



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

День Зунг, Средняя ε -размерность класса функций $B_{G,p}$,
Матем. заметки, 1980, том 28, выпуск 5, 727–736

<https://www.mathnet.ru/mzm6403>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.80

19 апреля 2025 г., 11:31:52



СРЕДНЯЯ ε -РАЗМЕРНОСТЬ КЛАССА ФУНКЦИЙ $B_{G,p}$

Динь Зунг

1. Идея определить усредненные аппроксимативные характеристики впервые была выдвинута К. Шенноном [1, стр. 330—332] для случайных процессов и А. Н. Колмогоровым [2] для функциональных классов. В [2] В. М. Тихомировым была вычислена ε -энтропия на единицу времени различных классов аналитических функций, в частности класса B_G . В [3] было введено определение средней ε -размерности, предложенное В. М. Тихомировым, и вычислена величина средней ε -размерности классов $B_{G,2}$ и $W_2^{\bar{\alpha}}$. В этой работе доказано некоторое обобщение результата автора [3]. Перейдем к точным определениям.

Пусть X — нормированное пространство. \mathfrak{M}_m — совокупность линейных многообразий в X размерности, не превосходящей m , A и B — подмножества в X . Величина

$$d_m(A, X) = \inf_{M \in \mathfrak{M}_m} E(A, M, X),$$

где

$$E(A, B, X) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \|x - y\|_X,$$

называется m -мерным поперечником A в X по Колмогорову. Введем величину $K_\varepsilon(A, X)$, обратную к поперечнику по Колмогорову:

$$K_\varepsilon(A, X) = \inf \{m \mid \exists M \in \mathfrak{M}_m: E(A, M, X) < \varepsilon\}.$$

Величина $K_\varepsilon(A, X)$ характеризует необходимое число измерений линейного многообразия для приближения

множества A с точностью до ε . Назовем ее ε -размерностью A .

Далее, пусть X — нормированное пространство функций, заданных на \mathbf{R}^n . Предположим, что для любой функции $x(\cdot) \in X$ функция $(T_\tau x)(t) = x(t + \tau)$ и $x^T(t) = x(t) \chi^T(t)$, где $\chi^T(\cdot)$ — характеристическая функция множества $\{t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^n \mid |t_j| \leq T\}$, также принадлежат X . Обозначим через $\omega(\cdot, x(\cdot), X)$ модуль непрерывности функции $x(\cdot)$ в метрике X , Ω — совокупность всех модулей непрерывности. Для класса функций $W \subset X$ положим

$$K_\varepsilon^s(W, X) = \sup_{\omega \in \Omega} \limsup_{T \rightarrow \infty} K_\varepsilon((W \cap H_{\omega, X})^T, X^T)/(2T)^n,$$

$$K_\varepsilon^i(W, X) = \sup_{\omega \in \Omega} \liminf_{T \rightarrow \infty} K_\varepsilon((W \cap H_{\omega, X})^T, X^T)/(2T)^n,$$

где $W^T = \{x^T(\cdot) \mid x(\cdot) \in W\}$,

$$H_{\omega, X} = \{x(\cdot) \mid \|x(\cdot)\|_X \leq 1, \omega(h, x(\cdot), X) \leq \leq \omega(h), h \geq 0\} \quad (\omega \in \Omega),$$

Если две эти величины совпадают, то обозначим их через $\bar{K}_\varepsilon(W, X)$ и назовем средней ε -размерностью класса W . Если же для некоторого $\varepsilon_0 > 0$, $\bar{K}_\varepsilon(W, X)$ не зависит от ε , $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, то назовем величину $\bar{K}_\varepsilon(W, X)$ средней размерностью W , а класс W — правильным.

Мы будем иметь дело с классами функций из пространства $\mathcal{L}_p(\mathbf{R}^n)$ ($1 \leq p \leq \infty$), поэтому не будем различать две функции, отличающиеся на множестве меры нуль. Далее будут использоваться следующие обозначения: (x, y) — скалярное произведение векторов x и y из \mathbf{R}^n , $|x| = \sqrt{(x, x)}$ — длина вектора x , BX — единичный шар в нормированном пространстве X ,

$$\|x(\cdot)\|_{X, T} = \|x^T(\cdot)\|_X, \mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(\mathbf{R}^n),$$

$$\|x(\cdot)\|_p = \|x(\cdot)\|_{\mathcal{L}_p}, \omega(\cdot, x(\cdot))_p = \omega(\cdot, x(\cdot), \mathcal{L}_p),$$

$$H_{\omega, p} = H_{\omega, \mathcal{L}_p};$$

$$\square_\sigma = \{t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^n \mid |t_j| \leq \sigma_j\},$$

$$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n), \sigma_j > 0$$

(если $\sigma_1 = \dots = \sigma_n = T$, то $\square_\delta = \square_T$).

2. Пусть $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^n$, $\sigma_j > 0$. Целая функция n комплексных переменных $x(\cdot)$ называется функцией экспоненциального типа σ , если для любого $\varepsilon > 0$ существует константа $a = a(\varepsilon) > 0$ такая, что

$$|x(z)| \leq a \exp \sum_{k=1}^n (\sigma_k + \varepsilon) |z_k|, \quad z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Класс функций, ограниченных на \mathbb{R}^n , которые могут быть аналитически продолжены до целых функций экспоненциального типа σ , обозначим через B_σ , а пересечение B_σ с \mathcal{L}_p ($1 \leq p \leq \infty$) через $B_{\sigma, p}$ ($B_{\sigma, \infty} = B_\sigma$). По теореме Шварца

$$B_{\sigma, p} = \{x(\cdot) \in \mathcal{L}_p \mid \text{supp } \hat{x}(\cdot) \subset \square_\sigma\},$$

где $\hat{x}(\cdot)$ — преобразование Фурье $x(\cdot)$ в смысле обобщенных функций (см., например, [4, стр. 227]). В случае $p = 2$ этот результат составляет содержание классической теоремы Винера — Пэли. Определим более общий, чем $B_{\sigma, p}$, класс функций $B_{G, p}$ ($G \subset \mathbb{R}^n$):

$$B_{G, p} = \{x(\cdot) \in \mathcal{L}_p \mid \text{supp } \hat{x}(\cdot) \subset G\}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Класс $B_{G, p}$ представляет значительный интерес в вопросах о приближении классов функций многих переменных. В приближении классов гладких функций, заданных на \mathbb{R}^n подпространствами, средняя размерность которых задана, класс $B_{G, p}$ является экстремальным среди подпространств, средняя размерность которых равна $(2\pi)^{-n} \text{mes } G$.

3. Сформулируем некоторые вспомогательные факты.

Предложение 1. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $c = \prod_{j=1}^n \sigma_j$.

Тогда

$$\sup_{x(\cdot) \in B_{\sigma, p}} \omega(h, x(\cdot))_p \leq ch, \quad h \geq 0.$$

Доказательство этого утверждения непосредственно вытекает из неравенства Гёльдера и неравенства Бернштейна, если $x(\cdot) \in B_{\sigma, p}$, то $\|\hat{x}(\cdot)\|_p \leq c \|x(\cdot)\|_p$ (см. [5, стр. 116]).

Предложение 2 (см. [5, стр. 123]). Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $h = (h_1, \dots, h_n)$, $h_j > 0$. Тогда существует константа $c = c(h, \sigma, p) > 0$ такая, что для любой

функции $x(\cdot)$ из $B_{\sigma, p}$ выполняется неравенство

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |x(kh)|^p \leq c \|x(\cdot)\|_p^p,$$

где $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$, $kh = (k_1 h_1, \dots, k_n h_n)$.

Предложение 3 (см. [5, стр. 182]). Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $\sigma = (1/h_1, \dots, 1/h_n)$, $h > 0$. Тогда существует константа $c = c(\sigma, p) > 0$ такая, что для любой функции $x(\cdot)$ из \mathcal{L}_p выполняется неравенство

$$\inf_{y(\cdot) \in B_{\sigma, p}} \|x(\cdot) - y(\cdot)\|_p \leq c \omega(h, x(\cdot))_p.$$

Предложение 4 (интерполяционная формула Картрайт). Любая функция $x(\cdot)$ из B_{σ} может быть представлена в виде

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} x(k\Delta) \varphi_{\rho, k}(t), \quad \rho > 0,$$

где $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_n) = (\pi/(\sigma_1 + \rho), \dots, \pi/(\sigma_n + \rho))$, $k\Delta = (k_1 \Delta_1, \dots, k_n \Delta_n)$,

$$\varphi_{\rho, k}(t) = \prod_{j=1}^n \frac{\sin \rho(t_j - k_j \Delta_j) \sin(\sigma_j + \rho)(t_j - k_j \Delta_j)}{\rho(\sigma_j + \rho)(t_j - k_j \Delta_j)^2}.$$

Для функций одного переменного формула Картрайт выводится с помощью теоремы Фрагмена — Линделефа (см., например, [6]). Для функций многих переменных она может быть получена методом индукции по числу переменных.

Предложение 5. Пусть L — m -мерное подпространство в нормированном пространстве X . Тогда

$$d_{m-1}(\varepsilon(L \cap BX), X) = \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Это утверждение принадлежит В. М. Тихомирову [7].

Говорят, что функция $\psi(\cdot)$ является мультипликатором в \mathcal{L}_p , если существует константа $c = c(p, \psi) > 0$ такая, что для любой функции $x(\cdot)$ из \mathcal{L}_p выполняется неравенство

$$\|(\tilde{x}\psi)(\cdot)\|_p \leq c \|x(\cdot)\|_p,$$

где $\tilde{g}(\cdot)$ — обратное преобразование Фурье $g(\cdot)$ в смысле обобщенных функций.

Предложение 6 (см., например, [8]). Характеристическая функция множества $\xi + \square_{\sigma}$ ($\xi \in \mathbb{R}^n$) $\chi_{\xi + \square_{\sigma}}(\cdot)$ является мультипликатором в \mathcal{L}_p , $1 < p < \infty$.

4. Прежде чем сформулировать теорему, касающуюся правильности и средней ε -размерности класса $B_{G, p}$, докажем одну предварительную лемму.

ЛЕММА. Пусть $1 < p < \infty$, $\alpha > 0$,

$$G = \bigcup_{j=1}^s (\xi^j + \square_\alpha),$$

$$\text{int} (\xi^j + \square_\alpha) \cap \text{int} (\xi^{j'} + \square_\alpha) = \emptyset, \quad j' \neq j,$$

$$\delta = \pi/(\alpha - \rho), \quad 0 < \rho < \alpha,$$

$N\delta < T$ и L — линейное подпространство в \mathcal{L}_p , натянутое на функции $\exp \{i(\xi^j | t)\} \varphi_{-\rho, k}(t)$, $k \in \square_N$, $j=1, \dots, s$. Тогда $L \subset B_{G, p}$ и для любой функции $x(\cdot)$ из L имеет место следующая оценка:

$$\|x(\cdot)\|_{p, T}^p = \|x(\cdot)\|_p^p (1 - R(T, N)),$$

где

$$R(T, N) = cN^{p-1} / (T - N\delta)^{2p-1}, \quad c = c(\alpha, \rho, p) > 0.$$

Доказательство. Включение $L \subset B_{G, p}$ непосредственно вытекает из определения. Пусть

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{j=1}^s \sum_{k \in \square_N} x_{jk} \exp \{i(\xi^j | t)\} \varphi_{-\rho, k}(t) = \\ &= \sum_{j=1}^s \exp \{i(\xi^j | t)\} x_j(t). \end{aligned}$$

Рассмотрим сначала случай функции одного переменного. Пользуясь неравенством Гёльдера, равенством $x_j(k\delta) = x_{jk}$ и предложением 2, мы получим, что

$$\begin{aligned} \int_T^\infty |x_j(t)|^p dt &= \int_T^\infty \left| \sum_{|k| \leq N} x_{jk} \varphi_{-\rho, k}(t) \right|^p dt \leq \\ &\leq \int_T^\infty \left(\sum_{|k| \leq N} |x_{jk}|^p \right) \left(\sum_{|k| \leq N} |\varphi_{-\rho, k}(t)|^q \right)^{p/q} dt \leq \\ &\leq c_1 \|x_j(\cdot)\|_p^p \int_T^\infty \left(\sum_{|k| \leq N} |\varphi_{-\rho, k}(t)|^q \right)^{p/q} dt \leq \\ &\leq c_2 \|x_j(\cdot)\|_p^p \int_T^\infty \left(\frac{N}{(t - N\delta)^{2\sigma}} \right)^{p/q} dt = \\ &\stackrel{\text{в}}{=} c_2 \|x_j(\cdot)\|_p^p N^{p-1} \int_T^\infty \frac{dt}{(t - N\delta)^{2p}} \leq c_3 \|x_j(\cdot)\|_p^p \frac{N^{p-1}}{(T - N\delta)^{2p-1}}. \end{aligned}$$

Здесь $1/p + 1/q = 1$ и c_1, c_2, c_3 — константы, не зависящие от $x(\cdot)$. Такую же оценку можно получить для ин-

теграла $\int_{-\infty}^{-T} |x_j(\cdot)|^p dt$. Итак, для функций одного переменного имеет место следующее неравенство:

$$\int_{|t|>T} |x_j(t)|^p dt \leq c_4 \frac{N^{p-1}}{(T - N\delta)^{2p-1}} \|x_j(\cdot)\|_p^p, \quad j = 1, \dots, s.$$

Пусть теперь $x(t)$ — функция n переменных, $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$. Тогда функции от t_k

$$x_j^k(t_k) = \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |x_j(t)|^p dt_1 \dots dt_{k-1} dt_{k+1} \dots dt_n \right)^{1/p},$$

$$k = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, s$$

принадлежат классу $B_{\alpha, p}$ и $\|x_j^k(\cdot)\|_p \leq 2^{n-1} \|x_j(\cdot)\|_p$ (см. [5, стр. 130]). В силу неравенства для интеграла

$\int_{|t|>T} |x_j(t)|^p dt$ для функции одного переменного получим, что

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \square_T} |x_j(t)|^p dt \leq \sum_{k=1}^n \int_{|t_k|>T} |x_j(t)|^p dt =$$

$$= \sum_{k=1}^n \int_{|t_k|>T} |x_j^k(t_k)|^p dt_k \leq c_5 \frac{N^{p-1}}{(T - N\delta)^{2p-1}} \|x_j(\cdot)\|_p^p.$$

Из предложения 6 вытекает, что $\|x_j(\cdot)\|_p \leq c(p) \|x(\cdot)\|_p$. Отсюда получим нужную оценку. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА. Пусть $1 < p < \infty$, $G \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое по Жордану множество. Тогда класс $B_{G, p}$ правильный и при этом

$$\bar{K}_\varepsilon(B_{G, p}, \mathcal{L}_p) = (2\pi)^{-n} \text{mes } G, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

В [2] В. М. Тихомировым фактически было доказано, что $\bar{K}_\varepsilon(B_G, \mathcal{L}_\infty(R)) = \frac{\sigma}{\pi}$. В [3] автором была получена эта теорема для $p = 2$.

Доказательство. а) Пусть $\sigma = (\alpha, \dots, \alpha)$, $\alpha > 0$, $G = \bigcup_{j=1}^s (\xi^j + \square_\alpha)$,

$$\text{int}(\xi^j + \square_\alpha) \cap \text{int}(\xi^{j'} + \square_\alpha) = \emptyset, \quad j' \neq j.$$

Оценка снизу. Поскольку G ограничено, то вследствие предложения 1 $B_{G, p} \cap B\mathcal{L}_p \subset H_{\omega, p}$, где $\omega(h) = ah$, $a > 0$. Для $T > 0$ положим $N = \frac{1}{\delta}(T - T^{1-\beta})$, $0 < \beta < p/(2p-1)$, $\delta = \pi/(\alpha - \rho)$, $0 < \rho < \alpha$. Пусть $x(\cdot) \in L \subset B_{G, p}$,

$\|x(\cdot)\|_{p,T} \leq 1$, где L — подпространство, определяемое в предыдущей лемме. Из леммы вытекает, что $\|x(\cdot)\|_p = 1 + a(T)$, где $a(T) \rightarrow \infty$ при $T \rightarrow \infty$. Отсюда получим, что для любого ε , $0 < \varepsilon < 1$, существует $T_0 = T_0(\varepsilon) > 0$ такое, что для $T \geq T_0$

$$\varepsilon(L^T \cap B\mathcal{L}_p^T) \subset (L \cap B\mathcal{L}_p)^T.$$

Из предложения 5 вытекает, что

$$d_{m-1}((B_{G,p} \cap H_{\omega,p})^T, \mathcal{L}_p^T) \geq d_{m-1}((L \cap B\mathcal{L}_p)^T, \mathcal{L}_p^T) \geq \\ \geq d_{m-1}(\varepsilon(L^T \cap B\mathcal{L}_p^T), \mathcal{L}_p^T) = \varepsilon,$$

где m — размерность L . Поскольку $m > s(2N-1)^n$, то

$$K_\varepsilon((B_{G,p} \cap H_{\omega,p})^T, \mathcal{L}_p^T) \geq s(2N-1)^n = \\ = (2T)^ns(2\alpha-2\rho)^n/(2\pi)^n + o(T^n).$$

Следовательно,

$$K_\varepsilon^i(B_{G,p}, \mathcal{L}_p) \geq s(2\alpha-2\rho)^n/(2\pi)^n.$$

В силу произвольности $\rho > 0$ имеем

$$K_\varepsilon^i(B_{G,p}, \mathcal{L}_p) \geq s(2\alpha)^n / (2\pi)^n = (2\pi)^{-n} \text{mes } G, \\ 0 < \varepsilon < 1.$$

Оценка сверху. Пусть $x(\cdot) \in B_{G,p}$, $\|x(\cdot)\|_p \leq 1$. Из определения и предложения 6 вытекает, что

$$x(t) = \sum_{j=1}^s \exp\{i(\xi^j | t)\} x_j(t), \quad \|x_j(\cdot)\|_p \leq c_1, \quad j=1, \dots, s,$$

где $x_j(\cdot) \in B_{G,p}$ и константа c_1 не зависит от $x(\cdot)$. Пусть $T > 0$, $N\delta > T$, $\delta = \pi/(\alpha + \rho)$, $\rho > 0$, $\Delta = (\delta, \dots, \delta)$. Проведя несложные выкладки с использованием предложений 2 и 4 неравенства Гёльдера, мы получим, что

$$\int_{\square_T} \left| x(t) - \sum_{j=1}^s \sum_{k \in \square_N} x_j(k\Delta) \exp\{i(\xi^j | t)\} \varphi_{\rho,k}(t) \right|^p dt = \\ = \int_{\square_T} \left| \sum_{j=1}^s \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus \square_N} x_j(k\Delta) \exp\{i(\xi^j | t)\} \varphi_{\rho,k}(t) \right|^p dt \leq \\ \leq c_2 \frac{T}{(N\delta - T)^{p+1}},$$

где константа c_2 не зависит от $x(\cdot)$. Отсюда следует, что

$$E^p((B_{G,p} \cap B\mathcal{L}_p)^T, M^T, \mathcal{L}_p^T) \leq c_2 T / (N\delta - T)^{p+1},$$

где M — подпространство в \mathcal{L}_p , натянутое на функции $\exp \{i(\xi^j | t)\} \varphi_{\xi, k}(t)$, $k \in \square_N$, $j = 1, \dots, s$. Для произвольного ε , $0 < \varepsilon < 1$, найдем N из равенства $c_2 T / (N\delta - T)^{p+1} = \varepsilon^p$. Так как размерность M не превосходит $s(2N + 1)^n$, то для любого модуля непрерывности $\omega(\cdot)$ имеем

$$K_\varepsilon((B_{G, p} \cap H_{\omega, p})^T, \mathcal{L}_p^T) \leq K_\varepsilon((B_{G, p} \cap B\mathcal{L}_p)^T, \mathcal{L}_p^T) \leq \\ \leq s(2N + 1)^n = (2T)^n (2\alpha + 2\rho)^n / (2\pi)^n + o(T^n).$$

Следовательно,

$$K_\varepsilon^s(B_{G, p}, \mathcal{L}_p) \leq s(2\alpha + 2\rho)^n / (2\pi)^n$$

для произвольного $\rho > 0$, т. е. справедливо следующее неравенство:

$$K_\varepsilon^s(B_{G, p}, \mathcal{L}_p) \leq s(2\alpha)^n / (2\pi)^n = (2\pi)^{-n} \text{mes } G, \\ 0 < \varepsilon < 1.$$

б) Пусть G — произвольное ограниченное множество. Тогда существуют множества G' и G'' рассматриваемого в п. а) вида такие, что $G' \subset G \subset G''$ и мера $G'' \setminus G'$ сколько угодно мала. Из включений $B_{G', p} \subset B_{G, p} \subset B_{G'', p}$ и доказанного вытекает утверждение теоремы для G .

в) Пусть $\underline{\tau}G$ — неограниченное множество. Положим

$$G_k = \{\tau \in G \mid |\tau| \leq k\}.$$

Оценка снизу. По доказанному в п. б) имеем

$$K_\varepsilon^i(B_{G, p}, \mathcal{L}_p) \geq \bar{K}_\varepsilon(B_{G_k, p}, \mathcal{L}_p) = \\ = (2\pi)^{-n} \text{mes } G_k, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

При $k \rightarrow \infty$ получим такую оценку:

$$K_\varepsilon^i(B_{G, p}, \mathcal{L}_p) = (2\pi)^{-n} \text{mes } G, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Оценка сверху. Пусть $\varphi(\cdot)$ — неотрицательная четная функция одного переменного из класса $B_{1,1}$, удовлетворяющая условию

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(|t|) dt = 1, \quad \int_0^\infty \varphi(\xi)(1 + \xi) d\xi < \infty$$

(такая функция, очевидно, существует). Далее, для функции из \mathcal{L}_p положим

$$x_k(t) = h^n \int_{\mathbb{R}^n} x(t - \theta) \varphi(k|\theta|) d\theta.$$

Легко проверить, что

$$\|x_k(\cdot)\|_p \leq \|x(\cdot)\|_p, \quad \|x(\cdot) - x_k(\cdot)\|_p \leq c\omega(1/k, x(\cdot))_p,$$

где константа c не зависит от $x(\cdot)$. Пусть теперь $\omega(\cdot)$ — произвольный модуль непрерывности и $x(\cdot) \in B_{G,p} \cap H_{\omega,p}$. Тогда $x_k(\cdot) \in B_{Gk,p}$ и $\|x(\cdot) - x_k(\cdot)\|_p \leq c\omega(1/k)$. Отсюда следует, что

$$E(B_{G,p} \cap H_{\omega,p}, B_{Gk,p} \cap B\mathcal{L}_p, \mathcal{L}_p) \leq c\omega(1/k).$$

С другой стороны, в силу предложения 1 получим, что $B_{Gk,p} \cap B\mathcal{L}_p \subset H_{\omega_k,p}$, где $\omega_k(h) = ah$, $a = a(p, k) > 0$.

Из доказанного в п. б) вытекает, что для заданного $\varepsilon > 0$

$$K_{\varepsilon/2}((B_{Gk,p} \cap B\mathcal{L}_p)^T, \mathcal{L}_p^T) \leq (2T)^n \text{mes } G / (2\pi)^n + o(T^n) = m(T).$$

Последнее неравенство означает, что для некоторого подпространства $L \subset \mathcal{L}_p^T$ размерности $m(T)$ имеет место неравенство

$$E((B_{Gk,p} \cap B\mathcal{L}_p)^T, L^T, \mathcal{L}_p^T) \leq \varepsilon/2.$$

Выбрав k достаточно большим, чтобы выполнилось неравенство $c\omega(1/k) \leq \varepsilon/2$, мы получим, что

$$\begin{aligned} E((B_{G,p} \cap H_{\omega,p})^T, L^T, \mathcal{L}_p^T) &\leq \\ &\leq E(B_{G,p} \cap H_{\omega,p}, B_{Gk,p} \cap B\mathcal{L}_p, \mathcal{L}_p) + \\ &\quad + E((B_{Gk,p} \cap B\mathcal{L}_p)^T, L^T, \mathcal{L}_p^T) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

А это означает, что

$$K_\varepsilon((B_{G,p} \cap H_{\omega,p})^T, \mathcal{L}_p^T) \leq (2T)^n \text{mes } G / (2\pi)^n + o(T^n)$$

и, следовательно,

$$K_\varepsilon^s(B_{G,p}, \mathcal{L}_p) \leq (2\pi)^{-n} \text{mes } G.$$

Теорема полностью доказана.

Автор благодарит В. М. Тихомирова за постановку задачи и внимание к работе.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетики, М., ИЛ, 1963.
- [2] Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М., ε -энтропия и ε -емкость множеств в функциональных пространствах, Успехи матем. наук, 14, № 2 (1959), 3—86.
- [3] Динь Зунг, Аппроксимативные характеристики классов гладких функций на \mathbb{R}^n в метрике \mathcal{L}_2 , Канд. диссертация, М., МГУ, 1978.
- [4] Иосида К., Функциональный анализ, М., «Мир», 1967.
- [5] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., «Наука», 1977.
- [6] Тиман А. Ф., Теория приближений функций действительного переменного, М., Физматгиз, 1960.
- [7] Тихомиров В. М., Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений, Успехи матем. наук, 15, № 3 (1960), 81—120.
- [8] Лизоркин П. И., Теорема типа Литтльвуда — Палея для кратных интегралов Фурье, Тр. Матем. ин-та АН СССР, 89 (1967), 214—230.