ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том I Июль 1961 Август № 4

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОТ ДВУХ МНИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

П. И. КУЗНЕЦОВ

(*Москва*)

§ 1. Введение

Многие задачи математической физики сводятся к решению телеграфного уравнения при некоторых начальных и граничных условиях (см. [1], [2]). Как известно [1], [2], решение этих задач при помощи метода Пуанкаре — Пикара выражается через интегралы вида

$$f(b, x, t) = \int_x^t e^{-b\tau} \frac{I_1(\sqrt{\tau^2 - x^2})}{\sqrt{\tau^2 - x^2}} d\tau, \tag{1.1}$$

$$g(b, x, t) = \int_x^t e^{-b\tau} I_0(\sqrt{\tau^2 - x^2})\, d\tau, \tag{1.2}$$

$$h(b, x, t) = \int_x^t \tau e^{-b\tau} I_0(\sqrt{\tau^2 - x^2})\, d\tau, \tag{1.3}$$

где I_0 и I_1 — функции Бассе нулевого и первого порядков соответственно.

В 1951 г. были опубликованы 4—5-значные таблицы [3] функций

$$R(x, t) = e^{-t} I_0(\sqrt{t^2 - x^2}) + 2g(1, x, t), \tag{1.4}$$

$$Q(x, t) = 2(2t + 1)g(1, x, t) - 4h(1, x, t) \tag{1.5}$$

для значений $b = 1$, $x = 0(0,2)5$ и $t = x(0,2)5(1)20$. Для любых значений b, x и t интегралы (1.1)—(1.3) до сих пор еще не табулированы.

В 1947 г. было опубликовано новое решение телеграфного уравнения, которое выражается через цилиндрические функции от двух переменных [4]. Таблицы цилиндрических функций от двух действительных переменных даны в книге [5], а от двух мнимых переменных — в [4], [6]. Таким образом, в настоящее время имеются подробные 6—7-значные таблицы этих функций, которые позволяют находить численное решение телеграфного уравнения при заданных начальных и граничных условиях, а тем самым могут быть вычислены интегралы (1.1)—(1.3) (см. [4]).

Указанное новое решение телеграфного уравнения уже нашло широкое применение в различных областях науки и техники (см., например, [4], [7]—[20]).

Необходимо также отметить, что в практике довольно часто применяется интеграл

$$p(x, y) = \int_0^x 2ue^{-(u^2+y^2)} I_0(2uy)\, du \tag{1.6}$$

или его разновидности ([21]—[26]).

Этот интеграл неоднократно вычислялся [27].

Из имеющихся таблиц значений $p(x, y)$ самыми подробными являются 6-значные таблицы [28]. Легко показать, что рассматриваемый интеграл также выражается через цилиндрические функции от двух мнимых переменных (см. § 3 формулы (3.38) и (3.39)).

В настоящей работе выводится асимптотическое представление цилиндрических функций от двух мнимых переменных, которое позволяет легко вычислять их численные значения.

§ 2. Некоторые свойства цилиндрических функций от двух мнимых переменных

Напомним, что цилиндрические функции от двух мнимых переменных выражаются рядами Неймана [4]

$$\Upsilon_n(y, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{y}{x}\right)^{n+2m} I_{n+2m}(x), \tag{2.1}$$

$$\Theta_n(y, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{x}{y}\right)^{n+2m} I_{n+2m}(x), \tag{2.2}$$

где n — целое положительное число. Основными являются функции Υ_1, Υ_2, Θ_0 и Θ_1. Из самого определения этих функций следует, что функции Υ_2 и Θ_0 суть четные функции относительно переменных y и x, а Υ_1 и Θ_1 — четные функции относительно переменного x и нечетные функции относительно переменного y. Это позволяет ограничиться изучением свойств функций Υ_1, Υ_2, Θ_0 и Θ_1 в первой четверти плоскости xOy. Из соотношений

$$\Upsilon_n(y, x) = \Theta_n\left(\frac{x^2}{y}, x\right), \tag{2.3}$$

$$\Theta_n(y, x) = \Upsilon_n\left(\frac{x^2}{y}, x\right) \tag{2.4}$$

видно, что необходимо изучить только функции $\Upsilon_n(y, x)$ и $\Theta_n(y, x)$ в одной из областей $0 \leqslant y \leqslant x$ или $0 \leqslant x \leqslant y$. Из выражений

$$\Upsilon_1(y, x) + \Theta_1(y, x) = \operatorname{sh}\left(\frac{y}{2} + \frac{x^2}{2y}\right), \tag{2.5}$$

$$\Upsilon_2(y, x) + \Theta_0(y, x) = \operatorname{ch}\left(\frac{y}{2} + \frac{x^2}{2y}\right) \tag{2.6}$$

следует, что достаточно только изучить функции Υ_1 и Υ_2 или Θ_0 и Θ_1.

На основании формул (2.3), (2.4) и соотношения

$$\Theta_0(y, x) - \Theta_2(y, x) = I_0(x) \tag{2.7}$$

заключаем, что необходимо изучить, например, только функции $\Upsilon_1(y, x)$ и $\Upsilon_2(y, x)$ в области $0 \leqslant x \leqslant y$. Эти и другие свойства функций $\Upsilon_n(y, x)$ и $\Theta_n(y, x)$ были изучены в работе [4].

§ 3. Интегральные представления цилиндрических функций от двух мнимых переменных

Перед тем как получить асимптотические представления цилиндрических функций от двух мнимых переменных, мы дадим их интегральные представления. При этом воспользуемся некоторыми соображениями [29] об интегральном представлении цилиндрических функций от двух действительных переменных.

Рассмотрим сумму функций $\Theta_0(y, x)$ и $\Theta_1(y, x)$ в области $0 \leqslant x \leqslant y$. Введем обозначения $a = x/y = 1/c$ и $c = y/x$; использовав определения функций $\Theta_0(y, x)$ и $\Theta_1(y, x)$ (2.2), мы получим

$$\Theta_0(cx, x) + \Theta_1(cx, x) = I_0(x) + aI_1(x) + a^2 I_2(x) + a^3 I_3(x) + \cdots \quad (3.1)$$

Принимая во внимание интегральное представление функций $I_n(x)$ [30]

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{x\cos\varphi}\cos n\varphi\, d\varphi, \quad (3.2)$$

будем иметь

$$\Theta_0 + \Theta_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{x\cos\varphi}(1 + a\cos\varphi + a^2\cos 2\varphi + a^3\cos 3\varphi + \cdots)\, d\varphi. \quad (3.3)$$

Так как

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos k\varphi = \frac{1 - a\cos\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2} = {}^1/_2\left(1 + \frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}\right), \quad |a| < 1, \quad (3.4)$$

то

$$\Theta_0 + \Theta_1 = {}^1/_2 I_0(x) + \frac{1 - a^2}{2\pi}\int_0^\pi e^{x\cos\varphi}\frac{d\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}. \quad (3.5)$$

Используя разложение

$$\frac{1}{1 - 2a\cos\varphi + a^2} = \frac{1}{1 + a^2}\frac{1}{1 - \cos\varphi/b} = \frac{1}{1 + a^2}\left[1 + \frac{\cos\varphi}{b} + \left(\frac{\cos\varphi}{b}\right)^2 + \cdots\right], \quad (3.6)$$

где

$$b = \frac{1 + a^2}{2a} = {}^1/_2\left(a + \frac{1}{a}\right), \quad 0 < a < 1, \quad (3.7)$$

интеграл

$$\int_0^\pi e^{x\cos\varphi}\frac{d\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2} \quad (3.8)$$

можно представить в виде

$$\frac{1}{1 + a^2}\int_0^\pi e^{x\cos\varphi}\left[1 + \frac{\cos\varphi}{b} + \left(\frac{\cos\varphi}{b}\right)^2 + \cdots\right] d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{1 + a^2}\left[1 + \frac{p}{b} + \left(\frac{p}{b}\right)^2 + \cdots\right] I_0(x), \quad p = \frac{d}{dx}. \quad (3.9)$$

Так как $b > 1$ и $p^n I_0(x) = d^n I_0(x)/dx^n$ для фиксированного значения x не может превышать определенную конечную величину, то ряд (3.9) абсолютно сходится.

Подставив найденное разложение (3.9) для интеграла (3.8) в формулу (3.5), получим

$$\Theta_0 + \Theta_1 = {}^1/_2 I_0(x) + \frac{1-a^2}{2(1+a^2)}\left[1 + \frac{p}{b} + \left(\frac{p}{b}\right)^2 + \cdots\right] I_0(x). \tag{3.10}$$

Ряд

$$\left[1 + \frac{p}{b} + \left(\frac{p}{b}\right)^2 + \cdots\right] I_0(x)$$

можно выразить через интеграл

$$\int_x^\infty e^{-b\xi} I_0(\xi)\, d\xi. \tag{3.11}$$

Действительно, интегрируя (3.11) по частям и используя соотношение $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} I_n(x) = 0$, находим

$$\int_x^\infty e^{-b\xi} I_0(\xi)\, d\xi = \frac{e^{-bx}}{b}\left[1 + \frac{p}{b} + \left(\frac{p}{b}\right)^2 + \cdots\right] I_0(x). \tag{3.12}$$

поэтому для суммы функций $\Theta_0(cx,x)$ и $\Theta_1(cx,x)$ получим

$$\Theta_0 + \Theta_1 = {}^1/_2 I_0(x) + {}^1/_2 \sqrt{b^2-1}\, e^{bx} \int_x^\infty e^{-b\xi} I_0(\xi)\, d\xi. \tag{3.13}$$

Рассмотрим теперь разность функций $\Theta_0(cx,x)$ и $\Theta_1(cx,x)$ в области $0 \leqslant x \leqslant y$. Воспользовавшись ранее введенными обозначениями и проведя аналогичные вычисления, получим

$$\Theta_0 - \Theta_1 = {}^1/_2 I_0(x) + \frac{1-a^2}{2(1+a^2)}\left[1 - \frac{p}{b} + \left(\frac{p}{b}\right)^2 - \left(\frac{p}{b}\right)^3 + \cdots\right] I_0(x),$$

$$p \equiv \frac{d}{dx}. \tag{3.14}$$

Найдем выражение ряда

$$[1 - p/b + (p/b)^2 - (p/b)^3 + \cdots]\, I_0(x)$$

через интеграл

$$\int_0^x \operatorname{ch} b\xi\, I_0(\xi)\, d\xi. \tag{3.15}$$

Интегрируя (3.15) по частям и учитывая при этом, что при $x = 0$ 1) $\operatorname{sh} 0 = 0$, 2) $\operatorname{ch} 0 = 1$, 3) нечетные производные от функции $I_0(x)$ равны нулю, получим

$$\int_0^x \operatorname{ch} b\xi I_0(\xi)\, d\xi = \frac{1}{b}\operatorname{sh} bx\left[I_0(x) + \frac{1}{b^2} I_0''(x) + \cdots\right] -$$

$$- \frac{1}{b}\operatorname{ch} bx\left[\frac{1}{b} I_0'(x) + \frac{1}{b^3} I_0'''(x) + \cdots\right]. \tag{3.16}$$

Выражению (3.16) можно придать вид

$$\int_0^x \operatorname{ch} b\xi I_0(\xi)\, d\xi = \frac{e^{bx}}{2b}\left[1 - \frac{p}{b} + \left(\frac{p}{b}\right)^2 - \left(\frac{p}{b}\right)^3 + \cdots\right] I_0(x) -$$

$$- \frac{e^{-bx}}{2b}\left[1 + \frac{p}{b} + \left(\frac{p}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{b}\right)^3 + \cdots\right] I_0(x). \tag{3.17}$$

Используя соотношения (3.12) и (3.14), получим

$$\int_0^x \operatorname{ch} b\xi I_0(\xi)\,d\xi = \frac{e^{bx}}{\sqrt{b^2-1}}\left[\Theta_0 - \Theta_1 - {}^1/_2 I_0(x)\right] - {}^1/_2\int_x^\infty e^{-b\xi} I_0(\xi)\,d\xi, \quad (3.18)$$

откуда следует, что

$$\Theta_0 - \Theta_1 = {}^1/_2 I_0(x) + \sqrt{b^2-1}\, e^{-bx}\left[{}^1/_2\int_x^\infty e^{-b\xi} I_0(\xi)\,d\xi + \int_0^x \operatorname{ch} b\xi I_0(\xi)\,d\xi\right]. \quad (3.19)$$

Из (3.13) и (3.19) найдем

$$\Theta_0(cx,\ x) = {}^1/_2 I_0(x) + {}^1/_2\sqrt{b^2-1}\left[\operatorname{ch} bx\int_x^\infty e^{-b\xi} I_0(\xi)\,d\xi + e^{-bx}\int_0^x \operatorname{ch} b\xi I_0(\xi)\,d\xi\right]. \quad (3.20)$$

Используя соотношение [30]

$$\int_x^\infty e^{-b\xi} I_0(\xi)\,d\xi = \frac{1}{\sqrt{b^2-1}} - \int_0^x e^{-b\xi} I_0(\xi)\,d\xi, \quad (3.21)$$

получим для функции $\Theta_0(cx,\ x)$ выражение

$$\Theta_0(cx,\ x) = {}^1/_2\left[I_0(x) + \operatorname{ch} bx\right] - {}^1/_2\sqrt{b^2-1}\int_0^x \operatorname{sh} b(x-\xi) I_0(\xi)\,d\xi. \quad (3.22)$$

Из (3.19) и (3.13) после аналогичных преобразований найдем

$$\Theta_1(cx,\ x) = {}^1/_2\operatorname{sh} bx - {}^1/_2\sqrt{b^2-1}\int_0^x \operatorname{ch} b(x-\xi) I_0(\xi)\,d\xi. \quad (3.23)$$

Покажем, что полученные интегральные представления для функций Θ_0 и Θ_1 при значениях $y \to x$ и $x \to 0$ совпадают с функциями, получаемыми непосредственно из их определения [4], т. е.

$$\Theta_0(x,\ x) = {}^1/_2\left[I_0(x) + \operatorname{ch} x\right], \quad \Theta_1(x,\ x) = {}^1/_2\operatorname{sh} x, \quad (3.24)$$

$$\Theta_0(y,\ 0) = 1, \qquad \Theta_1(y,\ 0) = 0. \quad (3.25)$$

Действительно: 1) при $y \to x$ мы получаем $a \to 1$ и, следовательно, $b \to 1$; тогда для любого фиксированного x из формул (3.22) и (3.23) следуют выражения (3.24); 2) при $x \to 0$ мы получаем $a \to 0$, $b \to \infty$, $\lim\limits_{x\to 0} bx = y/2$; тогда, взяв по частям интеграл (3.22) и перейдя к пределу, мы получим

$$\lim_{x\to 0}\Theta_0(y,\ x) = 1.$$

Последнее соотношение совпадает с первым равенством из (3.25). Произведя аналогичные преобразования выражения (3.23), найдем, что

$$\lim_{x\to 0}\Theta_1(y,\ x) = 0,$$

т. е. выполняется второе равенство из (3.25).

Итак, мы нашли интегральное представление функций $\Theta_0(cx,x)$ и $\Theta_1(cx,x)$ в области $0 \leqslant x \leqslant y$. При помощи аналогичных рассуждений можно найти интегральное представление функций $\Upsilon_1(cx,x)$ и $\Upsilon_2(cx,x)$ в области $0 \leqslant y \leqslant x$. Они будут иметь вид

$$\Upsilon_1(cx,\ x) = {}^1/_2 \operatorname{sh} bx - {}^1/_2 \sqrt{b^2-1} \int_0^x \operatorname{ch} b\,(x-\xi)\, I_0(\xi)\, d\xi, \tag{3.26}$$

$$\Upsilon_2(cx,\ x) = {}^1/_2 [\operatorname{ch} bx - I_0(x)] - {}^1/_2 \sqrt{b^2-1} \int_0^x \operatorname{sh} b\,(x-\xi)\, I_0(\xi)\, d\xi. \tag{3.27}$$

Из формул (3.22), (3.23), (3.26), (3.27) следует, обратно, что интегралы

$$\int_0^x \operatorname{ch} b\,(x-\xi)\, I_0(\xi)\, d\xi \quad \text{и} \quad \int_0^x \operatorname{sh} b\,(x-\xi)\, I_0(\xi)\, d\xi \tag{3.28}$$

выражаются через цилиндрические функции от двух мнимых переменных.

Отсюда можно заключить, что через эти же функции выражаются интегралы

$$\int_0^x e^{\pm b(x-\xi)} I_0(\xi)\, d\xi. \tag{3.29}$$

Известно, что решение задачи о неустановившемся движении тонкого жесткого крыла конечного размаха прямоугольной формы в плане в сверхзвуковом потоке [17] приводится к интегралам (3.29); следовательно, оно может быть выражено через цилиндрические функции от двух переменных.

Дадим другое интегральное представление функций $\Theta_n(y,x)$.

Для этого сначала выразим интегралы

$$\int_0^x e^{\pm \xi^2/2y} \xi I_0(\xi)\, d\xi \tag{3.30}$$

через цилиндрические функции от двух мнимых переменных.

Интегрируя (3.30) по частям, используя известное в теории бесселевых функций [31] соотношение

$$\int_0^x \xi^n I_{n-1}(\xi)\, d\xi = x^n I_n(x)$$

и принимая во внимание определение функций $\Theta_n(y,x)$ (2.2), найдем

$$\int_0^x e^{\xi^2/2y} \xi I_0(\xi)\, d\xi = y e^{x^2/2y} [\Theta_1(y,\ x) - \Theta_2(y,\ x)], \tag{3.31}$$

$$\int_0^x e^{-\xi^2/2y} \xi I_0(\xi)\, d\xi = y e^{x^2/2y} [\Theta_1(y,\ x) + \Theta_2(y,\ x)]. \tag{3.32}$$

Складывая и вычитая эти уравнения, получим

$$\int_0^x \operatorname{sh}\left(\frac{\xi^2}{2y}\right)\xi I_0(\xi)\,d\xi = y\left[\operatorname{sh}\frac{x^2}{2y}\,\Theta_1(y,\ x) - \operatorname{ch}\frac{x^2}{2y}\,\Theta_2(y,\ x)\right], \tag{3.33}$$

$$\int_0^x \operatorname{ch}\left(\frac{\xi^2}{2y}\right)\xi I_0(\xi)\,d\xi = y\left[\operatorname{ch}\frac{x^2}{2y}\,\Theta_1(y,\ x) - \operatorname{sh}\frac{x^2}{2y}\,\Theta_2(y,\ x)\right]. \tag{3.34}$$

Наконец, разрешая (3.33) — (3.34) относительно функций $\Theta_1(y,x)$ и $\Theta_2(y,x)$, можно получить другие интегральные представления:

$$\Theta_1(y,\ x) = \frac{1}{y}\int_0^x \operatorname{ch}\left(\frac{x^2-\xi^2}{2y}\right)\xi I_0(\xi)\,d\xi, \tag{3.35}$$

$$\Theta_2(y,\ x) = \frac{1}{y}\int_0^x \operatorname{sh}\left(\frac{x^2-\xi^2}{2y}\right)\xi I_0(\xi)\,d\xi. \tag{3.36}$$

В заключение выразим интеграл (1.6)

$$p(x,\ y) = \int_0^x 2ue^{-(u^2+y^2)} I_0(2uy)\,du \tag{3.37}$$

через цилиндрические функции от двух мнимых переменных $\Upsilon_n(y,x)$ и $\Theta_n(y,x)$.

Производя замену переменных в интеграле (3.37) $2uy = \xi$ и используя выражение (3.32), найдем

$$p(x,\ y) = e^{-(x^2+y^2)}[\Theta_1(2y^2,\ 2xy) + \Theta_2(2y^2,\ 2xy)]; \tag{3.38}$$

или, принимая во внимание соотношение (2.4), находим

$$p(x,\ y) = e^{-(x^2+y^2)}[\Upsilon_1(2x^2,\ 2xy) + \Upsilon_2(2x^2,\ 2xy)]. \tag{3.39}$$

§ 4. Асимптотические разложения при $a \ll 1$

При вычислении значений цилиндрических функций от двух мнимых переменных $\Upsilon_n(y,x)$ и $\Theta_n(y,x)$ в области $0 \leqslant x \leqslant y$ при больших значениях y необходимо различать четыре случая:

1) $a \ll 1$; 2) $2\alpha x \gg 1$, $x > 1$; 3) $2\alpha x \ll 1$; 4) $2\alpha x \sim 1$.

Если a близко к нулю, то ряды Неймана (2.2), определяющие функции $\Theta_n(y,x)$, быстро сходятся. В этом случае для вычисления функций $\Theta_0(y,x)$ и $\Theta_1(y,x)$ можно воспользоваться рядами (2.2) и таблицами функций Бассе [32]. Чтобы определить количество слагаемых m в рядах (2.2), необходимо найти ошибку, вызываемую отбрасыванием членов ряда, начиная с m-го. При этом надо различать два случая.

Случай А. m мало́.

Ряды (2.2) представим в виде

$$\Theta_0(cx,x) = I_0(x) + a^2 I_2(x) + \cdots + a^{2m} I_{2m}(x)\left[1 + a^2\frac{I_{2m+2}(x)}{I_{2m}(x)} + \right.$$

$$\left. + a^4\frac{I_{2m+4}(x)}{I_{2m}(x)} + \cdots\right], \tag{4.1}$$

$$\Theta_1(cx,x) = aI_1(x) + a^3 I_3(x) + \cdots + a^{2m+1} I_{2m+1}(x)\left[1 + a^2 \frac{I_{2m+3}(x)}{I_{2m+1}(x)} + \right.$$

$$\left. + a^4 \frac{I_{2m+5}(x)}{I_{2m+1}(x)} + \cdots\right]. \qquad (4.2)$$

Если использовать свойство функций Бассе [30]

$$\frac{I_{n+1}(x)}{I_n(x)} < 1,$$

то получим неравенства

$$1 + a^2 \frac{I_{2m+2}(x)}{I_{2m}(x)} + a^4 \frac{I_{2m+4}(x)}{I_{2m}(x)} + \cdots < 1 + a^2 + a^4 + \cdots = \frac{1}{1-a^2},$$

$$1 + a^2 \frac{I_{2m+3}(x)}{I_{2m+1}(x)} + a^4 \frac{I_{2m+5}(x)}{I_{2m+1}(x)} + \cdots < 1 + a^2 + a^4 + \cdots = \frac{1}{1-a^2}.$$

Отсюда вытекают оценки для остаточных членов разложений (4.1)—(4.2):

$$R_{2m}(x) \leqslant \frac{a^{2m} I_{2m}(x)}{1-a^2}, \qquad (4.3)$$

$$R_{2m+1}(x) \leqslant \frac{a^{2m+1} I_{2m+1}(x)}{1-a^2}. \qquad (4.4)$$

Случай Б. m велико.

Из определения функции Бассе $I_n(x)$ при помощи ряда [30] следует

$$I_n(x) > \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n. \qquad (4.5)$$

С другой стороны, из неравенства Коши [30] для функции Бассе

$$I_n(x) \leqslant \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n \exp\left[\frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^2\right] \qquad (4.6)$$

следует

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n < I_n(x) \leqslant \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n \exp\left[\frac{1}{(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^2\right].$$

Если $x^2/4(n+1) \ll 1$, то $I_n(x) \leqslant \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n + o(1)$ и, следовательно,

$$I_n(x) \approx \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n. \qquad (4.7)$$

В этом случае оценки для остаточных членов разложений (4.1) — (4.2) принимают вид

$$R_{2m}(x) \leqslant \frac{a^{2m} I_{2m}(x)}{1-[ax/2(2m+1)]^2}, \qquad (4.8)$$

$$R_{2m+1}(x) \leqslant \frac{a^{2m+1} I_{2m+1}(x)}{1-[ax/2(2m+2)]^2}. \qquad (4.9)$$

Эти формулы справедливы при выполнении неравенств

$$\frac{x^2}{4(2m+1)} \ll 1 \quad \text{и} \quad \frac{ax}{2(2m+1)} < 1.$$

В формулах (4.8) — (4.9) функции Бассе $I_{2m}(x)$, $I_{2m+1}(x)$ можно заменить по формуле (4.6); от этого правые части (4.8) — (4.9) только увеличатся.

Исходя из требуемой точности для функций Θ_0 и Θ_1 по формулам (4.3) — (4.4) или (4.8) — (4.9) методом подбора находим m. После чего, беря m первых членов рядов (2.2), находим значения функций Θ_0 и Θ_1, а по формулам (2.5) и (2.6) находим Υ_1 и Υ_2. В вычислительной практике некоторые из указанных этапов становятся излишними. В качестве примера найдем значения функций $\Upsilon_1(y, x)$ и $\Upsilon_2(y, x)$ при $x = 4{,}0$ и $y = 20{,}0$. В этом случае $a = 0{,}2$, $b = 2{,}6$, $bx = 10{,}4$. Из таблиц [33]—[34] находим $\operatorname{sh} bx \approx \operatorname{ch} bx \approx {}^1/_2 e^{bx} = 16\,429{,}8$. Из формул (2.5) — (2.6) следует, что функции Θ_0 и Θ_1 надо вычислять с точностью не более чем до третьего десятичного знака. Далее, пользуясь таблицами [32], по формулам (2.2) находим значения функций:

$$\Theta_0(20;\ 4) = 11{,}561; \qquad \Theta_1(20;\ 4) = 1{,}979.$$

Окончательно по формулам (2.5) — (2.6) получим

$$\Upsilon_1(20;\ 4) = 16\,427{,}839; \quad \Upsilon_2(20;\ 4) = 16\,418{,}259.$$

Для сравнения приведем значения этих же функций при тех же значениях аргументов, которые были вычислены на электронной вычислительной машине «Стрела», исходя из представления их в виде рядов

$$\Upsilon_n(y,x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\left(\frac{x^2}{2y}\right)\Upsilon_{n+m}(y,0), \quad n = 1,\ 2, \tag{4.10}$$

где

$$\Upsilon_{2n}(y,0) = \operatorname{ch}\frac{y}{2} - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{(2m)!}\left(\frac{y}{2}\right)^{2m},$$

$$\Upsilon_{2n+1}(y,0) = \operatorname{sh}\frac{y}{2} - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{(2m+1)!}\left(\frac{y}{2}\right)^{2m+1}.$$

эти значения функций оказались равными $\Upsilon_1(20;\ 4) = 16\,427{,}839$, $\Upsilon_2(20;\ 4) = 16\,418{,}256$. Этот же метод вычислений будет применяться в дальнейшем при использовании других асимптотических разложений функций Θ_0 и Θ_1.

§ 5. Асимптотические разложения при $2\alpha x \geqslant 1$ и $x > 1$

Как было показано в § 3, функции Θ_0 и Θ_1 имеют интегральные представления (3.22) и (3.23). Для асимптотического представления этих функций необходимо найти асимптотическое представление интегралов

$${}^1/_2\sqrt{b^2-1}\int_0^x \operatorname{ch} b(x-\xi)\, I_0(\xi)\, d\xi, \tag{5.1}$$

$${}^1/_2\sqrt{b^2-1}\int_0^x \operatorname{sh} b(x-\xi)\, I_0(\xi)\, d\xi. \tag{5.2}$$

Вместо этих интегралов достаточно рассмотреть интегралы

$$\mathrm{Ie}^{-}(b,\ x) = {}^{1}/_{4}\sqrt{b^2-1}\int_0^x e^{b(x-\xi)}I_0(\xi)\,d\xi, \tag{5.3}$$

$$\mathrm{Ie}^{+}(b,\ x) = {}^{1}/_{4}\sqrt{b^2-1}\int_0^x e^{-b(x-\xi)}I_0(\xi)\,d\xi. \tag{5.4}$$

Из них интеграл (5.1) получается сложением, а интеграл (5.2) — вычитанием.

Для нахождения асимптотического представления интегралов (5.3) и (5.4) используем теорему из операционного исчисления об асимптотическом разложении оригинала (см. [35]—[36]). Применяя к интегралам (5.3) и (5.4) теорему свертывания [37], соответственно найдем

$$\mathrm{Ie}^{-}(b,\ x) \doteqdot \frac{p\sqrt{b^2-1}}{4(p-b)\sqrt{p^2-1}} = F^{-}(p), \tag{5.5}$$

$$\mathrm{Ie}^{+}(b,\ x) \doteqdot \frac{p\sqrt{b^2-1}}{4(p+b)\sqrt{p^2-1}} = F^{+}(p). \tag{5.6}$$

Функция

$$\frac{F^{-}(p)}{p} = \frac{\sqrt{b^2-1}}{4(p-b)\sqrt{p^2-1}} \tag{5.7}$$

имеет точки ветвления $p_1 = 1$, $p_2 = -1$ и полюс первого порядка в точке $p_3 = b$, а функция

$$\frac{F^{+}(p)}{p} = \frac{\sqrt{b^2-1}}{4(p+b)\sqrt{p^2-1}} \tag{5.8}$$

имеет точки ветвления $p_1 = 1$, $p_2 = -1$ и полюс первого порядка в точке $p_3 = -b$.

Найдем разложение функции (5.7) в окрестности точки ветвления $p = 1$. Обозначим $p = q + 1$, $q = p - 1$, $b - 1 = 2\alpha \geqslant 0$, $b + 1 = 2\beta \geqslant 2$; тогда функция (5.7) примет вид

$$\frac{F^{-}(p)}{p} = -{}^{1}/_{4}\sqrt{\frac{\beta}{2\alpha}}\frac{1}{\sqrt{q}}\left(1-\frac{q}{2\alpha}\right)^{-1}\left(1+\frac{q}{2}\right)^{-1/2}. \tag{5.9}$$

Разложим в степенные ряды два последних множителя правой части:

$$\left(1-\frac{q}{2\alpha}\right)^{-1} = 1 + \frac{q}{2\alpha} + \left(\frac{q}{2\alpha}\right)^2 + \cdots, \qquad \left|\frac{q}{2\alpha}\right| < 1,$$

$$\left(1+\frac{q}{2}\right)^{-1/2} = 1 - {}^{1}/_{2}\frac{q}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{q}{2}\right)^3 + \cdots, \quad \left|\frac{q}{2}\right| < 1.$$

Почленным умножением этих выражений получим

$$\left(1-\frac{q}{2\alpha}\right)^{-1}\left(1+\frac{q}{2}\right)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{[1+\alpha]_n^{-1/2}}{\alpha^n}\left(\frac{q}{2}\right)^n,$$

где $[1+\alpha]_n^{-1/2}$ означает сумму первых n членов разложения функции

$(1+\alpha)^{-1/2}$. Таким образом, окончательно получаем разложение

$$\frac{F^-(p)}{p} = -\frac{\sqrt{\beta}}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[1+\alpha]_n^{-1/2}}{(2\alpha)^{n+1/2}}\,q^{n-1/2}, \tag{5.10}$$

и, согласно теореме об асимптотическом разложении оригинала, будем иметь

$$f^-(1,\ x)\sim -{}^1/_4\sqrt{\frac{\beta}{2\alpha x}}\,e^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[1+\alpha]_n^{-1/2}}{\Gamma(-n+1/2)}(2\alpha x)^{-n}. \tag{5.11}$$

Если $2\alpha x \gg 1$, то ряд асимптотически сходится быстро и при вычислениях можно ограничиться первыми членами разложения. Если условие $2\alpha x \gg 1$ не выполняется, то необходимо воспользоваться другим разложением (см. § 6 и 7).

Произведя аналогичные вычисления для функции $F^-(p)/p$ в окрестности точки ветвления $p=-1$, получим разложение

$$\frac{F^-(p)}{p} = i\frac{\sqrt{\alpha}}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[1-\beta]_n^{-1/2}}{(2\beta)^{n+1/2}}\,q^{n-1/2}.$$

Асимптотическое разложение будет иметь вид

$$f^-(-1,\ x)\sim {}^1/_4\sqrt{\frac{\alpha}{2\beta x}}\,e^{-x+i\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[1-\beta]_n^{-1/2}}{\Gamma(-n+1/2)}(2\beta x)^{-n}. \tag{5.12}$$

В точке $p=b$ функция (5.7) имеет полюс первого порядка, поэтому

$$\operatorname*{res}_{p=b}\frac{F^-(p)}{p} = \lim_{p\to b}\left[(p-b)\frac{\sqrt{b^2-1}}{4(p-b)\sqrt{p^2-1}}\right] = {}^1/_4. \tag{5.13}$$

Асимптотическое разложение $F^-(p)/p$ в окрестности этого полюса будет

$$f^-(b,\ x)\sim {}^1/_4 e^{bx}. \tag{5.14}$$

Окончательно асимптотическое представление функции $\mathrm{Ie}^-(b,\ x)$ будет иметь вид

$$\mathrm{Ie}^-(b,\ x)\sim {}^1/_4 e^{bx} - {}^1/_4\sqrt{\frac{\beta}{2\alpha x}}\,e^x\sum_{n=0}^{\infty}[1+\alpha]_n^{-1/2}\frac{(2\alpha x)^{-n}}{\Gamma(-n+1/2)} +$$
$$+ {}^1/_4\sqrt{\frac{\alpha}{2\beta x}}\,e^{-x+i\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}[1-\beta]_n^{-1/2}\frac{(2\beta x)^{-n}}{\Gamma(-n+1/2)}. \tag{5.15}$$

Этим разложением можно пользоваться при $2\alpha x \gg 1$ и $x>1$.

Аналогично находим асимптотическое разложение функции

$$\frac{F^+(p)}{p} = \frac{\sqrt{b^2-1}}{4(p+b)\sqrt{p^2-1}}. \tag{5.16}$$

В окрестности точки ветвления $p=1$, положив $p=q+1$, $q=p-1$, получим

$$\frac{F^+(p)}{p} = \frac{\sqrt{\alpha}}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{[1-\beta]_n^{-1/2}}{(2\beta)^{n+1/2}}\,q^{n-1/2}. \tag{5.17}$$

Асимптотическое разложение этой функции будет

$$f^+(1, x) \sim {}^1/_4 \sqrt{\frac{\alpha}{2\beta x}}\, e^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [1-\beta]_n^{-1/2} \frac{(2\beta x)^{-n}}{\Gamma(-n+1/2)}. \qquad (5.18)$$

В окрестности точки ветвления $p = -1$, положив $p = q - 1$, $q = p + 1$, получим

$$\frac{F^+(p)}{p} = -i \frac{\sqrt{\beta}}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{[1+\alpha]_n^{-1/2}}{(2\alpha)^{n+1/2}} q^{-1/2}. \qquad (5.19)$$

Асимптотическое разложение этой функции будет

$$f^+(-1, x) \sim -{}^1/_4 \sqrt{\frac{\beta}{2\alpha x}}\, e^{-x+i\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [1+\alpha]_n^{1/2} \frac{(2\alpha x)^{-n}}{\Gamma(-n+1/2)}. \qquad (5.20)$$

Вычет функции $F^+(p)/p$ в точке $p = -b$ равен

$$\operatorname*{res}_{p=-b} \frac{F^+(p)}{p} = \lim_{p\to -b} \left[(p+b) \frac{\sqrt{b^2-1}}{4(p+b)\sqrt{p^2-1}}\right] = {}^1/_4, \qquad (5.21)$$

а асимптотическое разложение будет

$$f^+(-b, x) \sim {}^1/_4 e^{-bx}. \qquad (5.22)$$

Окончательно асимптотическое представление интеграла (5.4) будет

$$\mathrm{Ie}^+(b, x) \sim {}^1/_4 e^{-bx} + {}^1/_4 \sqrt{\frac{\alpha}{2\beta x}}\, e^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [1-\beta]_n^{-1/2} \frac{(2\beta x)^{-n}}{\Gamma(-n+1/2)} -$$

$$- {}^1/_4 \sqrt{\frac{\beta}{2\alpha x}}\, e^{-x+i\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [1+\alpha]_n^{-1/2} \frac{(2\alpha x)^{-n}}{\Gamma(-n+1/2)}. \qquad (5.23)$$

Это асимптотическое разложение справедливо не только при $2\alpha x \gg 1$ и $x > 1$, но и при других условиях. Если α или β больше единицы, то слагаемые в интегралах $\mathrm{Ie}^-(b, x)$ и $\mathrm{Ie}^+(b, x)$ из (5.15) и (5.23) при вычислениях целесообразно представить в виде

$$[1+\alpha]_n^{-1/2} \frac{(2\alpha x)^{-n}}{\Gamma(-n+1/2)} = \frac{[1+\alpha]_n^{-1/2}}{\alpha^n} \frac{(2x)^{-n}}{\Gamma(-n+1/2)}, \qquad (5.24)$$

$$[1-\beta]_n^{-1/2} \frac{(2\beta x)^{-n}}{\Gamma(-n+1/2)} = \frac{[1-\beta]_n^{-1/2}}{\beta^n} \frac{(2x)^{-n}}{\Gamma(-n+1/2)}. \qquad (5.25)$$

Следовательно, интегралы (5.1) и (5.2) имеют асимптотические представления

$${}^1/_2 \sqrt{b^2-1} \int_0^x \mathrm{ch}\, b(x-\xi)\, I_0(\xi)\, d\xi \sim \mathrm{Ie}^-(b,x) + \mathrm{Ie}^+(b,x), \qquad (5.26)$$

$${}^1/_2 \sqrt{b^2-1} \int_0^x \mathrm{sh}\, b(x-\xi)\, I_0(\xi)\, d\xi \sim \mathrm{Ie}^-(b,x) - \mathrm{Ie}^+(b,x). \qquad (5.27)$$

Тогда функции $\Theta_0(cx,x)$ и $\Theta_1(cx,x)$ будут иметь асимптотические разложения

$$\Theta_0(cx,x) \sim {}^1/_2 [I_0(x) + \operatorname{ch} bx] - [\mathrm{Ie}^-(b,x) - \mathrm{Ie}^+(b,x)], \tag{5.28}$$

$$\Theta_1(cx,x) \sim {}^1/_2 \operatorname{sh} bx - [\mathrm{Ie}^-(b,x) + \mathrm{Ie}^+(b,x)]. \tag{5.29}$$

Подставляя полученные асимптотические представления функций Θ_0 и Θ_1 в (2.5)—(2.6), найдем асимптотическое разложение функций Υ_1 и Υ_2:

$$\Upsilon_1(cx,x) \sim {}^1/_2 \operatorname{sh} bx + [\mathrm{Ie}^-(b,x) + \mathrm{Ie}^+(b,x)], \tag{5.30}$$

$$\Upsilon_2(cx,x) \sim {}^1/_2 [\operatorname{ch} bx - I_0(x)] + [\mathrm{Ie}^-(b,\ x) - \mathrm{Ie}^+(b,x)]. \tag{5.31}$$

(Относительно выбора числа знаков см. замечания к примеру § 4.)

Можно показать, что в разложениях (5.15) и (5.23) остаточный член по абсолютной величине не превосходит абсолютной величины первого неучтенного члена разложения [38].

Разложения (5.15) и (5.23) позволяют найти асимптотические выражения, которые, однако, расходятся. Но, как известно, существует метод, состоящий в прибавлении к последующим членам поправочных частей, из которых каждая не влияет на асимптотические значения, но которые в совокупности обеспечивают сходимость рядов [39].

§ 6. Асимптотические разложения при $2\alpha x \ll 1$

В случае если не выполняется условие $2\alpha x \gg 1$, применять формулы (5.15) и (5.23) уже нельзя и необходимо найти другое асимптотическое представление интегралов (5.3)—(5.4). Рассмотрим сначала интеграл (5.3):

$$\mathrm{Ie}^-(b,x) = \frac{\sqrt{b^2-1}}{4} e^{bx} \int_0^x e^{-b\xi} I_0(\xi)\, d\xi. \tag{6.1}$$

Представим параметр b в виде $b = 1 + 2\alpha$, где 2α — малый параметр, и $\exp(-2\alpha\xi)$ разложим в ряд; тогда интеграл (6.1) примет вид

$$\mathrm{Ie}^-(b,x) = \frac{\sqrt{b^2-1}}{4} e^{bx} \int_0^x \left(1 - \frac{2\alpha\xi}{1!} + \frac{(2\alpha\xi)^2}{2!} - \dots\right) e^{-\xi} I_0(\xi)\, d\xi. \tag{6.2}$$

Введем следующие обозначения:

$$J_m^-(x) = \frac{(2\alpha)^m}{m!} e^x \int_0^x \xi^m e^{-\xi} I_0(\xi)\, d\xi, \quad m = 0, 1, 2, \dots \tag{6.3}$$

Тогда выражение (6.2) будет иметь вид

$$\mathrm{Ie}^-(b,\ x) = \frac{\sqrt{b^2-1}}{4} e^{2\alpha x} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m J_m^-(x). \tag{6.4}$$

Имеем (см. [40])

$$J_0^-(x) = x\,[I_0(x) + I_1(x)]. \tag{6.5}$$

Интегралы $J_m^-(x)$, $m = 1, 2, \dots$, могут быть вычислены при помощи

рекуррентного соотношения

$$J_m^-(x) = \frac{(2\alpha x)^m}{(2m+1)\,m!}\,[J_0^-(x) - mI_0(x)] + \frac{2\alpha m}{2m+1}\,J_{m-1}^-(x), \tag{6.6}$$

которое можно получить непосредственным интегрированием по частям или взять из [41].

Оценим остаточный член $R_m^-(x)$ в (6.4). Рассмотрим m-й член разложения $J_m^-(x)$:

$$J_m^-(x) = \frac{(2\alpha)^m}{m!}\,e^x \int_0^x \xi^m e^{-\xi}\, I_0(\xi)\,d\xi.$$

Согласно обобщенной теореме о среднем значении интеграла [42], будем иметь

$$J_m^-(x) < \frac{(2\alpha x)^m}{m!}\,J_0^-(x).$$

Тогда

$$R_m^-(x) < \frac{\sqrt{b^2-1}}{4}\,e^{2\alpha x}\,\frac{(2\alpha x)^m}{m!}\,J_0^-(x). \tag{6.7}$$

Проводя аналогичные рассуждения для интеграла (5.4)

$$\mathrm{Ie}^+(b,\,x) = \frac{\sqrt{b^2-1}}{4}\,e^{-bx}\int_0^x e^{b\xi}\,I_0(\xi)\,d\xi \tag{6.8}$$

и вводя обозначения

$$J_m^+(x) = \frac{(2\alpha)^m}{m!}\,e^{-x}\int_0^x \xi^m e^{\xi}\,I_0(\xi)\,d\xi, \tag{6.9}$$

найдем

$$\mathrm{Ie}^+(b,\,x) = \frac{\sqrt{b^2-1}}{4}\,e^{-2\alpha x}\sum_{m=0}^{\infty} J_m^+(x). \tag{6.10}$$

Согласно [40],

$$J_0^+(x) = x\,[I_0(x) - I_1(x)]. \tag{6.11}$$

Остальные интегралы $J_m^+(x)$, $m = 1, 2, \ldots$, вычисляются при помощи рекуррентного соотношения [41]

$$J_m^+(x) = \frac{(2\alpha x)^m}{(2m+1)\,m!}\,[J_0^+(x) + mI_0(x)] - \frac{2\alpha m}{2m+1}\,J_{m-1}^+(x). \tag{6.12}$$

Оценка остаточного члена $R_m^+(x)$ разложения интеграла (6.10) проводится так же, как в § 4 для $R_{2m}(x)$ и $R_{2m+1}(x)$; тогда

$$R_m^+(x) < \frac{\sqrt{b^2-1}}{4}\,e^{-2\alpha x}\,\frac{(2\alpha x)^m}{m!}\,\frac{J_0^+(x)}{1-\dfrac{2\alpha x}{m+1}}. \tag{6.13}$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны проведенным в § 5.

§ 7. Асимптотическое разложение при $2\alpha x \sim 1$

Ряды (6.4) и (6.10) медленно сходятся, и для значений $2\alpha x \sim 1$ эти ряды становятся практически неприменимыми, тогда как асимптотическое разложение дает результат с заданной степенью точности. Поэтому найдем асимптотическое разложение интегралов (5.3) и (5.4) при условии $2\alpha x \sim 1$.

Рассмотрим сначала интеграл (5.3):

$$\mathrm{Ie}^{-}(b, x) = \frac{\sqrt{b^2-1}}{4} e^{bx} \int_0^x e^{-b\xi} I_0(\xi)\, d\xi. \tag{7.1}$$

Как известно [30],

$$\int_0^\infty e^{-b\xi} I_0(\xi)\, d\xi = \frac{1}{\sqrt{b^2-1}} \qquad (b > 1).$$

Тогда

$$\int_0^x e^{-b\xi} I_0(\xi)\, d\xi = \frac{1}{\sqrt{b^2-1}} - \int_x^\infty e^{-b\xi} I_0(\xi)\, d\xi \tag{7.2}$$

и

$$\mathrm{Ie}^{-}(b, x) = {}^1\!/_4\, e^{bx}\left[1 - \sqrt{b^2-1}\int_x^\infty e^{-b\xi} I_0(\xi)\, d\xi\right]. \tag{7.3}$$

Найдем асимптотическое представление интеграла

$$\int_x^\infty e^{-b\xi} I_0(\xi)\, d\xi. \tag{7.4}$$

Заменяем в нем функцию $I_0(\xi)$ ее асимптотическим представлением [30]

$$I_0(\xi) \sim \frac{e^\xi}{\sqrt{2\pi\xi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\xi^k},$$

$$a_k = \frac{[(2k-1)!!]^2}{8^k\, k!}.$$

Тогда интеграл (7.4) примет вид

$$\int_x^\infty e^{-b\xi} I_0(\xi)\, d\xi \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_x^\infty \frac{e^{-2\alpha\xi}}{\sqrt{2\pi\xi}} \frac{d\xi}{\xi^k}. \tag{7.5}$$

Интегралы

$$\int_x^\infty \frac{e^{-2\alpha\xi}}{\sqrt{2\pi\xi}} \frac{d\xi}{\xi^k} \tag{7.6}$$

обозначим через B_k. Они могут быть определены из рекуррентного

соотношения

$$(2k-1)B_k = 2\left(\frac{A}{x^{k-1}} - 2\alpha B_{k-1}\right), \tag{7.7}$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots;$$

здесь

$$A = \frac{e^{-2\alpha x}}{\sqrt{2\pi x}},$$

$$B_0 = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\operatorname{erfc}(\sqrt{2\alpha x});$$

их значения находим по таблицам [34], [43]. Тогда мы получим

$$\int_x^\infty e^{-b\xi} I_0(\xi)\, d\xi \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k B_k. \tag{7.8}$$

Если подставить в (7.2) разложение (7.8), то получим

$$\int_0^x e^{-b\xi} I_0(\xi)\, d\xi \sim \frac{1}{\sqrt{b^2-1}} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k B_k$$

и окончательно найдем

$$\mathrm{Ie}^-(b, x) \sim {}^1\!/_4\, e^{bx}\left(1 - 2\sqrt{\alpha\beta}\sum_{k=0}^{\infty} a_k B_k\right). \tag{7.9}$$

Если в этой формуле ограничиться первым членом разложения $a_0 = 1$ и $B_0 = (1/2\sqrt{\alpha})\operatorname{erfc}(\sqrt{2\alpha x})$, то получим выражение, приведенное в [44].

Найдем асимптотическое представление интеграла (5.4)

$$\mathrm{Ie}^+(b, x) = \frac{\sqrt{b^2-1}}{4}\, e^{-bx}\int_0^x e^{b\xi} I_0(\xi)\, d\xi. \tag{7.10}$$

При $2\alpha x \sim 1$ имеет место $x \gg 1$ и, следовательно, можно воспользоваться асимптотическим разложением (5.23).

Дальнейшее вычисление проводится так, как указано в § 5. О сходимости асимптотического разложения см. замечания, изложенные в § 5.

В табл. 1 указаны области применения каждого из полученных асимптотических разложений для различных значений переменных x и y.

Таблица 1

Область изменения переменных x и y	Номера формул асимптотических разложений					
	Интегралы		Цилиндрические функции от двух мнимых переменных			
	$\mathrm{Ie}^-(b,x)$	$\mathrm{Ie}^+(b,x)$	$\Theta_0(y,x)$	$\Theta_1(y,x)$	$\Upsilon_1(y,x)$	$\Upsilon_2(y,x)$
$a = x/y \ll 1$	—	—	(2.2)	(2.2)	(2.5)	(2.6)
$2\alpha x \gg 1$ и $x > 1$	(7.9) или (5.15)	(5.23)	(5.28)	(5.29)	(5.30)	(5.31)
$2\alpha x \sim 1$	(7.9)	(5.23)	(5.28)	(5.29)	(5.30)	(5.31)
$2\alpha x \ll 1$	(7.9) или (6.4)	(5.23) или (6.10)	(5.28)	(5.29)	(5.30)	(5.31)

Примечание: При $a = 1.0$ и $a = 0.0$ функции Θ_0, Θ_1 вычисляются по точным формулам (3.24), (3.25), а функции Υ_2 и Υ_1 — по формулам (2.5), (2.6).

Таблица 2

x	y	α	b	2α	2β	$2\alpha x$	$2\beta x$	bx	$\frac{1}{2}e^{bx}$	$\mathrm{Ie}^{-}(b, x)$	$\mathrm{Ie}^{+}(b, x)$	$\Theta_0(y, x)$	$\Theta_1(y, x)$	$\Upsilon_1(y, x)$	$\Upsilon_2(y, x)$
0.0	20.0	0.0	∞	∞	∞	10.0	10.0	10.0	11 013.23			1.0 по (3.25)	0.0 по (3.5)	11 013.23 по (2.5), 11 013.23 по (4.10)	11 012.23 по (2.6), 11 012.23 по (4.10)
4.0	20.0	0.2	2.6	1.6	3.6	6·4	14.4	10.4	16 429.82	8210.96 по (5.15) при $n=5$	1.96 по (5.23) при $n=4$	11.56 по (2.2) при $n=3$	1.98 по (2.2) при $n=2$	16 427.84 по (2.5), 16 427.83 по (5.30), 16 427.84 по (4.10)	16 418.26 по (2.6), 16 418.26 по (5.31), 16 418.26 по (4.10)
8.0	20.0	0.4	1.45	0.45	2.45	3.6	13.6	11.6	54 548.90	27 051.35 по (7.9) при $n=7$	47.13 по (5.23) при $n=6$			54 372.93 по (5.30), 54 372.93 по (4.10)	54 064.89, по (5.31) 54 064.88 по (4.30)
12.0	20.0	0.6	$1^{2}/_{15}$	$^{2}/_{15}$	$2^{2}/_{15}$	1.6	25.6	13.6	403 064.9	186 087.0 по (7.9) при $n=5$	1209.5 по (5.23) при $n=4$			388 829.0 по (5.30), 388 829,0 по (4.10)	376 935.5 по (5.31), 376 935.4 по (4.10)
16.0	20.0	0.8	1.025	0.025	2.025	0.4	32.4	16.4	6 628 260	2 071 780 по (7.9) при $n=5$ 2 071 780 по (6.4) при $n=8$	25 227 по (5.23) при $n=4$, 25 227 по (6.10) при $n=7$			5 411 137 по (5.30), 5 411 137 по (4.10)	4 913 960 по (5.31), 4 913 960 по (4.10)
20.0	20.0	1.0	1.0	0.0	2.0	0	40.0	20.0	242 582 600	—	—	121 291 300 по (3.24)	143 070 400 по (3.24)	121 291 300 по (2.5), 121 291 300 по (4.10)	99 512 155 по (2.6), 99 512 155 по (4.10)

Примечание: Для контроля значения функций Υ_1 и Υ_2 вычислялись на электронной вычислительной машине «Стрела» по рядам (4.10).

В табл. 2 приведены значения функций Υ_1 и Υ_2, вычисленные по асимптотическим разложениям на арифмометре и при помощи рядов (4.10) на ЭВМ «Стрела».

Выражаю глубокую благодарность Л. С. Барк за проведение численных расчетов.

Поступила в редакцию
2.03.1961

Цитированная литература

1. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Уравнения математической физики. М., Гостехиздат, 1951.
2. H. Jeffreys, B. S. Jeffreys. Methods of mathematical physics. Cambridge, 1950.
3. A. M. Binnie, J. C. P. Miller. Table of two functions required in certain attenuation problems. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1951, 4, 129—156.
4. П. И. Кузнецов, Р. Л. Стратонович. Распространение электромагнитных волн в многопроводных системах. Сборник статей. М., ВЦ АН СССР, 1958.
5. Е. Н. Деконосидзе. Таблицы цилиндрических функций от двух переменных. М., Изд-во АН СССР, 1956.
6. Л. С. Барк, П. И. Кузнецов, Таблицы цилиндрических функций от двух мнимых переменных. М., ВЦ АН СССР, 1961.
7. P. Poincelot. Les régimes transitoires dans les réseaux électriques. Paris, Gauthier-Villars, 1953.
8. Н. А. Бразма. Обзор исследований системы матричных телеграфных уравнений, выполненных в Риге. Изв. АН ЛатССР, 1955, № 8(97), 133—141.
9. С. Хаяси. Волны в линиях электропередачи. М., ГЭИ, 1960.
10. Р. В. Хохлов. О нестационарных процессах в волноводе. Докл. АН СССР, 1948, **61**, № 4, 637—640.
11. Р. В. Хохлов. О нестационарных процессах в волноводе. Вестн. МГУ, 1948, № 8, 49—62.
12. Е. В. Кандауров. Искажения импульсного сигнала в волноводе. Тр. НИИ МПСС. Вып. 8. 1950, 3—12.
13. M. Cerrillo. Inversion of Laplace transforms of type $F(s, \sqrt{s^2+B^2}) \times \exp(-A\sqrt{s^2+B^2})$. Comisión Impulsora y coordinadora de la investigacion cientifica. Mexico, 1949, 31—86.
14. M. Cerrillo. Transient phenomena in waveguides. Massachusetts Inst. Technol. Res. Lab. Electronics. Techn. Rept. № 33, 1948.
15. W. Müller. Laminare Ausbreitungsvorgänge in der zähen Flüssigkeit. Z. angew. Math. und Mech., 1933, **13**, № 6, 395—408.
16. П. И. Кузнецов. Колебания профиля крыла в сверхзвуковом потоке. Докл. АН СССР, 1949, **64**, № 3, 301—304.
17. В. А. Ковалева. О неустановившемся движении крыла прямоугольной формы в плане. Прикл. матем. и механ., 1959, **23**, вып. 6, 1030—1041.
18. Н. Г. Денисов. Распространение электромагнитных сигналов в ионизированном газе. Ж. эксперим. и теор. физ., 1951, **21**, вып. 12, 1354; 1953, **24**, вып. 3, 368.
19. Р. Л. Стратонович. Переходные процессы в плоскоограниченной плазме. Ж. эксперим. и теор. физ., 1953, **24**, вып. 3, 269—278.
20. S. Goldstein. On diffusion by discontinuous movements and on the telegraph equation. Quart. J. Mech. Appl. Math., 1951, 4, 129—156.
21. S. Goldstein. On the mathematics of exchange processes in fixed columns. Proc. Roy. Soc., 1953, **A219**, 151—185.
22. H. E. Daniels. The Covering circle of a sample from a circular normal distribution. Biometricka. 1952, **39**, 137—143.
23. H. S. Carslaw, J. C. Jaeger. Conduction of heat in solids. Oxford, 1946.
24. S. O. Rice. Mathematical analysis of random noise. Bell System Techn. J., 1944,

23, 282—292; 1945, **24**, 45—156 (Теория передачи электрических сигналов при наличии помех. Сборник переводов. М., Изд-во ин. лит., 1953, 88—238).
25. A. K. Jonscher. Drift of minority carriers in the presence of trapping. Proc. Phys. Soc., 1957, **B70**, 223—229.
26. Р. Л. Добрушин. Предельные теоремы для цепей Маркова из двух состояний. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1953, **17**, 291—330.
27. F. A. J. Ford. On certain indefinite integrals involving Bessel functions. J. Math. and Phys., 1958, **37**, № 2, 157—161.
28. R. Brinkley, H. E. Edwards, R. W. Smith. Table of the temperature distribution function for heat transfer between a fluid and a porous solid. M. T. A. C., 1952, **6**, № 37, 40.
29. R. H. D. Mayall. On the diffraction pattern near the focus of a telescope. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1898, **9**, 252—269.
30. Г. Н. Ватсон. Теория бесселевых функций. М., Изд-во ин. лит., 1949.
31. Э. Грей, Г. Б. Мэтьюз. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. М., Изд-во ин. лит., 1949.
32. Таблицы функций Бесселя целого положительного индекса. М., ВЦ АН СССР, 1960.
33. Таблицы круговых и гиперболических синусов и косинусов в радианной мере угла. М., ВЦ АН СССР, 1958.
34. Таблицы e^x и e^{-x}. М., Изд-во АН СССР, 1955.
35. А. И. Лурье. Операционное исчисление. М., Гостехиздат, 1950.
36. Г. Дейч. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М., Физматгиз, 1958.
37. В. А. Диткин, П. И. Кузнецов. Справочник по операционному исчислению. М., Гостехиздат, 1951.
38. В. И. Левин. Предельная оценка точности асимптотических разложений некоторого класса функций. Тр. Моск. матем. об-ва, 1953, **2**, 383—395.
39. J. Hadamard. Sur l'expression asymptotique de la Fonction de Bessel. Bull. Soc. Math. France, 1908, **36**, 77—85.
40. W. R. Bennet. Response of a linear rectifier to signal and noise. Bell System Techn. J., 1944, **23**, 97—113.
41. Y. L. Luke. Some notes on integrals involving Bessel functions. J. Math. and Phys., 1950, **29**, № 1, 27—30.
42. Э. Гурса. Курс математического анализа. Т. 1, ч. 1. М., Гостехиздат, 1933.
43. Таблицы вероятностных функций. Т. 1. М., ВЦ АН СССР, 1958.
44. S. O. Rice. Statistical properties of a sine wave plus random noise. Bell System Tech. J., 1948, **27**, 109—157.