(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (3)$$

$$T_{g_0(\varphi)} h_n^{(N)}(\xi, \eta) = -\sin n\varphi \cdot h_{-n}^{(N)}(\xi, \eta) + \cos n\varphi \cdot h_n^{(N)}(\xi, \eta),$$

т. е. $\Omega_{0,0,0}^{(N)}(\varphi) = 1$, $\Omega_{0,n,n}^{(N)}(\varphi) = \cos n\varphi$, $\Omega_{0,-n,+n}^{(N)}(\varphi) = \sin n\varphi$ при $n = \pm 1, \pm 2, \pm N$ и $\Omega_{0,n,k}^{(N)}(\varphi) = 0$ в остальных случаях.

Переходим к вычислению матричных элементов представления $T_{g_{-1}}(\theta)$ однопараметрической подгруппы $g_{-1}(\theta)$. Матрицу этого представления обозначим через $\Omega_{-1}^{(N)}(\theta)$. Сначала выявим блочную структуру матрицы $\Omega_{-1}^{(N)}(\theta)$ и свойства симметрии ее элементов. В силу того, что любая однопараметрическая подгруппа коммутативна, справедливы тождества

$$\begin{aligned} g_{-1}(\pi)g_{-1}(\theta) &= g_{-1}(\theta)g_{-1}(\pi), & T_{g_{-1}(\pi)} \cdot T_{g_{-1}(\theta)} &= T_{g_{-1}(\theta)} \cdot T_{g_{-1}(\pi)}, \\ \Omega_{-1}^{(N)}(\pi)\Omega_{-1}^{(N)}(\theta) &= \Omega_{-1}^{(N)}(\theta)\Omega_{-1}^{(N)}(\pi). \end{aligned} \quad (4)$$

Так как $g_{-1}(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, имеем $T_{g_{-1}(\pi)}h(\xi, \eta) = h(-\eta, \xi)$.

Вычисляя действие представления на базисные полиномы, получаем

$$\begin{aligned} T_{g_{-1}(\pi)}h_{-n}^{(N)}(\xi, \eta) &= (-1)^{N+1}h_{-n}^{(N)}(\xi, \eta), \\ T_{g_{-1}(\pi)}h_0^{(N)}(\xi, \eta) &= (-1)^N h_0^{(N)}(\xi, \eta), \\ T_{g_{-1}(\pi)}h_n^{(N)}(\xi, \eta) &= (-1)^N h_n^{(N)}(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Таким образом, $\Omega_{-1}^{(N)}(\pi) = (-1)^N \begin{pmatrix} -I_N & 0 \\ 0 & I_{N+1} \end{pmatrix}$. Поэтому из равенства (4)

вытекает следующая блочно-диагональная структура матрицы $\Omega_{-1}^{(N)}(\theta)$:

$$\Omega_{-1}(\theta) = \begin{pmatrix} A_N & 0 \\ 0 & A_{N+1} \end{pmatrix},$$

т. е. отличными от нуля могут быть только элементы $\Omega_{-1,-m,-k}^{(N)}(\theta)$ при $n, k \geq 1$ и элементы $\Omega_{-1,n,k}^{(N)}(\theta)$ при $n, k \geq 0$.

Докажем еще одно свойство симметрии для элементов матрицы $\Omega_{-1}^{(N)}(\theta)$. Легко убедиться в справедливости тождества

$$g_0(\pi) \cdot g_{-1}(-\theta) = g_{-1}(\theta) \cdot g_0(\pi).$$

Следовательно, для представлений выполнено равенство

$$T_{g_0(\pi)} \cdot T_{g_{-1}(-\theta)} = T_{g_{-1}(\theta)} \cdot T_{g_0(\pi)},$$

или

$$T_{g_0(\pi)}[T_{g_{-1}(\theta)}]^{-1} = T_{g_{-1}(\theta)} \cdot T_{g_0(\pi)}.$$

Значит, аналогичное тождество выполнено и для матриц представления

$$\Omega_0^{(N)}(\pi)[\Omega_{-1}^{(N)}(\theta)]^{-1} = \Omega_{-1}^{(N)}(\theta) \cdot \Omega_0^{(N)}(\pi).$$

В силу ортогональности нашего представления $[\Omega_{-1}^{(N)}(\theta)]^{-1} = [\Omega_{-1}^{(N)}(\theta)]^T$. Поэтому

$$\Omega_0^{(N)}(\pi)[\Omega_{-1}^{(N)}(\theta)]^T = \Omega_{-1}^{(N)}(\theta)\Omega_0^{(N)}(\pi). \quad (5)$$

Из формул (3) следует, что

$$T_{g_0(\pi)}h_n^{(N)}(\xi, \eta) = (-1)^n h_n^{(N)}(\xi, \eta),$$

т. е. $\Omega_{0,n,k}^{(N)}(\pi) = (-1)^n \delta_{nk}$. Поэтому из (5) для элементов матрицы $\Omega_{-1}^{(N)}(\theta)$ вытекает, что

$$\Omega_{-1,n,k}^{(N)}(\theta) = (-1)^{n+k} \Omega_{-1,k,n}^{(N)}(\theta). \quad (6)$$

Теперь переходим к вычислению ненулевых элементов матрицы $\Omega_{-1}^{(N)}(\theta)$. Сначала вычислим элементы с отрицательными номерами. Они определяются следующей производящей функцией ($n \geq 1$):

$$h_{-n}^{(N)} \left(\cos \frac{\theta}{2} \cdot \xi - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \eta, \sin \frac{\theta}{2} \cdot \xi + \cos \frac{\theta}{2} \cdot \eta \right) = \sum_{k=1}^N \Omega_{-1,-n,-k}^{(N)}(\theta) h_{-k}^{(N)}(\xi, \eta). \quad (7)$$

Мы уже учли то, что $\Omega_{-1,-n,k}^{(N)}(\theta) = 0$ при $n \geq 1, k \geq 0$. Положим $\xi = 1, \cos \theta = \mu, -\sin \theta \cdot \eta = t$. Тогда

$$\begin{aligned} \cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \eta &= \frac{1 + (\mu + t)}{2 \cos \frac{\theta}{2}}, & \sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \cdot \eta &= \frac{1 - (\mu + t)}{2 \sin \frac{\theta}{2}}, \\ \eta &= -\frac{t}{\sin \theta} = -\frac{t}{\sqrt{1 - \mu^2}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя соотношения (8) в (7), получим

$$\begin{aligned} & i^{N+1} \sqrt{\frac{(2N+1)!}{2(N+n)!(N-n)!}} \left\{ \frac{[1 + (\mu + t)]^{N+n} [1 - (\mu + t)]^{N-n}}{2^{2N} \cos^{N+n} \frac{\theta}{2} \cdot \sin^{N-n} \frac{\theta}{2}} \right. \\ & \quad \left. - (-1)^n \frac{[1 + (\mu + t)]^{N-n} [1 - (\mu + t)]^{N+n}}{2^{2N} \cos^{N-n} \frac{\theta}{2} \cdot \sin^{N+n} \frac{\theta}{2}} \right\} \\ &= i^{N+1} \sum_{k=1}^N \Omega_{-1,-n,-k}^{(N)}(\theta) \sqrt{\frac{(2N+1)!}{2(N+k)!(N-k)!}} \left[\frac{(-1)^{N-k} t^{N-k}}{\sin^{N-k} \theta} - \frac{(-1)^{N+k} t^{N+k}}{\sin^{N+k} \theta} \right] \end{aligned}$$

или после сокращений

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^N \sqrt{(N+n)!(N-n)!}} \left\{ \frac{[1 + (\mu + t)]^{N+n} [1 - (\mu + t)]^{N-n}}{\cos^n \frac{\theta}{2} \sin^{-n} \frac{\theta}{2}} \right. \\ & \quad \left. - (-1)^n \frac{[1 + (\mu + t)]^{N-n} [1 - (\mu + t)]^{N+n}}{\cos^{-n} \frac{\theta}{2} \sin^n \frac{\theta}{2}} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\Omega_{-1,-n,-k}^{(N)}(\theta)}{\sqrt{(N+k)!(N-k)!}} \left[\frac{(-1)^{N-k} t^{N-k}}{\sin^{-k} \theta} - \frac{(-1)^{N+k} t^{N+k}}{\sin^k \theta} \right]. \end{aligned}$$

Перепишем еще раз, используя замены

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \mu^2}, \quad \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \mu}{1 + \mu}}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^N \sqrt{(N+n)!(N-n)!}} \left\{ \left(\frac{1 - \mu}{1 + \mu} \right)^{\frac{n}{2}} [1 + (\mu + t)]^{N+n} [1 - (\mu + t)]^{N-n} \right. \\ & \quad \left. - (-1)^n \left(\frac{1 + \mu}{1 - \mu} \right)^{\frac{n}{2}} [1 + (\mu + t)]^{N-n} [1 - (\mu + t)]^{N+n} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{\Omega_{-1,-n,-k}^{(N)}(\theta)}{\sqrt{(N+k)!(N-k)!}} \left[(-1)^{N-k} (1 - \mu^2)^{k/2} t^{N-k} - \frac{(-1)^{N+k} t^{N+k}}{(1 - \mu^2)^{k/2}} \right]. \quad (10) \end{aligned}$$

Выпишем формулу Тейлора в нужной нам форме. Пусть $f(z)$ — полином степени $2N$, тогда

$$\begin{aligned} f(\mu + t) &= \sum_{k=-N}^{k=N} \frac{t^{N-k}}{(N-k)!} \frac{d^{N-k}}{d\mu^{N-k}} f(\mu) \\ &\equiv \frac{t^N}{N!} \frac{d^N}{d\mu^N} f(\mu) + \sum_{k=1}^N \left[\frac{t^{N-k}}{(N-k)!} \frac{d^{N-k}}{d\mu^{N-k}} f(\mu) + \frac{t^{N+k}}{(N+k)!} \frac{d^{N+k}}{d\mu^{N+k}} f(\mu) \right]. \end{aligned}$$

Используя эту формулу для разложения левой части (10) по степеням t и приравнявая слева и справа коэффициенты при степени t^{N-k} , получим

$$\begin{aligned} \Omega_{-1,-n,-k}^{(N)}(\theta) &= \frac{(-1)^{N-k}}{2^N (1-\mu^2)^{k/2}} \sqrt{\frac{(N+k)!}{(N-k)!(N-n)!(N+n)!}} \\ &\quad \times \left\{ \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} \right)^{\frac{n}{2}} \frac{d^{N-k}}{d\mu^{N-k}} [(1+\mu)^{N+n} (1-\mu)^{N-n}] \right. \\ &\quad \left. - (-1)^n \left(\frac{1+\mu}{1-\mu} \right)^{\frac{n}{2}} \frac{d^{N-k}}{d\mu^{N-k}} [(1+\mu)^{N-n} (1-\mu)^{N+n}] \right\}. \end{aligned}$$

Вычислим ненулевые элементы матрицы $\Omega_{-1}^{(N)}(\theta)$, стоящие на центральной строке. Они определяются следующей производящей функцией:

$$h_0^{(N)} \left(\cos \frac{\theta}{2} \cdot \xi - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \eta, \sin \frac{\theta}{2} \cdot \xi + \cos \frac{\theta}{2} \cdot \eta \right) = \sum_{k=0}^N \Omega_{-1,0,k}^{(N)}(\theta) h_k^{(N)}(\xi, \eta).$$

Подставляя соотношения (8) в это тождество, имеем

$$\begin{aligned} &\frac{i^N \sqrt{(2N+1)!}}{N!} \frac{[1+(\mu+t)]^N [1-(\mu+t)]^N}{2^N \cos^N \frac{\theta}{2} \cdot 2^N \sin^N \frac{\theta}{2}} \\ &= i^N \Omega_{-1,0,0}^{(N)}(\theta) \frac{\sqrt{(2N+1)!} (-1)^N t^N}{N! \sin^N \theta} \\ &\quad - i^N \sum_{k=1}^N \Omega_{-1,0,k}^{(N)}(\theta) \sqrt{\frac{(2N+1)!}{2(N+k)!(N-k)!}} \left[\frac{(-1)^{N-k} t^{N-k}}{\sin^{N-k} \theta} + \frac{(-1)^N t^{N+k}}{\sin^{N+k} \theta} \right] \end{aligned}$$

или после упрощений

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^N N!} [1-(\mu+t)^2]^N &= \Omega_{-1,0,0}^{(N)}(\theta) \frac{(-1)^N t^N}{N!} \\ &\quad - \sum_{k=1}^N \frac{\Omega_{-1,0,k}^{(N)}(\theta)}{\sqrt{2(N+k)!(N-k)!}} \left[(-1)^{N-k} (1-\mu^2)^{k/2} t^{N-k} + \frac{(-1)^N t^{N+k}}{(1-\mu^2)^{k/2}} \right]. \end{aligned}$$

Приравнявая в этом равенстве коэффициенты при t^N и t^{N-k} , находим

$$\begin{aligned} \Omega_{-1,0,0}^{(N)}(\theta) &= \frac{(-1)^N}{2^N \cdot N!} \frac{d^N}{d\mu^N} (1-\mu^2)^N, \\ \Omega_{-1,0,k}^{(N)}(\theta) &= -\frac{(-1)^{N-k}}{2^N \cdot N!} \sqrt{\frac{2 \cdot (N+k)!}{(N-k)!}} \frac{1}{(1-\mu^2)^{k/2}} \frac{d^{N-k}}{d\mu^{N-k}} (1-\mu^2)^N. \end{aligned}$$

В силу равенства (6) имеем

$$\Omega_{-1,n,0}^{(N)}(\theta) = -\frac{(-1)^N}{2^N \cdot N!} \sqrt{\frac{2 \cdot (N+n)!}{(N-n)!}} \frac{1}{(1-\mu^2)^{n/2}} \frac{d^{N-n}}{d\mu^{N-n}} (1-\mu^2)^N.$$

Теперь вычислим элементы матрицы $\Omega_{-1}^{(N)}(\theta)$ с положительными номерами ($n \geq 1$):

$$h_n^{(N)} \left(\cos \frac{\theta}{2} \cdot \xi - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \eta, \sin \frac{\theta}{2} \cdot \xi + \cos \frac{\theta}{2} \cdot \eta \right) = \sum_{k=0}^N \Omega_{-1,n,k}^{(N)}(\theta) h_k^{(N)}(\xi, \eta).$$

Подставляя соотношения (8) в это тождество, получим

$$\begin{aligned} & -i^N \sqrt{\frac{(2N+1)!}{2(N+n)!(N-n)!}} \left\{ \frac{[1+(\mu+t)]^{N+n}[1-(\mu+t)]^{N-n}}{2^N \cos^{N+n} \frac{\theta}{2} \cdot 2^N \sin^{N-n} \frac{\theta}{2}} \right. \\ & + (-1)^n \frac{[1+(\mu+t)]^{N-n}[1-(\mu+t)]^{N+n}}{2^N \cos^{N-n} \frac{\theta}{2} \cdot 2^N \sin^{N+n} \frac{\theta}{2}} \left. \right\} = i^N \Omega_{-1,n,0}^{(N)}(\theta) \frac{\sqrt{(2N+1)!}}{N!} \frac{(-1)^N t^N}{\sin^N \theta} \\ & - i^N \sum_{k=1}^N \Omega_{-1,n,k}^{(N)}(\theta) \sqrt{\frac{(2N+1)!}{2(N+k)!(N-k)!}} \left[\frac{(-1)^{N-k} t^{N-k}}{\sin^{N-k} \theta} + \frac{(-1)^{N+k} t^{N+k}}{\sin^{N+k} \theta} \right] \end{aligned}$$

или после упрощений

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^N \sqrt{2(N+n)!(N-n)!}} \left\{ \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} \right)^{\frac{n}{2}} [1+(\mu+t)]^{N+n} [1-(\mu+t)]^{N-n} \right. \\ & + (-1)^n \left(\frac{1+\mu}{1-\mu} \right)^{\frac{n}{2}} [1+(\mu+t)]^{N-n} [1-(\mu+t)]^{N+n} \left. \right\} = -\frac{(-1)^N t^N}{N!} \Omega_{-1,n,0}^{(N)}(\theta) \\ & + \sum_{k=1}^N \frac{\Omega_{-1,n,k}^{(N)}(\theta)}{\sqrt{2(N+k)!(N-k)!}} \left[(-1)^{N-k} (1-\mu^2)^{k/2} t^{N-k} + \frac{(-1)^N t^{N+k}}{(1-\mu^2)^{k/2}} \right]. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при степени t^{N-k} , приходим к равенству

$$\begin{aligned} \Omega_{-1,n,k}^{(N)}(\theta) &= \frac{(-1)^{N-k}}{2^N (1-\mu^2)^{k/2}} \sqrt{\frac{(N+k)!}{(N-k)!(N+n)!(N-n)!}} \\ & \left[\left(\frac{1-\mu}{1+\mu} \right)^{\frac{n}{2}} \frac{d^{N-k}}{d\mu^{N-k}} (1+\mu)^{N+n} (1-\mu)^{N-n} \right. \\ & \left. + (-1)^n \left(\frac{1+\mu}{1-\mu} \right)^{\frac{n}{2}} \frac{d^{N-k}}{d\mu^{N-k}} (1+\mu)^{N-n} (1-\mu)^{N+n} \right]. \end{aligned}$$

§ 3. Классическое представление в пространстве ортогональных полиномов

Как мы уже отмечали, выражение

$$x_{-1} h_{-1}^{(1)}(\xi, \eta) + x_0 h_0^{(1)}(\xi, \eta) + x_1 h_1^{(1)}(\xi, \eta)$$

является инвариантом. Обозначим

$$\Phi_1^{-1}(x_{-1}, x_0, x_1) = \frac{x_{-1}}{\sqrt{6}}, \quad \Phi_1^0(x_{-1}, x_0, x_1) = \frac{x_0}{\sqrt{6}}, \quad \Phi_1^1(x_{-1}, x_0, x_1) = \frac{x_1}{\sqrt{6}}.$$

Выражение

$$\begin{aligned} & [\Phi_1^{-1}(x_{-1}, x_0, x_1)h_{-1}^{(1)}(\xi, \eta) + \Phi_1^0(x_{-1}, x_0, x_1)h_0^{(1)}(\xi, \eta) + \Phi_1^1(x_{-1}, x_0, x_1)h_1^{(1)}(\xi, \eta)]^N \\ & \text{тоже является инвариантом. Определим полиномы } \Phi_N^n(x_{-1}, x_0, x_1) \text{ с помощью} \\ & \text{следующей производящей функции:} \\ & [\Phi_1^{-1}(x_{-1}, x_0, x_1)h_{-1}^{(1)}(\xi, \eta) + \Phi_1^0(x_{-1}, x_0, x_1)h_0^{(1)}(\xi, \eta) + \Phi_1^1(x_{-1}, x_0, x_1)h_1^{(1)}(\xi, \eta)]^N \\ & = N! \sum_{n=-N}^{n=N} \Phi_N^n(x_{-1}, x_0, x_1)h_n^N(\xi, \eta). \quad (11) \end{aligned}$$

Полиномы $\Phi_N^n(x_{-1}, x_0, x_1)$, $n = -N, \dots, N$, являются однородными гармоническими, образуют базис в пространстве однородных гармонических полиномов и преобразуются по неприводимому представлению веса N . Получим явные формулы для этих полиномов. Напомним, что

$$h_{-1}^{(1)}(\xi, \eta) = -\frac{\sqrt{6}}{2}(\xi^2 + \eta^2), \quad h_0^{(1)}(\xi, \eta) = i\sqrt{6}\xi\eta, \quad h_1^{(1)}(\xi, \eta) = i\frac{\sqrt{6}}{2}(\eta^2 - \xi^2).$$

Мы будем использовать сферическую систему координат

$$x_{-1} = r \sin \theta \sin \varphi \quad x_0 = r \cos \theta \quad x_1 = r \sin \theta \cos \varphi.$$

Преобразуем левую часть производящей функции (11):

$$\begin{aligned} & \Phi_1^{-1}(x_{-1}, x_0, x_1)h_{-1}^{(1)}(\xi, \eta) + \Phi_1^0(x_{-1}, x_0, x_1)h_0^{(1)}(\xi, \eta) + \Phi_1^1(x_{-1}, x_0, x_1)h_1^{(1)}(\xi, \eta) \\ & = -\frac{x_{-1}}{2}(\xi^2 + \eta^2) + ix_0\xi\eta + i\frac{x_1}{2}(\eta^2 - \xi^2) = \frac{i}{2}[(x_1 + ix_{-1})\eta^2 + 2x_0\eta\xi - (x_1 - ix_{-1})\xi^2] \\ & = \frac{ir}{2}[\sin \theta e^{i\varphi}\eta^2 + 2\cos \theta\xi\eta - \sin \theta e^{-i\varphi}\xi^2]. \end{aligned}$$

Положим $\xi = 1$, $t = \sin \theta e^{i\varphi}\eta$. Тогда

$$\begin{aligned} & \Phi_1^{-1}(x_{-1}, x_0, x_1)h_{-1}^{(1)}(1, \eta) + \Phi_1^0(x_{-1}, x_0, x_1)h_0^{(1)}(1, \eta) + \Phi_1^1(x_{-1}, x_0, x_1)h_1^{(1)}(1, \eta) \\ & = \frac{ir}{2} \left[\eta t + 2\cos \theta \cdot \eta - \frac{\sin^2 \theta \cdot \eta}{t} \right] = \frac{ir\eta}{2t} [t^2 + 2\cos \theta \cdot t + \cos^2 \theta - 1] \\ & = \frac{ir\eta}{2t} [t^2 + 2\mu t + \mu^2 - 1] = -\frac{ir\eta}{2t} [1 - (t + \mu)^2]. \end{aligned}$$

Таким образом, для левой части производящей функции (11) при $\xi = 1$ имеем

$$\begin{aligned} & [\Phi_1^{-1}(x_{-1}, x_0, x_1)h_{-1}^{(1)}(1, \eta) + \Phi_1^0(x_{-1}, x_0, x_1)h_0^{(1)}(1, \eta) + \Phi_1^1(x_{-1}, x_0, x_1)h_1^{(1)}(1, \eta)]^N \\ & = \left(-\frac{ir\eta}{2t} \right)^N [1 - (t + \mu)^2]^N = \left(-\frac{ir\eta}{2t} \right)^N \sum_{n=-N}^{n=N} \frac{1}{(N+n)!} \frac{d^{N+n}}{d\mu^{N+n}} (1 - \mu^2)^N t^{N+n} \\ & = \left(\frac{-ir}{2} \right)^N \sum_{n=-N}^{n=N} \frac{(1 - \mu^2)^{\frac{N}{2}}}{(N+n)!} e^{in\varphi} \frac{d^{N+n}}{d\mu^{N+n}} (1 - \mu^2)^N \eta^{N+n} \\ & = i^N r^N N! \sum_{n=-N}^N \frac{(-1)^n P_N^n(\mu) e^{in\varphi}}{\sqrt{(2N+1)(N+n)!(N-n)!}} \eta^{N+n}. \end{aligned}$$

Мы обозначили

$$P_N^n(\mu) = \frac{(-1)^{N+n}}{2^N \cdot N!} \sqrt{\frac{(2N+1)(N-n)!}{(N+n)!}} (1-\mu)^{\frac{n}{2}} \frac{d^{N+n}}{d\mu^{N+n}} (1-\mu^2)^N.$$

Разложим правую часть равенства (11) при $\xi = 1$ по степеням η :

$$\begin{aligned} & N! \left\{ \sum_{n=1}^N [\Phi_N^{-n}(x_{-1}, x_0, x_1) h_{-n}^{(N)}(1, \eta) + \Phi_N^n(x_{-1}, x_0, x_1) h_n^{(N)}(1, \eta)] \right. \\ & \quad \left. + \Phi_N^0(x_{-1}, x_0, x_1) h_0^{(N)}(1, \eta) \right\} \\ &= i^N N! \sum_{n=1}^N \sqrt{\frac{(2N+1)!}{2(N+n)!(N-n)!}} [\Phi_N^{-n}(x_{-1}, x_0, x_1) i(\eta^{N-n} - (-1)^n \eta^{N+n}) \\ & \quad - \Phi_N^n(x_{-1}, x_0, x_1) (\eta^{N-n} + (-1)^n \eta^{N+n})] + i^N \sqrt{(2N+1)!} \Phi_N^0(x_{-1}, x_0, x_1) \eta^N \\ &= i^N N! \sum_{n=1}^N \sqrt{\frac{(2N+1)!}{2(N+n)!(N-n)!}} [(-\Phi_N^n(x_{-1}, x_0, x_1) + i\Phi_N^{-n}(x_{-1}, x_0, x_1)) \eta^{N-n} \\ & \quad - (-1)^n (\Phi_N^n(x_{-1}, x_0, x_1) + \Phi_N^{-n}(x_{-1}, x_0, x_1)) \eta^{N+n}] \\ & \quad + i^N \sqrt{(2N+1)!} \Phi_N^0(x_{-1}, x_0, x_1) \eta^N. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили следующее разложение по степеням η левой и правой частей равенства (11):

$$\begin{aligned} & r^N \sum_{n=-N}^N \frac{(-1)^n P_N^n(\mu) e^{in\varphi}}{\sqrt{(2N+1)(N+n)!(N-n)!}} \eta^{N+n} \\ &= \sum_{n=1}^N \sqrt{\frac{(2N+1)!}{2(N+n)!(N-n)!}} [(-\Phi_N^n(x_{-1}, x_0, x_1) + i\Phi_N^{-n}(x_{-1}, x_0, x_1)) \eta^{N-n} \\ & \quad - (-1)^n (\Phi_N^n(x_{-1}, x_0, x_1) + i\Phi_N^{-n}(x_{-1}, x_0, x_1)) \eta^{N+n}] \\ & \quad + \frac{\sqrt{(2N+1)!}}{N!} \Phi_N^0(x_{-1}, x_0, x_1) \eta^N. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при степенях η^{N+n} и η^N , получим

$$\begin{aligned} \Phi_N^{-n}(x_{-1}, x_0, x_1) &= -\frac{\sqrt{2} r^N \sin n\varphi}{\sqrt{(2N+1)(2N+1)!}} P_N^n(\cos \theta), \\ \Phi_N^0(x_{-1}, x_0, x_1) &= \frac{r^N}{\sqrt{(2N+1)(2N+1)!}} P_N^0(\cos \theta), \\ \Phi_N^n(x_{-1}, x_0, x_1) &= -\frac{\sqrt{2} r^N \cos n\varphi}{\sqrt{(2N+1)(2N+1)!}} P_N^n(\cos \theta). \end{aligned}$$

Построенные полиномы $\Phi_N^n(x_{-1}, x_0, x_1)$, $n = -N, \dots, N$, как было указано, образуют базис в пространстве однородных гармонических полиномов и преобразуются по неприводимому представлению веса N по тем же формулам, что и базисные спинорные полиномы $h^{(N)}(\xi, \eta)$. В частности, если координаты

(x_{-1}, x_0, x_1) повернуть вокруг оси x_{-1} на угол θ , то полиномы $\Phi_N^n(x_{-1}, x_0, x_1)$ преобразуются с помощью матрицы $\Omega_{-1}^{(N)}(\theta)$, а именно

$$\Phi_N^n(x_{-1}, x_0 \cos \theta + x_1 \sin \theta, -x_0 \sin \theta + x_1 \cos \theta) = \sum_{k=-N}^{k=N} \Omega_{-1, n, k}^{(N)}(\theta) \Phi_N^k(x_{-1}, x_0, x_1).$$

Выписанная формула является обобщением теоремы сложения [2, 4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шалиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. М.: Физматгиз, 1958.
2. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1991.
3. Годунов С. К., Михайлова Т. Ю. Представления группы вращений и сферические функции. Новосибирск: Научная книга, 1998.
4. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: Изд-во иностр. лит., 1952.

Статья поступила 14 сентября 2001 г.

Гордиенко Валерий Михайлович

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090

gordienk@math.nsc.ru