



# Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

T. F. Pankratova, Ansatz with Hermite polynomials  
for a multidimensional well, *Zap. Nauchn. Sem.*  
*POMI*, 1994, Volume 218, 149–165

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you  
have read and agreed to these terms of use  
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.89

February 19, 2025, 12:00:58



Т. Ф. Панкратова

## АНЗАЦ С ПОЛИНОМАМИ ЭРМИТА ДЛЯ МНОГОМЕРНОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЯМЫ

### § 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим стационарное уравнение Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2}\Delta u + Vu = Eu, \quad (1.1)$$

где  $\Delta = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  — оператор Лапласа,  $V$  — вещественнозначная функция в  $\mathbb{R}^d$ , имеющая невырожденный минимум в начале координат  $V(0) = 0$  (потенциальную яму).

Будем считать, что вне некоторой окрестности минимума  $V(x) > C > 0$ . Известно, что тогда ниже  $C$  спектр самосопряженного оператора Шредингера  $\mathfrak{S}$ , порожденного левой частью уравнения (1.1), дискретен [1]. Речь пойдет о квазиклассической асимптотике ( $\hbar \rightarrow 0$ ) нижней части этого спектра.

Интерес представляет задача с потенциалом, имеющим несколько одинаковых ям, когда дискретный спектр оператора  $\mathfrak{S}$  устроен следующим образом. Собственные значения расположены на числовой оси группами. Число значений в группе равно числу ям. Расстояние между группами порядка  $\hbar$ . Расстояние между числами в группе экспоненциально мало при  $\hbar \rightarrow 0$ . Место расположения каждой группы определяется своим квантовым вектором  $n \in \mathbb{N}^d$ ,  $|n| = 0, 1, 2, \dots$

Явления эти исследованы достаточно полно и строго для одномерного оператора [2–12].

Случай размерности  $d \geq 2$  — намного сложнее [12–18]. Работ в этой области очень много, и много результатов (на уровне теорем) содержится в трудах Хелффера–Шостранда ([12–14] и др.) (с использованием техники псевдо-дифференциальных операторов) и Доброхотова-Колокольцова-Маслова ([16–18] и др.) (с применением туннельного канонического оператора). Однако нужная асимптотика (как в одномерной задаче) амплитуды расщепления энергетических уровней, отвечающих произвольному квантовому вектору, в задаче с несколькими одинаковыми ямами так и не

написана. Методика, используемая в [16–18] позволяет находить ширину только самых нижних расщеплений ( $n = 0$ ).

В настоящей работе построены асимптотические ряды для набора собственных значений в некоторой полосе  $0 \leq E \leq E^* < C$  и отвечающих им собственных функций в области, не зависящей от  $h$ , при  $d \geq 2$ . Методы отличаются от указанных выше. Анзац с полиномами Эрмита навеян задачей о гармоническом осцилляторе [19]. Построенные ряды для собственных функций являются новыми. Выписаны формальные разложения по степеням  $h$ , с коэффициентами, полученными в некоторой области, не зависящей от  $h$ , аналитическими для аналитического потенциала. Ряды эти расходятся, но если оборвать каждый ряд на  $N$ -м члене, то оставшиеся суммы удовлетворяют уравнению (1.1) с погрешностью порядка  $h^{N+2} \cdot e^{-\frac{S}{h}}$ , где  $S$  – некоторая неотрицательная функция, определенная ниже. Указанные суммы – это так называемые *квазимоды* [20], удовлетворяющие уравнению Шредингера с экспоненциально малой погрешностью. Возможность построить *квазимоды* для задачи с расщеплениями в достаточно широкой области и с погрешностью меньшей величины расщепления дает возможность писать асимптотики таких расщеплений достаточно строго (следуя программе, реализованной в [10] для  $d = 1$ ). Построенные ряды могут быть использованы для исследования множества нулей в задаче с одной потенциальной ямой. Некоторые примеры такого исследования приведены в §5.

## § 2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЯДЫ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Для каждого квантового вектора  $n = (n_1, n_2, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d$ , будем искать пару: число  $E_n$  и функцию  $u_n(x)$ , удовлетворяющую уравнению (1.1), в виде следующих формальных рядов

$$E_n = \sum_{j=1}^{\infty} E_{nj} h^j, \quad (2.1)$$

$$u_n = \exp \left\{ -\frac{S^0}{h} \right\} \sum_{k=0}^{\infty} u_{nk} h^k, \quad (2.2)$$

где  $S^0 = S^0(x)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ ,  $u_{nj} = u_{nj}(x)$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ , функции, не зависящие от  $h$ .

Будем искать  $S^0(x)$  в виде полусуммы квадратов  $d$  новых неиз-

вестных функций  $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_d(x)$ :

$$S^0(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \psi_i^2, \quad (2.3)$$

связанных следующими условиями ортогональности

$$\langle \nabla \psi_i, \nabla \psi_j \rangle = 0, \quad i \neq j, \quad (2.4)$$

(символы  $\nabla$  и  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  означают *градиент* и *скалярное произведение* в  $\mathbb{R}^d$  соответственно), а  $u_{n0}(x)$  – в виде следующего произведения:

$$u_{n0}(x) = e^{\mathcal{P}_n(x)} \prod_{i=1}^d H_{n_i} \left( \frac{\psi_i(x)}{\sqrt{h}} \right), \quad (2.5)$$

где  $\mathcal{P}_n(x)$  – новая неизвестная функция.

$H_{n_i}(t) = (-1)^{n_i} e^{t^2} (e^{-t^2})^{(n_i)}$  – полиномы Эрмита, удовлетворяющие дифференциальному уравнению

$$H_{n_i}''(t) - 2tH_{n_i}'(t) + 2n_i H_{n_i}(t) = 0. \quad (2.6)$$

Подставим ряды (2.1) и (2.2) в уравнение Шредингера (1.1) и приравняем коэффициенты при каждой степени  $h$  к нулю.

Равенство нулю коэффициента при нулевой степени  $h$  приводит к уравнению эйконала для функции  $S^0(x)$ :

$$(\nabla S^0)^2 = 2V, \quad (2.7)$$

или, что эквивалентно, к системе  $d$  нелинейных уравнений (2.4), (2.7) для  $d$  неизвестных функций  $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_d(x)$ , если левую часть уравнения (2.7) записать в терминах этих функций, используя формулу (2.3).

Приравнивание к нулю коэффициента при первой степени  $h$  с учетом условий (2.4)-(2.7) приводит к следующему уравнению для функции  $\mathcal{P}_n$  и числа  $E_{n1}$ , а именно,

$$\langle \nabla S^0, \nabla \mathcal{P}_n \rangle = E_{n1} - \frac{\nabla S^0}{2} - \sum_{i=1}^d n_i (\nabla \psi_i)^2. \quad (2.8)$$

Аналогичные требования для коэффициентов при  $h^{j+1}$ ,  $j \geq 1$ , приводят к следующим уравнениям для  $u_{nj}$  и  $E_{n,j+1}$ :

$$\langle \nabla S^0, \nabla u_{nj} \rangle + \left( \frac{\nabla S^0}{2} - E_{n1} \right) u_{nj} = F_j, \quad (2.9)$$

где

$$F_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{i=1}^d H'_{n_i} \left( \frac{\psi_i}{\sqrt{h}} \right) \left[ \langle \nabla \psi_i, \nabla \mathcal{P}_n \rangle + \frac{\nabla \psi_i}{2} \right] \prod_{j \neq i} H_{n_j} \left( \frac{\psi_j}{\sqrt{h}} \right) + \left[ \frac{(\nabla \mathcal{P}_n)^2 + \Delta \mathcal{P}_n}{2} + E_{n_2} \right] \prod_{j=1}^d H_{n_j} \left( \frac{\psi_j}{\sqrt{h}} \right) \right\} e^{\mathcal{P}_n}, \quad (2.10)$$

$$F_{j,j \geq 2} \doteq \frac{\Delta u_{n,j-1}}{2} + \sum_{2 \leq l \leq j} E_{n_l} u_{n,j+1-l} + E_{n,j+1} e^{\mathcal{P}_n} \prod_{i=1}^d H_{n_i} \left( \frac{\psi_i}{\sqrt{h}} \right). \quad (2.11)$$

Для описания вектора  $\psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_d(x))$  удобно ввести следующие функции

$$S^j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d (1 - 2\delta_{ij}) \psi_i^2, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j, \\ 0, & \text{при } i \neq j. \end{cases} \quad (2.12)$$

Нетрудно видеть, что квадраты их градиентов совпадают с квадратом градиента  $S^0$  и, следовательно, они также должны удовлетворять уравнению эйконала. В §3 будет сформулирована теорема существования и единственности аналитических функций  $S^j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, d$ , удовлетворяющих уравнению (2.7) с заданными условиями в начале координат, и одновременно теорема существования и единственности диффеоморфизмов, приводящих векторные поля вида  $(\nabla S^j, \nabla \cdot)$  к некоторой нормальной форме. В §4 будут получены аналитические функции  $\psi_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, d$ , удовлетворяющие уравнениям (2.4) и (2.7), (2.3), найдены числа  $E_{nj}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , для некоторого набора квантовых векторов  $n$ ,  $|n| = 0, 1, 2, \dots$ , и функции  $u_{nj}(x)$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ , в некоторой окрестности начала координат, не зависящей от  $h$ . В §5 изложен способ описания множества нулей собственной функции, указан путь исследования окрестностей квазипересечений, рассмотрены примеры ( $n = (0, 0)$ ,  $(1, 0)$  и  $(1, 1)$ ).

### § 3. ТЕОРЕМА О ФАЗАХ, НОРМАЛЬНЫХ ФОРМАХ И ДИФФЕОМОРФИЗМАХ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

Пусть  $V$  — аналитическая функция, представимая в некотором полициindre  $|x_i| \leq r$ ,  $i = 1, 2, \dots, d$ , тейлоровским разложением следующего вида

$$V(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \omega_i^2 x_i^2 + \sum_{|k| \geq 3} v_k x^k, \quad (3.1)$$

где  $k = (k_1, k_2, \dots, k_d) \in \mathbb{N}^d$ ,  $|k| = \sum_{i=1}^d k_i$ ,  $\omega_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, d$ .

Поставим начальные условия для функций  $S^j$ ,  $j = 0, 1, \dots, d$ , а именно:

$$S^j(0) = 0, \quad \frac{\partial S^j}{\partial s_i}(0) = 0, \quad \frac{\partial^2 S^j}{\partial x_j \partial x_k}(0) = (1 - 2\delta_{ij}) \delta_{ik} \omega_k.$$

В соответствии с этим будем искать решения уравнения (2.7) в виде следующих степенных рядов

$$S^j(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \omega_i (1 - 2\delta_{ij}) x_i^2 + \sum_{|k| \geq 3} (S^j)_k x^k, \quad j = 0, 1, \dots, d \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в (2.7) и сравнивая коэффициенты при  $x^k$ , мы получим следующие рекуррентные соотношения для  $(S^j)_k$ :

$$(S^j)_k = \frac{\tilde{v}_k}{\langle k, I_j \omega \rangle}, \quad (3.3)$$

где  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_d)$ ;  $I_0$  — единичная матрица;  $I_j$ ,  $j = 1, \dots, d$ , — диагональные матрица порядка  $d$ , у которых все элементы диагонали равны единице за исключением  $j$ -го, который равен  $-1$ ,

$$\tilde{v}_k = v_k \quad \text{для} \quad |k| = 3 \quad \text{и} \quad \tilde{v}_k = v_k + \text{члены,}$$

зависящие от  $(S^j)_\kappa$ ,  $|\kappa| < |k|$ , для  $|k| \geq 4$ .

Нетрудно видеть, что для положительных чисел  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, d$ , знаменатели в формулах (3.3) для  $j = 1, 2, \dots, d$ , могут равняться нулю. Для того, чтобы это исключить, даже при формальном построении указанных рядов необходимо наложить некоторые дополнительные условия на потенциал.

Рассмотрим одновременно замену переменных

$$\Phi^j : y_j = (y_{j1}, \dots, y_{jn}) \rightarrow (x_1 = \Phi_1^j(y_j), \dots, x_d = \Phi_d^j(y_j)), \quad (3.4)$$

которая переводит каждое векторное поле  $\langle \nabla S^j, \nabla \cdot \rangle$  в нормальную для него форму:

$$L_0^j = \sum_{i=1}^d \omega_i (1 - 2\delta_{ij}) y_{ji} \frac{\partial}{\partial y_{ji}}. \quad (3.5)$$

Будем искать функции  $\Phi_i^j(y)$ ,  $i = 1, 2, \dots, d$  в виде следующих рядов

$$\Phi_i^j(y_j) = y_{ji} + \sum_{|k| \geq 2} (\Phi_i^j)_k y_j^k. \quad (3.6)$$

Для того, чтобы получить формулы для коэффициентов  $(\Phi_i^j)_k$  заменим  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, d$ , в  $(\nabla S^j, \nabla \cdot)$  их выражениями  $\Phi_i^j(y)$  вида (3.6) и приравняем полученные ряды (в переменных  $y$ ) к  $L_0^j$ . Отсюда мы найдем следующие выражения для коэффициентов

$$(\Phi_i^j)_k = \frac{\tilde{S}_{i,j,k}}{(k - \text{ort}_i, I_j \omega)}, \quad j = 0, 1, \dots, d, \quad |k| \geq 2, \quad (3.7)$$

где

$$\tilde{S}_{i,j,k} = (k_i + 1)(S^j)_{k + \text{ort}_i} + \text{члены, зависящие от } (\Phi_l^j)_k, \\ l = 1, 2, \dots, d, \quad |k| < |k|.$$

$\text{ort}_i$  — элемент стандартного базиса  $\{\text{ort}_i\}_1^d$ , у которого все компоненты равны 0 кроме  $i$ -й, которая равна 1.

Видно, что некоторые знаменатели в (3.7) обращаются в ноль при некоторых значениях  $\omega$ . Требуется исключить эти значения.

Примем следующие определения.

Будем называть положительные  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_d$  *нерезонансными*, если они линейно независимы над кольцом целых чисел.

Положительные числа  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_d$  будем называть *диофантовыми*, если существуют положительные константы  $\alpha$  и  $C$  такие, что для любого  $k \in \mathbb{Z}^d$ ,  $k \neq 0$ ,

$$|(k, \omega)| \geq \frac{C}{|k|^\alpha}. \quad (3.8)$$

Обозначим множество всех векторов  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_d)$  с положительными компонентами буквой  $\Omega$ , то его подмножество, которое состоит из векторов  $\omega$  с *нерезонансными* компонентами, — буквой  $\Omega_{nr}$ , подмножество же состоящее из  $\omega$  с *диофантовыми* компонентами — буквой  $\Omega_D$ .

**Теорема.** Пусть потенциал  $V$  — аналитическая функция  $d$  комплексных переменных  $x_1, x_2, \dots, x_d$ , представимая рядом вида (3.1) в некоторой окрестности начала координат.

- (1) Если  $\omega \in \Omega_{nr}$ , то существует единственная пара  $(S^0, \Phi^0)$ , где  $S^0$  — аналитическая функция, представимая рядом вида (3.2) для  $j = 0$  в некоторой окрестности начала координат и удовлетворяющая уравнению (2.7), а  $\Phi^0$  — аналитический диффеоморфизм, преобразующий векторное поле  $(\nabla S^0, \nabla \cdot)$  в нормальную форму  $L_0^0$ , заданную выражением (3.5).
- (2) Если  $\omega \in \Omega_D$ , то для каждого  $j \in \{1, 2, \dots, d\}$  существует единственная пара  $(S^j, \Phi^j)$ , где  $S^j$  — аналитическая функция, представимая рядом вида (3.2) в некоторой окрестности начала координат и удовлетворяющая уравнению (2.7), а  $\Phi^j$  — аналитический

диффеоморфизм, преобразующий векторное поле  $\langle \nabla S^j, \nabla \cdot \rangle$  в нормальную форму  $L_0^j$ , заданную равенством (3.5).

Доказательство этой теоремы основано на методе Ньютона, который позволяет подавить малые знаменатели в (3.3) и (3.7), и будет опубликовано в другой статье (в журнале *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Physique Théorique*, в 1994 или 1995 г.).

**Замечание 1.** При  $j = 0$  знаменатели в (3.3) в ноль не обращаются. Существование аналитической  $S^0$  для аналитического потенциала доказано в [21] без дополнительных условий нерезонансности. Здесь эти условия нужны для построения диффеоморфизма  $\Phi^0$ .

**Замечание 2.** Утверждение теоремы может быть следующим образом интерпретировано с точки зрения классической механики. Функции  $S^j$  — это производящие функции для инвариантных лагранжевых многообразий в классической динамической системе с потенциалом  $-V(x)$ . В отличие от потенциала  $V(x)$ , имеющего "яму" в начале координат, потенциал  $-V(x)$  имеет там "вершину". Таким образом наша квантовомеханическая задача "на дне ямы" эквивалентна задаче классической динамики "в окрестности вершины". Начало координат является особой точкой в этой задаче, точкой, в которой время равно  $-\infty$ , точкой, в которой энергия лагранжевых многообразий стремится к нулю. Сформулированная выше теорема есть теорема существования производящих функций  $S^j$  для инвариантных лагранжевых многообразий в малой окрестности такой точки.

**Замечание 3.** Геометрия, связанная с подобной задачей исследуется в работе [22].

**Замечание 4.** Функции  $S^j$  можно продолжить аналитически на значительно большую область, используя формулы  $S^j = \int \sum_{i=1}^d p_i^j dx_i^j$ ,  $j = 1, 2, \dots, d$ , где при каждом  $j$  интеграл берется вдоль траектории соответствующей гамильтоновой системы.

#### § 4. ПОСТРОЕНИЕ РЯДОВ (2.1), (2.2)

Для построения рядов (2.1), (2.2) требуется найти все функции  $\psi_j(x)$  — решения следующих уравнений:

$$\psi_j(x)^2 = S^0(x) - S^j(x), \quad j = 1, 2, \dots, d. \quad (4.1)$$



**Лемма 1.** Пусть  $S^j(x)$ ,  $j = 0, 1, \dots, d$ , — аналитические функции, удовлетворяющие условиям теоремы. Тогда правые части в равенствах (4.1) являются полными квадратами, т.е. для каждого  $j = 1, 2, \dots, d$ , существует и единственная аналитическая функция  $\psi_j(x)$ , которая удовлетворяет уравнению (4.1) и представима теппоровским разложением следующего вида:

$$\psi_j = \sqrt{\omega_j} x_j + \sum_{|k| \geq 2} (\psi_j)_k x^k, \quad j = 1, 2, \dots, d, \quad (4.2)$$

в некоторой окрестности начала координат.

**Доказательство.** Из (3.2) следует, что

$$S^0 - S^j = \omega_j x_j^2 + \sum_{|k| \geq 3} (S^0 - S^j)_k x^k, \quad j = 1, 2, \dots, d. \quad (4.3)$$

Обозначим через  $x_{\perp j}$  точку  $(d-1)$ -мерного пространства, ортогонального к  $\text{ort}_j$ . В соответствии с подготовительной теоремой Вейерштрасса для каждого  $j = 1, 2, \dots, d$ , в окрестности  $x_{\perp j} = (0, \dots, 0)$  существуют аналитические функции  $f_j(x_{\perp j})$  и  $g_j(x_{\perp j})$  такие, что

$$S^0 - S^j = [x_j^2 + x_j f_j(x_{\perp j}) + g_j(x_{\perp j})] F_j(x), \quad j = 1, 2, \dots, d, \quad (4.4)$$

где  $F_j(x)$  — аналитическая функция в некоторой окрестности начала координат, удовлетворяющая условию  $F_j(0, \dots, 0) \neq 0$ . (Из (4.3) видно, что  $F_j(0, \dots, 0) = \omega_j$ ).

Система уравнений (2.4), (2.7) и (2.3) для функций  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x), \dots, \psi_d(x)$  выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} (\nabla \psi_i, \nabla \psi_j) = \delta_{ij} (\nabla \psi_j)^2, \\ \sum_{i=1}^d \psi_i^2 \nabla \psi_i^2 = 2V \end{cases} \quad (4.5)$$

Решения уравнений (4.5) можно найти формально в виде рядов (4.2). В самом деле, подставив (4.2) в (4.5) и приравняв коэффициенты при каждой степени  $x^k$  к нулю, мы получим системы линейных уравнений для  $(\psi_j)_k$  с отличными от нуля определителями при  $\omega \in \Omega_D$ . Так мы можем последовательно вычислить коэффициенты  $(\psi_j)_k$  и построить функции  $\psi_j$  в виде формальных рядов. Отсюда будет следовать, что  $S^0 - S^j$  для каждого  $j = 1, 2, \dots, d$  является полным квадратом в смысле формальных рядов, а следовательно выражение в квадратных скобках формулы (4.4) является полным квадратом в том же самом смысле. Этого достаточно

для доказательства леммы 1, ввиду аналитичности и единственности функций в (4.4).  $\square$

Построение решений уравнений (2.9), (2.10) удобно предварить еще одной вспомогательной леммой – о разрешимости уравнений следующего вида

$$L_n u = f, \quad (4.6)$$

где

$$L_n = -(\omega, n) + L_0^0, \quad (4.7)$$

$n \in \mathbb{N}^d$ ,  $L_0^0$  определен в (3.5). Рассмотрим класс операторов вида (4.7) в следующем банаховом пространстве. Пусть  $B(r)$  – цилиндр радиуса  $r$  с центром в начале координат:

$$B(r) = \{y \in \mathbb{C}^d : |y_i| < r, \quad i = 1, 2, \dots, d\} \quad (4.8)$$

Обозначим через  $B_r$  банахово пространство аналитических функций в  $B(r)$  с нормой

$$\|f\| = \sup_{y \in B(r)} |f(y)|, \quad (4.9)$$

через  $B_r, M, n, 0$  подпространство пространства  $B_r$ , состоящее из функций, коэффициенты  $f_k$  тейлоровских разложений которых равны нулю при следующих условиях: если  $k = n$  и если  $|k| < M$ , где  $n \in \mathbb{N}^d$ ,  $M \in \mathbb{N}$ , через  $\omega_0 = \min_{i \in \{1, \dots, d\}} \omega_i$ .

**Лемма 2.** Для  $r' < r$ , существует ограниченный оператор  $\{L_n\}^{-1}$

$$\{L_n\}^{-1} : B_{r, M, n, 0} \rightarrow B_{r', M, n, 0} \quad (4.10)$$

разрешающий уравнение

$$L_n u = f|_{B(r')}, \quad u \in B_{r', M, n, 0}, \quad f \in B_{r, M, n, 0}. \quad (4.11)$$

в следующих случаях

(1) для любого  $\omega \in \Omega$ ,  $j = 0$ ,  $n = (0, \dots, 0)$ ,

(2) для  $\omega \in \Omega_{nr}$ ,  $j = 0$  и произвольного  $n$  при этом существует такая положительная константа  $c_1 = c_1(M, d, \omega, r)$  что в обоих случаях (1), (2):

$$\|\{L_n\}^{-1}\| \leq \frac{c_1}{(r - r')^{d-1}} \quad (4.12)$$

**Доказательство.** Рассмотрим уравнение (4.11) в предположении, что  $f$  в правой части представима следующим тейлоровским разложением в  $B(r)$

$$f(y) = \sum_{|k| \geq M} f_k y^k. \quad (4.14)$$

$$u(y) = \sum_{|k| \geq 0} u_k y^k. \quad (4.15)$$

Из уравнения (4.11) мы легко получим формулы для коэффициентов  $u_k$

$$u_k = \frac{f_k}{\langle \omega, k - n \rangle} \Big|_{k \neq n}, \quad u_n = f_n = 0, \quad u_k |_{|k| < M} = 0. \quad (4.16)$$

Отсюда вытекают следующие оценки для  $k \neq n$

$$|u_k| \leq \frac{|f_k|}{|k - n| \omega_0} \leq \frac{c |f_k|}{|k| \omega_0} \leq \frac{c \|f\|}{|k| \omega_0 r^k}. \quad (4.17)$$

Последнее неравенство является следствием формулы Коши.

Таким образом справедливы следующие оценки

$$\begin{aligned} \|u\| &\leq \left| \sum_{|k| \geq M} u_k y^k \right| \leq c \sum_{i \geq M} (l + d - 2) \dots (l + 1) \left(\frac{r'}{r}\right)^i \|f\| \\ &\leq \frac{c_1}{(r - r')^{d-1}} \|f\| \end{aligned} \quad (4.18)$$

что и завершает доказательство леммы 2.  $\square$

Легко увидеть теперь, что уравнение (2.9) после замены переменных (3.4) с  $j = 0$  будет удовлетворять условиям леммы 2, случай (1),  $M = 1$ , если мы выберем число  $E_{n1}$  следующим образом:

$$E_{n1} = \sum_{i=1}^d \left(n_i + \frac{1}{2}\right) \omega_i. \quad (4.19)$$

Тогда, согласно лемме 2, в некотором полицилиндре можно построить аналитическое решение уравнения (2.9), обращающееся в ноль в начале координат.

Перейдем теперь к "нормальным" переменным  $y$  в уравнениях (2.10) и будем искать решения этих уравнений в виде произведения:

$$\tilde{u}_j = \tilde{U}_j e^{\tilde{P}_0}, \quad (4.20)$$

где тильдой обозначена замена переменной:  $\tilde{f}(y) = f(x)$ ;  $\tilde{P}_0$  - решений уравнения (2.9) при  $n = (0, \dots, 0)$ , т.е.

$$\langle \nabla S, \nabla e^{\tilde{P}_0} \rangle + \left(\frac{\Delta S}{2} - E_{(0, \dots, 0)1}\right) e^{\tilde{P}_0} \equiv 0. \quad (4.21)$$

Подставив (4.20) в (2.10) и приняв во внимание (4.21) и (4.19) (откуда видно, что  $E_{n1} = E_{(0, \dots, 0)_1} + \langle n, \omega \rangle$ ), мы получим следующие уравнения для функций  $U_j$ :

$$L_0 \tilde{U}_j - \langle n, \omega \rangle \tilde{U}_j = \tilde{F}_j e^{-\tilde{P}_0}, \quad j = 0, 1, \dots \quad (4.22)$$

Теперь оператор в левой части удовлетворяет условиям леммы 2, случай (2). Уравнения разрешимы при:

$$(\tilde{F}_j e^{-\tilde{P}_0})_n = 0, \quad (4.23)$$

где  $(\tilde{F})_n$  — коэффициент Тейлора при  $y^n$  функции  $\tilde{F}$ .

Так мы получим следующие выражения для всех членов ряда (2.1):

$$E_{n2} = -\frac{1}{2} \left( [\Delta \tilde{P}_n + (\nabla \tilde{P}_n)^2] \right)_0 - \omega^{-\frac{n}{2}} (\tilde{F}_1 e^{\tilde{P}_n - \tilde{P}_0})_n, \quad (4.24)$$

$$E_{nj} = \omega^{-\frac{n}{2}} \left( \left[ \frac{\Delta \tilde{u}_{j-1}}{2} - \sum_{i=1}^{j-1} E_{n,i+1} \tilde{u}_{n,j-1} \right] e^{-\tilde{P}_0} \right)_n, \quad j \geq 2, \quad (4.25)$$

$$\text{где } \omega^{-\frac{n}{2}} = \omega_1^{-\frac{n_1}{2}} \omega_2^{-\frac{n_2}{2}} \dots \omega_d^{-\frac{n_d}{2}},$$

выражение для  $\tilde{F}_1$  легко получить из (2.11), и найдем все функции  $u_{nj}$ ,  $j = 1, 2, \dots$  в виде (4.20). Каждая из этих функций (равно как и  $\psi_j(x)$ ,  $j = 1, 2, \dots, d$ ) может быть продолжена вне малой окрестности начала координат (см. Замечание 3, §3).

### § 5. Множество нулей собственной функции. Квазипересечения. Примеры

Главный член  $u_{n0}$  собственной функции  $u_n$  содержит множителем произведение полиномов Эрмита. Следовательно в нулевом приближении множество нулей функции  $u_n$  есть сеть пересекающихся поверхностей  $\Sigma_i : \psi_i(x) = t_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, d$ ,  $t_{ij} \in \mathfrak{R}_i$ ,  $\mathfrak{R}_i$  — множество корней полинома  $H_{n_i}(t)$ . Следующий (первый) член в (2.2) зависит от третьих и четвертых производных потенциала  $V$ . В общем случае уже в этом приближении видно, что поверхности, составляющие множество нулей  $u_n$  — не пересекаются, а образуют квази-пересечения в окрестности точек пересечения поверхностей  $\Sigma_i$ .

В случае  $d = 2$

$$u_{n0}(x) = H_{n_1} \left( \frac{\psi_1}{\sqrt{h}} \right) H_{n_2} \left( \frac{\psi_2}{\sqrt{h}} \right) \exp \left\{ -\frac{S}{h} + \mathcal{P}_n \right\}. \quad (5.1)$$

Множество нулей  $u_n$  в главном приближении есть сеть пересекающихся линий  $\Sigma_i$  на плоскости. Эта сеть преобразуется в квазипересекающийся набор кривых после учета следующих членов. Характер квазипересечений зависит от старших производных потенциала. Возможно в принципе подобрать потенциал так, чтобы обеспечить наперед заданную картину квазипересечений. Рассмотрим несколько примеров.

**Пример первый:**  $n = (0, 0)$ .

Хоть в этом случае собственная функция и не имеет нулей, но формулы (4.20) показывают, что при построении следующих членов в любой моде надо знать несколько тейлоровских коэффициентов  $\mathcal{P}_0$  — решения уравнения (2.9) для нулевого квантового вектора. При  $d = 2$  обозначим

$$S^0 = S^+, \quad S^2 = S^-. \quad (5.2)$$

Формулы (3.3) принимают в этом случае следующий вид

$$\begin{aligned} S_{03}^{\pm} &= \pm \frac{v_{03}}{3\omega_2}, \\ S_{12}^{\pm} &= \frac{v_{12}}{\omega_1 \pm 2\omega_2}, \\ S_{21}^{\pm} &= \frac{v_{21}}{2\omega_1 \pm \omega_2}, \quad \text{при } i + j = 3, \\ S_{30}^{\pm} &= \frac{v_{30}}{3\omega_1}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

и

$$\begin{aligned} S_{04}^{\pm} &= \pm \frac{v_{04}}{4\omega_2} \mp \frac{v_{12}^2}{8\omega_2(\omega_1 \pm 2\omega_2)^2} \mp \frac{v_{03}^2}{8\omega_2^3}, \\ S_{13}^{\pm} &= \frac{v_{13}}{\omega_1 \pm 3\omega_2} \\ &\quad - \frac{2v_{21}v_{12}}{(\omega_1 \pm 3\omega_2)(\omega_1 \pm 2\omega_2)(2\omega_1 \pm \omega_2)} \mp \frac{2v_{03}v_{12}}{\omega_2(\omega_1 \pm 3\omega_2)(\omega_1 \pm 2\omega_2)}, \\ S_{22}^{\pm} &= \frac{v_{22}}{2(\omega_1 \pm \omega_2)} - \frac{v_{30}v_{12}}{\omega_1(\omega_1 \pm \omega_2)(\omega_1 \pm 2\omega_2)} \mp \frac{v_{03}v_{21}}{2\omega_2(\omega_1 \pm \omega_2)(2\omega_1 \pm \omega_2)} \\ &\quad - \frac{v_{12}^2}{(\omega_1 \pm \omega_2)(\omega_1 \pm 2\omega_2)^2} - \frac{v_{21}^2}{(\omega_1 \pm \omega_2)(2\omega_1 \pm \omega_2)^2}, \\ S_{31}^{\pm} &= \frac{v_{31}}{3\omega_1 \pm \omega_2} \\ &\quad - \frac{2v_{12}v_{21}}{(\omega_1 \pm \omega_2)(\omega_1 \pm 2\omega_2)(2\omega_1 \pm \omega_2)} - \frac{2v_{30}v_{21}}{\omega_1(3\omega_1 \pm \omega_2)(2\omega_1 \pm \omega_2)}, \\ S_{40}^{\pm} &= \frac{v_{40}}{4\omega_1} - \frac{v_{21}^2}{8\omega_1(2\omega_1 \pm \omega_2)^2} - \frac{v_{30}^2}{8\omega_1^3}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

при  $i + j = 4$ .

После подстановки (5.3)-(5.4) в (2.9) при  $n_1 = n_2 = 0$ , мы получим первые тейлоровские коэффициенты функции  $\mathcal{P}_0$ :

$$(\mathcal{P}_0)_{10} = -\frac{1}{\omega_1}(3S_{30} + S_{12}), \quad (5.5)$$

$$(\mathcal{P}_0)_{01} = -\frac{1}{\omega_1}(3S_{03} + S_{21}), \quad (5.6)$$

$$(\mathcal{P}_0)_{20} = -\frac{1}{2\omega_1} \left( 3S_{40} + \frac{1}{2}S_{22} + \frac{3}{2}S_{30}(\mathcal{P}_0)_{10} + \frac{1}{2}S_{21}(\mathcal{P}_0)_{01} \right), \quad (5.7)$$

$$(\mathcal{P}_0)_{02} = -\frac{1}{2\omega_1} \left( 3S_{04} + \frac{1}{2}S_{22} + \frac{3}{2}S_{03}(\mathcal{P}_0)_{01} + \frac{1}{2}S_{21}(\mathcal{P}_0)_{10} \right), \quad (5.8)$$

Теперь мы сразу можем написать уже два члена разложения (2.1) для собственного числа

$$\begin{aligned} E_{00}^{[2]} &= \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} h \\ &+ \left( \frac{3}{4\omega_1^2} v_{40} + \frac{1}{4\omega_1\omega_2} v_{22} + \frac{3}{4\omega_2^2} v_{04} \right. \\ &- \frac{15}{8\omega_1^4} v_{30}^2 - \frac{3\omega_1 + 10\omega_2}{4\omega_1^3\omega_2(\omega_1 + 2\omega_2)} v_{30}v_{12} \\ &- \frac{3\omega_1^2 + 8\omega_1\omega_2 + 8\omega_2^2}{8\omega_1^2\omega_2^2(\omega_1 + 2\omega_2)^2} v_{12}^2 - \frac{8\omega_1^2 + 8\omega_1\omega_2 + 3\omega_2^2}{8\omega_1^2\omega_2^2(2\omega_1 + \omega_2)^2} v_{21}^2 \\ &\left. - \frac{10\omega_1 + 3\omega_2}{4\omega_1\omega_2^3(\omega_1 + 2\omega_2)} v_{03}v_{21} - \frac{15}{8\omega_2^4} v_{03}^2 \right) h^2. \end{aligned} \quad (5.9)$$

**Пример второй:**  $n = (1, 0)$ . Здесь  $H_1(t) = 2t$ ,  $H_0(t) = 1$ . Найдем первые тейлоровские коэффициенты функций  $\psi_1(x)$  и  $\psi_0(x)$  по формулам (4.1) и (5.3)-(5.4) и, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  в уравнении (2.9), получим выражения для первых коэффициентов Тейлора функции  $\mathcal{P}_{(1,0)}$ . После этого по формуле (4.24) найдем второй член собственного числа  $E_{(1,0)}$ , а именно

$$\begin{aligned} E_2^{10} &= \frac{15}{4\omega_1^2} v_{40} + \frac{3\omega_1^2 - 2\omega_1\omega_2 + 3\omega_2^2}{4\omega_1\omega_2(\omega_1^2 - \omega_2^2)} v_{22} + \frac{3}{4\omega_2^2} v_{04} \\ &+ \mathcal{R}_1(\omega_1, \omega_2)(v_3, v_3), \end{aligned} \quad (5.10)$$

где  $v_3 = (v_{30}, v_{21}, v_{12}, v_{03})$ ,  $\mathcal{R}_1(\omega_1, \omega_2)$  — матрица, элементы которой — рациональные функции от  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

В нулевом приближении собственная функция  $u_{(1,0)}$  обращается в ноль на линии

$$\psi_1 = 0.$$

Если ряд (2.2) обрезать после второго слагаемого, то оставшийся отрезок ряда обращается в ноль на кривой

$$\psi_1 e^{\mathcal{P}_{(1,0)}} + hU_1 e^{\mathcal{P}_0} = 0, \quad (5.11)$$

уравнение которой в малой окрестности нуля принимает вид:

$$x_1 = -\frac{h(U_{(1,0)1})_{00}}{\sqrt{\omega_1}},$$

число

$$(U_{(1,0)})_{00} = -\frac{2}{\omega_1} [(\psi_1)_{20} + (\psi_1)_{02} + \sqrt{\omega_1} (\mathcal{P}_{(1,0)})_{10}],$$

$$(\psi_1)_{20} = \frac{\sqrt{\omega_1}}{3\omega_1^2} v_{30},$$

$$(\psi_1)_{02} = \frac{\sqrt{\omega_1}}{\omega_1^2 - 4\omega_2^2} v_{12},$$

$$(\mathcal{P}_{(1,0)})_{10} = -\frac{7}{3\omega_1^2} v_{30} - \frac{1}{\omega_1(\omega_1 + 2\omega_2)} v_{12}.$$

**Пример третий:**  $n = (1, 1)$ . Здесь

$$u_{(1,1)0}(x) = 4\psi_1(x)\psi_2(x)e^{\mathcal{P}_{(1,1)}(x)},$$

$$u_{(1,1)1}(x) = U_{(1,1)}(x)e^{\mathcal{P}_0(x)},$$

$$E_{(1,1)1} = \frac{3}{2}\omega_1 + \frac{3}{2}\omega_2,$$

$$E_{(1,1)2} = -\left(\frac{\Delta\tilde{\mathcal{P}}_{(1,1)} + (\nabla\tilde{\mathcal{P}}_{(1,1)})^2}{2}\right)_{00} - \left(\frac{e^{\tilde{\mathcal{P}}_{1,1}} - \tilde{\mathcal{P}}_0}{\sqrt{\omega_1\omega_2}} \left[ \frac{\tilde{\psi}_2\Delta\tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_1\Delta\tilde{\psi}_2}{2} + (\nabla\tilde{S}^0, \nabla\tilde{\mathcal{P}}_{(1,1)}) \right]\right)_{11}.$$

Нетрудно убедиться, что  $(U_{(1,1)})_{00} = 0$ ,

$$(U_{(1,1)})_{10} = \frac{1}{\sqrt{\omega_1}} [(\psi_2)_{20} + (\psi_2)_{02}] + 2\sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} (\mathcal{P}_{(1,1)})_{01},$$

$$(U_{(1,1)})_{01} = \frac{1}{\sqrt{\omega_2}} [(\psi_2)_{20} + (\psi_2)_{02}] + 2\sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}} (\mathcal{P}_{(1,1)})_{10},$$

$$(\mathcal{P}_{(1,1)})_{10} = -\frac{7}{3\omega_1^2} v_{30} - \frac{\omega_1 - 6\omega_2}{\omega_1(\omega_1^2 - 4\omega_2^2)} v_{12},$$

$$(\mathcal{P}_{(1,1)})_{01} = -\frac{6\omega_1 - \omega_2}{\omega_2(4\omega_1^2 - \omega_2^2)} v_{21} - \frac{7}{3\omega_2^2} v_{03}.$$

Из приведенных выше формул следует, что в окрестности координат в нулевом приближении линии нулей собственной функции  $u_{(1,1)}$  это — две пересекающиеся прямые

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \end{cases}$$

учет второго члена в рядах (2.1)-(2.2) показывает, что это — две ветви гиперболы

$$2\sqrt{\omega_1\omega_2}x_1x_2 + h[(U_{(1,1)})_{10}x_1 + (U_{(1,1)})_{01}x_2] = 0,$$

одна из которых проходит через начало координат.

Таким образом можно рассмотреть квазимоды, отвечающие любому квантовому вектору с  $|n| \geq 1$  и исследовать их узловые линии. Это интересно с точки зрения физики и очень важно для эффективного асимптотического описания амплитуды расщепления в задаче с одинаковыми потенциальными ямами. Дело в том, что эту асимптотику можно выразить в терминах интеграла от произведения собственных функций по некоторой линии (см., например, [12-14]). Надо при этом знать, что на пути интегрирования собственные функции не равны нулю.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. А. Березин, М. А. Шубин, Уравнение Шредингера, М.: 1983.
2. С. Ю. Славянов, Асимптотика сингулярных задач Штурма-Лиувилля по большому параметру в случае близких точек перехода. — Дифф. уравнения 2, No. 2 (1969), 313-325.
3. М. В. Федорюк, Асимптотика дискретного спектра оператора  $-\omega'' + \lambda^2 p(x)\omega$ . — Мат. сборник 68 (1965), 81-110.
4. А. Г. Аленицын, Расщепление спектра, порожденное потенциальным барьером в задачах с симметричным потенциалом. — Дифф. уравнения 18, No. 11 (1982), 1971-1975.
5. B. Simon, Semiclassical analysis of low lying eigenvalues, I. Nondegenerate minima: Asymptotic expansions. — Ann. Inst. Henri Poincaré 38 (1983), 295-307.
6. B. Simon, Semiclassical analysis of low lying eigenvalues, II. Tunneling. — Ann. Math. 120 (1984), 89-118.



7. В. П. Маслов, Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях, М.
8. E. M. Harrel, *Double wells*. — *Comm. Math. Phys.* **75** (1980), 239–261.
9. G. Jona-Lasinio, F. Martinelli, E. Scoppola, *New approach to the semiclassical limit of quantum mechanics*. — *Comm. Math. Phys.* **80** (1981), 223–254.
10. Т. Ф. Панкратова, *Квазимоды и расщепление собственных значений*. — Докл. АН СССР **276**, No. 4 (1984), 795–799.
11. E. Delabaere, H. Dillinger, *Contribution a la resurgence quantique*, These de doctoral de math. L'Université de Nice Sophia-Antipolis.
12. V. Helffer, J. Sjöstrand, *Multiplewells in the semi-classical limit I*. — *Comm. in partial differential equations* **9** (1984), 337–408.
13. V. Helffer, J. Sjöstrand, *Puits multiples en limite semi-classique II Interaction moléculaire*. — *Ann. Inst. Henri Poincaré* **42** (1985), 127–212.
14. V. Helffer, J. Sjöstrand, *Multiplewells in the semi-classical limit III - Interaction through nonresonant wells*. — *Math. Nachr.* **124** (1985), 263–313.
15. С. Ю. Славянов, Н. А. Вешев, *Квантование нижних состояний ангармонического осциллятора с помощью методов классической динамики*. — *Проблемы Мат. Физ.* вып. 13 (1991).
16. С. Ю. Доброхотов, В. Н. Колокольцев, В. П. Маслов, *Расщепление нижних энергетических уровней уравнения Шредингера и асимптотика фундаментального решения уравнения  $h\Delta u = 1/2h^2\Delta u - V(x)u$* . — *Теор. и Мат. Физ.* **87** No. 3 (1991), 323–375.
17. С. Ю. Доброхотов, В. Н. Колокольцев, *Об амплитуде расщепления нижних энергетических уровней оператора Шредингера с двумя симметричными ямами*. — *Теор. и Мат. Физ.* **94** No. 3 (1993), 323–375.
18. В. Н. Колокольцев, *Об асимптотике нижних собственных значений и функций оператора Шредингера*. — Докл. Акад. Наук **328**, No. 6 (1993), 649–653.
19. В. А. Фок, *Начала квантовой механики*. М.
20. В. И. Арнольд, *Моды и квазимоды*. — *Функц. Анализ* **6**, вып. 2 (1972), 12–20.
21. J. Sjöstrand, *Analytic wavefront sets and operators with multiple characteristics*. — *Hokkaido Math.* **12** (1983), 392–433.
22. Nguyen Hu'u Du'c, F. Pham, *Germes de configurations legendriennes stables et fonctions d'Airy-Weber généralisées*. — *Annales de l'institut Fourier, Grenoble*, **41** (1991), 905–936.

Pankratova T. F. Ansatz with Hermite polynomials for a multidimensional well.

The Schrödinger operator in  $\mathbb{R}^d$  with an analytic potential, having a nondegenerated minimum (well) at the origin, is considered. The *ansatz* with Hermite polynomials is used. Under a *Diophantine* condition on the frequencies, full asymptotic series (the Plank constant  $h$  tending to zero) for eigenfunctions with given quantum numbers  $n \in \mathbb{N}^d$  concentrated at the bottom of the well, is constructed, the Gaussian-like asymptotics being valid in a neighbourhood of the origin which is independent of  $h$ . The obtained asymptotic series can be prolonged on a larger domain with the

help of ray methods. The way to find zero-sets of the eigenfunctions is described. Some examples are considered.

С.-Петербургский государственный  
университет

Поступило