S. N. Nagornyh, D. S. Sablukov, Regularization of generalized functions in convolution operator algebra,
Zhurnal SVMO, 2017, Volume 19, Number 3, 53–63

DOI 10.15507/2079-6900.19.201703.53-63

УДК 517.9

Регуляризация обобщенных функций в алгебре сверточных операторов

© **С. Н. Нагорных** [1], **Д. С. Саблуков**[2]

Аннотация. Рассмотрена вспомогательная задача вычисления интеграла Коши с помощью n-кратного интеграла в операторах целочисленных порядков. Это n-кратное дифференцирование приводит к неоднородной и однородной системам обыкновенных дифференциальных уравнений n-порядка. Решение первой системы равно свертке решения второй системы с произвольной функцией, образующей неоднородность первой системы. Это является необходимым условием решения данной задачи. Свертка является достаточным условием введения алгебры операторов дробного порядка и эквивалентности этой алгебры алгебре операторов свертки. Кроме этого существенно наличие обыкновенного дифференциального уравнения, определяющего устойчивость времени. Подалгеброй дробного порядка менее 1 определены операторы свертки как параметрические обобщенные функции, их асимптотические значения и единичные операторы. Алгебрами определена тождественность обыкновенных уравнений при подстановке в них операторов n-кратных интегралов. Регуляризация по В.С. Владимирову с привлечением теоремы Хорстхемке-Саичева соответствует регуляризации Н.Н. Боголюбова по сверхтекучести. Устойчивость сверхтекучести по времени описывается уравнением Ньютона и его квантовым аналогом. Параметрические обобщенные функции и их симметрия устойчивы.

Ключевые слова: обобщенные функции, регуляризация, алгебра сверточных операторов, интеграл Коши.

1. Введение

Регуляризация обобщенных функций (ОФ) приводится в работах [1, 2], однако в них не учтена устойчивость ОФ, которую ввел Н. Н. Боголюбов в работе 1947 года по сверхтекучести [3]. Регуляризацию будем рассматривать в связи с теоремой Хорстхемке-Саичева (ТХС) [4] по Стратановичу, которая состоит в следующем: для существования и совместности решений стационарного уравнения Фоккера-Планка (УФП) по Стратановичу в окрестности точки $x = 0$ со стационарным решением уравнения Ферхюльста в точке бифуркации $x = 0, \lambda = 0$ (λ-параметр) необходимо и достаточно, чтобы они имели вид $\delta(x)$ или $\delta(x - b(t))$ в стационарном и нестационарном случаях. Точка бифуркации $x = 0, \lambda = 0$ понимается как пересечение устойчивого $x = \lambda$ и неустойчивого $x = 0$ решений Ферхюльста в параметрическом пространстве X. В этой точке расходится плотность вероятности – решение УФП, но сходится к $\delta(x)$ при параметре $\alpha = \frac{2\lambda}{\sigma^2} \to 0+$ по ТХС. Разбиение плотности вероятности на произведение ОФ и основной функции линейного функционала может быть распространена на свертки.

[1] **Нагорных Сергей Николаевич**, доцент кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева (603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24), кандидат-физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5552-8521, algoritm@sandy.ru

[2] **Саблуков Денис Сергеевич**, бакалавр, Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева, (603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-7771-8924, denis-sablukov@mail.ru

2. Обыкновенные дифференциальные уравнения в алгебрах операторов

Сначала обозначим и вычислим интеграл Коши от функции $\xi(t) \in C^{\infty}$

$$I^n \xi(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (1-s)^{n-1} \xi(s) ds \tag{2.1}$$

с помощью n-кратного интеграла от $\xi(t)$

$$I^n \xi(t) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 ... \int_0^{t_{n-1}} dt_n \xi(t_n), \tag{2.2}$$

где I^n – символ оператора n-кратного интегрирования, n – положительное целое число, $n \geq 1$. Введем функцию $x(t)$ совпадающую с правой частью (2.2)

$$I^n \xi(t) = x(t). \tag{2.3}$$

Дифференцируя обе части равенства (2.3) n раз получаем $x(t)$ – решение обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ)

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} = \xi(t), \tag{2.4}$$

где

$$\xi(t) \equiv 0, \forall t < 0. \tag{2.5}$$

Тогда решение уравненя (2.4) имеет вид

$$x(t) = \int_0^t K_n(s) \xi(t-s) ds, \tag{2.6}$$

где ядро $K_n(t)$ – решение ОДУ

$$\frac{d^n K_n(t)}{dt^n} = 0 \tag{2.7}$$

с начальными условиями $K_n(0) = K_n'(0) = ... = K_n^{(n-2)} = 0, K_n^{(n-1)} = 1$.

Решение (2.7) имеет вид

$$K_n(t) = \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} \chi(t), \tag{2.8}$$

где $\chi(t)$ – функция Хевисайда. Решение (2.6) в символическом виде

$$x(t) = K_n(t) * \xi(t), \tag{2.9}$$

где $K_n(t)*$ – символ оператора свертки. Таким образом (2.9) с ядром вида (2.8) необходимо для вычисления (2.1) с помощью (2.2).

Достаточно принять (2.9). Введем и обозначим оператор интегрирования дробного порядка α, как оператор I^{α}. Заменим целое n в ядре $K_n(t)$ (2.8) произвольным неотрицательным числом α, а факториал числа заменим гамма-функцией $\Gamma(\alpha)$

$$(n-1)! = \Gamma(n) = \Gamma(\alpha), \tag{2.10}$$

где $\Gamma(\alpha)$ продолжает $\Gamma(n)$ на произвольное значение α. Ядро $K_n(t)$ примет вид

$$K_n(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}\chi(t). \tag{2.11}$$

Интеграл свертки назовем интегральным оператором дробного порядка

$$I^\alpha \xi(t) = K_\alpha(t) * \xi(t). \tag{2.12}$$

Запишем (2.12) в явном виде

$$I^\alpha \xi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\xi(s)ds, s > 0. \tag{2.13}$$

Рассмотрим

$$I^\alpha I^\beta = I^{\alpha+\beta}. \tag{2.14}$$

Покажем, что (2.14) эквивалентно

$$K_\alpha * K_\beta = K_{\alpha+\beta}. \tag{2.15}$$

Имеем [1]

$$K_\alpha * K_\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t s^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1}\xi(s)ds. \tag{2.16}$$

Сделаем замену $\tau = s/t$ в (2.16). Получим

$$K_\alpha * K_\beta = \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} B(\alpha, \beta), \tag{2.17}$$

где

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^t \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{\beta-1}d\tau \tag{2.18}$$

– бета-функция.

Известно равенство [1]

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \tag{2.19}$$

Подставим (2.19) в (2.17) и убедимся, что (2.14) эквивалентно (2.15). Выражение (2.15) описывает алгебраические свойства операторов сверток – решений уравнений (2.4, 2.7).

Рассмотрим дробные порядки $\gamma < 1$. Соответствующие операторы обозначим I^γ. Пусть n – $[\alpha]$ – наибольшее целое число, меньшее α на γ – дробную часть α. Аналогичное (2.14) алгебраическое выражение будет

$$I^\alpha = I^\gamma I^n, \tag{2.20}$$

где

$$\alpha = \gamma + n. \tag{2.21}$$

Подставим (2.21) в (2.20), получим

$$I^\alpha = I^{\alpha-n} I^n = I^\alpha I^{-n} I^n. \tag{2.22}$$

Положим $I^{-n}I^n = 1$. Определим I^{-n} как оператор n-кратного дифференцирования, которое ранее явно введено в (2.4, 2.7) по определению ОДУ. Тогда (2.20) есть подалгебра алгебры (2.14).

Ядро $K_\gamma(t)$ является сингулярной параметрической ОФ $K_\gamma(t) \in D'$, так как по ТХС с помощью линейного функционала

$$K_\gamma(t) \to \delta(t), \gamma \to 0+ \tag{2.23}$$

в окрестности $t = 0$. Параметр $\gamma = \frac{2\lambda}{\sigma^2}$, σ^2 – интенсивность белого шума. Поскольку из (2.20) имеем

$$K_\gamma(t) * K_n(t) = K_\alpha(t), \tag{2.24}$$

то следует положить сверточный оператор $K_\gamma(t)* = K_0(t)* = 1$. Тогда получим

$$K_n(t) = K_\alpha(t), 0 \leq \gamma < 1. \tag{2.25}$$

Аналогично определим при $\gamma = 0, I^\gamma = I^0 = 1$ из (2.20). Имеем также асимптотическое условие алгебры (2.20) как подалгебры (2.14)

$$\lim_{\gamma \to 0} I^\alpha \xi(t) = \xi(t). \tag{2.26}$$

Обратно, в силу эквивалентности (2.14) и (2.15), можно перенести асимптотические свойства $K(t)$ с (2.20) на (2.15). Действительно, имеем

$$\Gamma(\alpha) \sim \alpha^{-1}, \alpha \to 0. \tag{2.27}$$

Определим параметр λ как критическую точку (точку бифуркации) $t = 0, \lambda = 0$ нелинейного ОДУ (2.28) из (2.16) при $\alpha = \beta$ и как асимптотическое условие $\alpha = \frac{2\lambda}{\sigma^2} \to 0$ при $K_\alpha(t) \to \delta(t)$, $\alpha \to 0+$ в окрестности $t = 0$ ОДУ

$$\dot{t} = \lambda t - t^2, \tag{2.28}$$

где $\dot{t}$ – производная текущего времени по времени сдвига (сканировании) в свертке, $\lambda = s$ – положительный либо отрицательный параметр. $t = 0$ – неустойчивое решение (2.28), $t = \lambda$ – устойчивое решение (2.28). Решение $x(t)$ ищем с помощью кратного интеграла через операторы дробного порядка α алгебры (2.14) и устойчивого t, удовлетворящего (2.5).

$$x(t) = I^\alpha \xi(t). \tag{2.29}$$

ОДУ (2.4) будет иметь вид через I^n алгебры (2.20)

$$I^{-n} x(t) = \xi(t). \tag{2.30}$$

Подставим (2.29) в (2.30). Получим

$$I^{-n} I^\alpha \xi(t) = \xi(t). \tag{2.31}$$

Согласно (2.21) имеем

$$I^\gamma \xi(t) = \xi(t). \tag{2.32}$$

По определению $I^\gamma = 1$ равенство (2.32) выполняется тождественно. В итоге достаточно (2.9) и алгебраических свойств решений ОДУ (2.4, 2.7) для выполнения тождества

(2.32) при подстановке в (2.4) в операторном виде выражения (2.29) с помощью равенств (2.1, 2.2). Тогда алгебра сверточных операторов (2.15) совпадает с D'_+ [1]. Алгебра D'_+ одномерных ОФ $K_\alpha(t)$ справедлива для сингулярных $\delta(t)$ и для сходимости основной функции к $\delta(t)$ [1]. Сформулируем теорему.

Т е о р е м а 2.1. *Для вычисления интеграла Коши от $\xi(t) \in C^\infty$ с помощью оператора n-кратного интегрирования необходимо решение системы ОДУ n-порядка представить в виде свертки (2.9) и достаточно (2.9) представить интегральным оператором дробного порядка, ядро которого является параметрической ОФ из алгебры D'_+ с неустойчивым $t = 0$ и устойчивым $0 < t$ решением ОДУ (2.28).*

3. Регуляризация обобщенных функций в алгебре сверточных операторов

С л е д с т в и е 3.1. *Функция $x_\alpha(t) \in C^\infty(R^n)$ согласно* [1] *называется регуляризацией ОФ $K(s)$*

$$x_\alpha(t) = K * \xi = \langle K(s), \xi(t-s) \rangle, \tag{3.1}$$

где $\xi(t-s) \in D(R^n)$ – основная функция. Внешние угловые скобки означают линейный функционал в (3.1). Поскольку $\xi_\alpha(t) \to \delta(t)$ при $\alpha \to 0+$ в D', из непрерывности свертки $K * \xi_\alpha$ относительно ξ_α получаем $x_\alpha(t) \to K(t), \alpha \to 0+$ в D'. Очевидно, регуляризация ОФ $K(t)$ в $D'(R^1)$ есть сходимость параметрической функции $x_\alpha(t) \in C^\infty(R^1)$ к ОФ $K(t)$.

Согласно ТХС можно получить, дифференцируя $\xi_\alpha(t-s)$ в окрестности точки расходимости локально интегрируемой функции $K(t)$ (обрывая ряд Тейлора не аналитической $\xi_\alpha(t-s)$ в окрестности этой точки на линейном члене в силу сдвиговой симметрии $\xi_\alpha(t)$), равенство между функциями, осуществляющими регуляризацию ОФ

$$x_\alpha(t) = \delta(t) + \tilde{x}_\alpha(t). \tag{3.2}$$

Плотность вероятности в [3] *найдена в приближении слабовзаимодействующего бозе-газа из уравнения Шредингера в непрерывном спектре импульсов p*

$$x_\alpha(p) = \frac{\nu}{(2\pi\hbar)^3} \sum_{p \neq 0} \overline{b_p^* b_p}, \tag{3.3}$$

*где b_p^*, b_p – динамические операторы рождения и гибели p; ν, $\hbar$ – постоянные, знак * – комплексное сопряжение. Черта над правой частью (3.3) есть усреднение. Кроме того (3.3) представлено в виде:*

$$x_\alpha(p) = C\delta(p) + \frac{\nu}{(2\pi\hbar)^3} \tilde{x}_\alpha(p); \tilde{x}_\alpha(p) = \frac{\bar{n}_\alpha^p + |L_p|^2(\bar{n}_\alpha^{-p} + 1)}{1 - |L_p|^2}, \tag{3.4}$$

который совпадает с нормированным (3.2). Позже (3.4) опубликовано в работах [6] [8] *как регуляризация функции $x_\alpha(p)$. Равновесное среднее чисел заполнения в* [3]

$$\bar{n}_\alpha^p = \{\exp \frac{E(p) - (pu)}{\Theta} - 1\}^{-1} \tag{3.5}$$

формально при $p \to 0$ расходится, что соответствует неподвижному конденсату квазичастиц относительно движения бозе-газа с постоянной скорстью u. $\frac{\Theta}{C_{зв} - u} = \alpha, C_{зв}, C, \Theta$ – постоянные, L_p – функция от p, $E(p) = C_{зв} p$.

Следствие 3.2. *В [3] независимым аргументом выбран импульс p, что придает (2.28) смысл уравнения Ньютона (динамическая кинематика рождения-гибели $|p|$ при классических значениях λ)*

$$|\dot{p}| = \lambda|p| - |p|^2, \tag{3.6}$$

где $|p|$ – модуль импульса отражает симметрию потенциала взаимодействия частиц бозе-газа. Причем $p = 0$ это неустойчивый покой конденсата квазичастиц, относительно бозе-газа, движущегося с постоянной скоростью u; $\lambda < 0$ это преобладает устойчивая гибель квазичастиц в движущемся конденсате относительно бозе-газа с постоянной скоростью u.

Следствие 3.3. *Неустойчивость $\delta(t)$ при $\alpha \to 0$ и устойчивость параметрических ОФ $\delta(t-S)$ по (2.28) влечет устойчивость не особенных преобразований симметрии $x_\alpha(t)$ сдвига, вращения, подобия [1].*

Следствие 3.4. *Из [3] известна неустойчивость слабовозбужденных коллективных фононных состояний слабо неидеального Бозе-газа, выражаемая неравенством $\nu(p=0) < 0$, где $\nu(p=0) = \int \Phi(|q|)dq$ – амплитуда борновской вероятности парного соударения с потенциальной функцией $\Phi(|q|)$. Устойчивое состояние $\nu(p=0) > 0$ эквивалентно устойчивости газа при нулевой температуре [3]. Для p – независимого аргумента модели [3] получено уравнение (3.6), которое в квантовом приближении имеет устойчивое решение*

$$|p| = \frac{mqE}{\hbar}, \tag{3.7}$$

где q – координата и неустойчивое решение

$$|p| = 0. \tag{3.8}$$

При $E = C_{зв}|p|$ [3] имеем важнейший критерий квантовой теории – соотношение неопределенности

$$[qp_s] = \hbar, \tag{3.9}$$

где $p_s = mC_{зв}$. При $E = \frac{\nu(0)|p|^2}{2m}$ имеем

$$\nu(0) = \frac{2\hbar}{q|p|} \tag{3.10}$$

и

$$\nu(0) > 0 \text{ при } q > 0, \nu(0) < 0 \text{ при } q < 0, \tag{3.11}$$

соответствующие устойчивости и неустойчивости по Боголюбову.

Из $\bar{n}^p_\alpha > 0$ (3.5) следует

$$\frac{E(p)}{|p|} = |u| = C_{зв} > 0 \text{ при } |p| = 0. \tag{3.12}$$

Выражение (3.12) согласно (3.8) характеризует как неустойчивое движение газа со скоростью $|u| = C_{зв}$ дополнительно к (3.11).

По теореме ТХС [4] имеем плотность вероятности

$$|p|^{\frac{2\lambda}{\sigma^2}} e^{\frac{-2|p|}{\sigma^2}}, p \in [0, \infty). \tag{3.13}$$

Приравнивая (3.13) и экспоненциальный множитель (3.5), имеем

$$\frac{\sigma^2}{2} = \frac{T}{|u|}. \tag{3.14}$$

Источником белого шума согласно (3.14) является температура конденсата и скорость движения газа относительно конденсата $|u|$.

При $\frac{2\lambda}{\sigma^2} \to 0$ *имеем*

$$p_{1,2} = -\frac{T}{2C_{зв}} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{T}{C_{зв}})^2 + 4\frac{T}{C_{зв}}}, \tag{3.15}$$

при $\lambda = \sigma^2$

$$p = \frac{1}{1 - \frac{C_{зв}}{T}}, \tag{3.16}$$

при $\lambda = \frac{3}{2}\sigma^2$

$$p_{1,2} = \frac{C_{зв}}{2T} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{C_{зв}}{T})^2 + 4}. \tag{3.17}$$

Выражению (3.15) с отрицательной температурой конденсата отвечает инверсность заселения распада конденсата при $p = 0$.

Следствие 3.5. *Кинетика фемтотоков стимулированной электронной эмиссии (СЭЭ) окисленного катода рассматривалась в работе* [5] *с помощью ОДУ для* N *– концентрации электронов проводимости,* ν *– концентрация заполненных электронных ловушек в запрещенной зоне окисла*

$$\dot{N} = B\nu - A_1(\nu_1 - \nu)N - A_2N + f_1(t), \tag{3.18}$$

$$\dot{\nu} = -B\nu - A_1(\nu_1 - \nu))N - A_3N + f_2(t), \tag{3.19}$$

где

$$Y = Y_{CT} + Y_{CЭЭ}(t), Y_{CЭЭ}(t) = L(A_2N + A_3\nu), \tag{3.20}$$

$$A_3 = \frac{v_1}{a}D(E_1), \tag{3.21}$$

где $A_1, A_2, A_3, B, L, \nu_1$ *– постоянные,* $Y = Y_{CT}$ *– стационарная электронная эмиссия,* L *– толщина окисла,* v_1 *– скорость электрона,* a *– ширина ямы,* $D(E_1)$ *– коэффициент прозрачности в зависимости от приложенного электрического поля* E_1. *Преобразуем систему (3.18-3.19) с помощью (3.22, 3.23), получим уравнение (3.6) для* ν

$$f_1 = 0, \dot{N} = 0, A_2 >> A_1(\nu_1 - \nu), \tag{3.22}$$

$$\lambda_0 = \nu_1 - A_2/A_1(A_3/B + 1), d\tilde{t} = \frac{A_1B}{A_2}dt, \tag{3.23}$$

где ν_1 *– концентрация заполненных и пустых ловушек,* $\frac{A_2}{A_1}$ *– вероятность ухода электронов из зоны проводимости,* $\frac{A_3}{B}$ *– вероятность ухода электронов с ловушек,* $A_1 B$ *– совместная вероятность рождения-гибели ловушек. Если поток дивакансий из металла в окисел положить* $f_2 = \sigma \xi_t \nu$ *, то имеем условие аддитивности белого шума к среднему* λ_0

$$\nu_1 - \frac{A_2}{A_1}(\frac{A_3}{B} + 1) + \sigma \xi_t. \tag{3.24}$$

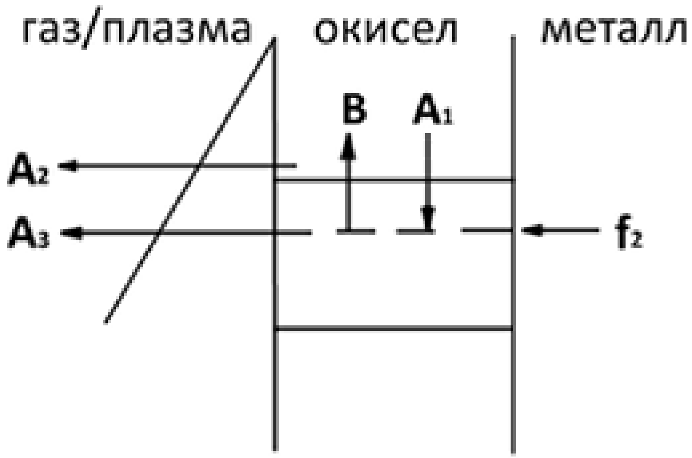

Рисунок **3.1**

Энергетическая диаграмма переходов электронов A_1, A_2, A_3, B *в зависимости от координаты с электронными ловушками в запрещенной зоне окисла.* f_2 *- поток вакансионных дефектов из металла.*

Переходы стационарного электронного спектра окисла изображены на рис. 3.1. При $A_2 = A_1$ *,* $A_3 = B, \lambda_0 = 0$ *обнаруживается более слабое неравенство* $A_2 > A_1(\nu_1 - \nu)$ *. Неравенство* $E_1 >> E$ *позволяет отказаться в (3.6) и (3.18, 3.19) от градиентных членов для потенциала при* $E = \frac{A_2}{A_1}(\frac{A_3}{B} + 1)/\epsilon S$ *, где* S *– площадь электрода,* ϵ *– диэлектрическая проницаемость окисла (* $E \approx 10^3$ *В/см).*

В экспериментах на разрядниках [5] была установлена связь между $Y_{СЭЭ}$ *и средним статистическим временем запаздывания пробоя* $\bar{t}_{СВЗ}$ *при приложении ступени напряжения.*

$$Y_{СЭЭ} = \frac{2e}{\bar{t}_{СВЗ}}, \tag{3.25}$$

где e *– заряд электрона. Приравняем (3.25) и (3.20) для* $Y_{СЭЭ} = LA_3\nu$ *, получим* $\nu = \frac{2e}{\bar{t}_{СВЗ} L} A_3^{-1}$ *. Экспериментально установлена плотность вероятности* $t_{СВЗ}$ *, имеющая вид [5]*

$$A_3^{-1} = t_{СВЗ}^{\frac{2\lambda}{\sigma^2} - 1} e^{\frac{-2t_{СВЗ}}{\sigma^2}}. \tag{3.26}$$

Плотность вероятности (3.26) по ТХС соответствует (2.28) и экспериментально подтверждает уравнение. В квантовой интерпретации (3.26) имеет вид

$$A_3^{-1} = (\frac{\hbar}{E})^{\frac{2\lambda}{\sigma^2} - 1} e^{\frac{-2\hbar}{E\sigma^2}}, \tag{3.27}$$

где E – энергия электронной ловушки. Таким образом, (3.27) описывает электронный спектр ловушек в запрещенной зоне окисла. Пример такого спектра имеется в работе по люменисценции полупроводников с неосновными носителями [7]. *Уравнение (3.6) для* ν *, получено в модели фемтотоков СЭЭ с окисленного катода и подтверждено экспериментальными фактами.*

Список литературы

1. В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, М. Наука, 1981, 512 с.
2. Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов, *Введение в теорию обобщенных функций*, Лекц. курсы НОЦ, **5**, МИАН, М., 2006, 164 с.
3. Н. Н. Боголюбов, “К теории сверхтекучести”, *Известия АН СССР серия физическая*, **11**:1 (1947), 77-90.
4. С. Н. Нагорных, “Критические параметры плотности вероятности в индуцированных шумом переходах”, *Журн. СВМО.*, **16**:4 (2014), 50-52.
5. S. N. Nagornykch, “On exoelectron emission kinetics under strain excitation of metals”, *Proc. 4 Intern. Symp. Exoelectron Emission Dosimetry. Czech. Acad. Sci.@Atom Energy Com., Liblice*, 1973, 178-193.
6. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика. Часть 2. Теория конденсированного состояния*, М. Наука, 1978, 448 с.
7. А. П. Леванюк, В. В. Осипов, “Краевая люминесценция прямозонных полупроводников”, *Успехи физических наук*, **133**:3 (1981).
8. И М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними. Выпуск 1*, М. ФИЗМАТ ГИЗ, 1959, 472 с.

Поступила 15.09.2017

MSC2010 44F10

Regularization of generalized functions in convolution operator algebra.

© S. N. Nagornykh [3], D. S. Sablukov[4]

Abstract. A problem of Cauchy integral calculation with the aid of n-fold multiple integral by integer-order operators is investigated. This n-fold multiple differentiation results in n-order uniform and non-uniform systems of ordinary differential equations. The solution of the first system is equal to the convolution of the second system's solution with arbitrary function forming heterogeneity of the first system. This is the necessary condition of existence of the given problem's solution. The convolution is a sufficient condition for establishing of the fraction order operator algebra that is equivalent to convolution operator algebra. Besides that, existence of the ordinary differential equation defining stability of time, is important, too. Subalgebra of fractional order less than 1 defines convolution operators as parametric generalized functions, their asymptotic values and unity operators. Both algebras determine identity of ordinary differential equations after substituting n-fold multiple operator integral in these equations. Vladimirov's regularization according to Horsthemke-Saichev theorem corresponds to Bogolubov's regularization for superfluidity. Time stability of superfluidity is described by the Newton equation. Parametric generalized functions and their symmetry are stable.

Key Words: generalized functions, regularization, convolution operator algebra, Cauchy integral.

References

1. Vladimirov V. S., *Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of mathematical hysics]*, Nauka Publ, Moscow, 1981 (In Russ.), 512 p.

2. Yu. N. Drozhzhinov, B. I. Zav'yalov, *Vvedenie v teoriyu obobshchennykh funktsiy [Introduction to the theory of generalized functions.]*, Lektsionnye kursy NOTs, **5**, MIAN, Moscow, 2006 (In Russ.), 164 p.

3. Bogolubov N. N., "K teorii sverkhtekuchesti [On the Theory of Superfluidity]", *Izvestiya AN SSSR seriya fizicheskaya*, **11**:1 (1947), 77-90 (In Russ.).

4. Nagornykh S. N., "Kriticheskie parametry plotnosti veroyatnosti v indutsirovannykh shumom perekhodakh [Critical Parameters of Probability Density in Noise-Induced Transitions]", *Jour. SVMO*, **16**:4 (2014), 50-52 (In Russ.).

5. Nagornykch S. N., "On exoelectron emission kinetics under strain excitation of metals", *Proc. 4 Intern. Symp. Exoelectron Emission Dosimetry. Czech. Acad. Sci.@Atom Energy Com., Liblice*, 1973, 178-193.

6. Lifshic, E. M., Pitaevsky, L. P., *Statisticheskaya fizika. Chast 2. Teoriya kondensirovannogo sostoyaniya*, M. Nauka, 1978 (In Russ.), 448 p.

[3] **Sergey N. Nagornykh**, Associate Professor of the applied mathematics chair, Nizhniy Novgorod State Technical University after R. E. Alekseev (24 Minina Str., Nizhny Novgorod 603950, Russia), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5552-8521, algoritm@sandy.ru

[4] **Denis S. Sablukov**, Bachelor, Nizhniy Novgorod State Technical University after R. E. Alekseev (24 Minina Str., Nizhny Novgorod 603950, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-7771-8924, denis-sablukov@mail.ru

7. A. P. Levanyuk, V. V. Osipov, "Kraevaya lyuminiscenciya pryamozonnykh poluprovodnikov[Edge luminescence of direct-gap semiconductors]", *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*, **133**:3 (1981) (In Russ.).

8. Gelfand, I.M., Shilov, G. E., *Obobschennye funkcii i deystviya nad nimi*, M. FIZMAT GIZ, 1959 (In Russ.), 472 p.

Submitted 15.09.2017