



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Баскаков, Асимптотические оценки элементов матриц обратных операторов и гармонический анализ,  
*Сиб. матем. журн.*, 1997, том 38, номер 1, 14–28

<https://www.mathnet.ru/smj418>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.82

29 апреля 2025 г., 07:33:28



## АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦ ОБРАТНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ\*)

А. Г. Баскаков

Пусть  $G$  — счетная дискретная абелева группа (с аддитивной формой записи групповой операции),  $S$  — подмножество из  $G$ ,  $X$  — комплексное банахово пространство и  $\text{End } X$  — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в  $X$ . Всюду считается, что имеется разложение единицы  $P : S \rightarrow \text{End } X$ , т. е.  $P$  — проекторнозначная функция, обладающая свойствами:  $P(i)P(j) = 0 \ \forall i \neq j$  и для любого вектора  $x \in X$  ряд  $\sum_{i \in S} P(i)x$  безусловно сходится к  $x$ . Тем самым конечна величина

$$C(P) = \sup_{\alpha_k \in \mathbb{C}, |\alpha_k|=1} \left\| \sum_{k \in S} \alpha_k P(k) \right\| \geq 1, \quad (1)$$

где  $\mathbb{C}$  — поле комплексных чисел.

Далее считается выполненным (см. замечание 1, § 3)

**Предположение 1.** Существует такая постоянная  $M(P) > 0$ , что для любых  $k \in G$ ,  $n \in \mathbb{N}$  ( $\mathbb{N}$  — множество натуральных чисел) и  $A \in \text{End } X$  имеет место оценка

$$\left\| \sum_{i=1}^n P(i+k)AP(i) \right\| \leq M(P) \max_{1 \leq i \leq n} \|P(i+k)AP(i)\|,$$

где  $P(i+k) = 0$ , если  $i+k \notin S$ .

Условия предположения 1 имеют место, например, в случае, если  $X$  — гильбертово пространство (или  $X = l_p(S, Y)$ ; см. § 2).

Любому оператору  $A \in \text{End } X$  поставим в соответствие матрицу  $(A_{ij})$  ( $i, j \in S$ ), составленную из операторных блоков  $A_{ij} = P(i)AP(j) \in \text{End } X$ . Семейство операторов  $\{A_{ij}; i-j = k\}$ , где  $k \in G$ , назовем  $k$ -й диагональю матрицы оператора  $A$ .

Для каждого оператора  $A \in \text{End } X$  определим функцию  $d_A : G \rightarrow \mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R}; t \geq 0\}$  ( $\mathbb{R}$  — множество вещественных чисел), положив

$$d_A(g) = \sup_{i, j \in S, i-j=g} \|A_{ij}\|, \quad g \in G,$$

где  $d_A(g) = 0$ , если элемент  $g$  группы  $G$  не представим в виде  $g = i - j$  для  $i, j \in S$ . Функция  $d_A$  является важной характеристикой убывания элементов (лежащих вне главной диагонали) матрицы оператора  $A$ .

\*) Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда (гранты NZA 000 и NZA 300) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-00032а).

Пусть  $A$  — непрерывно обратимый оператор из алгебры  $\text{End } X$  и  $B = A^{-1}$  — обратный оператор. В данной статье сформулировано несколько условий на убывание функции  $d_A$  (носящих асимптотический характер) и получены теоремы (теоремы 2–4) о сохранении этих условий для функции  $d_B$ . Их доказательство существенно использует результаты Аллана [1] и теорему Бохнера — Филлипса [2], являющиеся обобщением на векторные функции известной теоремы Н. Винера [3] об абсолютно сходящихся рядах Фурье. Отметим, что оценки элементов матриц обратных операторов были получены в статьях С. Демко, В. Мосса, П. Смита [4] (для конечнодиагональных матриц операторов, действующих в  $l_2$ ), М. А. Шубина [5] (для операторов в пространстве  $l_p(\Omega)$ , где  $\Omega$  — счетное дискретное метрическое пространство), В. Г. Курбатова [6] (для разностных и интегральных операторов), И. А. Блатова [7] и автора [8]. В § 3 получены приложения к теории функций (теорема 5) и к асимптотическим оценкам спектральных разложений и коэффициентов Фурье собственных векторов линейных операторов (теорема 6).

### § 1. Ряды Фурье линейных операторов

Приводимые здесь понятия и результаты носят вспомогательный характер.

Введем в рассмотрение два класса функций, определенных на группе  $G$ , с помощью которых вводятся исследуемые здесь классы линейных операторов.

Пусть  $\alpha : G \rightarrow \mathbb{R}_+$  — субэкспоненциальный вес, т. е.  $\alpha$  — функция, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1)  $\alpha(g) \geq 1$ ;
- 2)  $\alpha(g_1 + g_2) \leq \alpha(g_1)\alpha(g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G$ ;
- 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln \alpha(gn) = 0 \quad \forall g \in G$ .

Пусть  $\mathcal{F}$  — банахова алгебра с единицей  $e$ . Символом  $L_\alpha(G, \mathcal{F})$  обозначим банахову алгебру функций, определенных на группе  $G$ , принимающих значения в алгебре  $\mathcal{F}$  со сверткой в качестве умножения и суммируемых (относительно меры Хаара на  $G$ ) с весом  $\alpha$ . При этом положим

$$\|f\|_\alpha = \sum_{g \in G} \|f(g)\| \alpha(g), \quad f \in L_\alpha(G, \mathcal{F}).$$

Далее используем обозначение  $L_\alpha(G)$  для банаховой алгебры  $L_\alpha(G, \mathbb{C})$ , причем  $L_1(G) = L_\alpha(G)$ , если  $\alpha \equiv 1$ .

Рассмотрим положительную функцию  $\beta : G \rightarrow \mathbb{R}_+$ , удовлетворяющую условиям:

- 1)  $\sum_{g \in G} \beta(g) < \infty$ ;
- 2)  $\sum_{s \in G} \beta(g - s)\beta(s) \leq L\beta(g) \quad \forall g \in G$  для некоторого  $L > 0$ ;
- 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln 1/\beta(ng) = 0 \quad \forall g \in G$ .

Таковыми свойствами обладает функция  $\beta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ , определенная формулой

$$\beta(k) = (1 + \|k\|)^{-\kappa},$$

где  $\|k\| = \max_{1 \leq i \leq n} |k_i|$  для  $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n = G$  и  $\kappa > n$ .

Символом  $M_\beta(G, \mathcal{F})$  обозначим банахову алгебру функций, определенных на группе  $G$ , принимающих значения в алгебре  $\mathcal{F}$  со сверткой функций в качестве умножения и удовлетворяющих условию

$\lim_{g \rightarrow \infty} \varphi(g)/\beta(g) = 0$  (т. е. для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такое конечное множество  $K_\varepsilon \subset G$ , что  $\|\varphi(g)\|_{\mathcal{F}}/\beta(g) < \varepsilon \forall g \in G \setminus K_\varepsilon$ ). Положим  $\|\varphi\|_\beta = \sup_{g \in G} \|\varphi(g)\|_{\mathcal{F}}/\beta(g)$  и  $M_\beta(G) = M_\beta(G, \mathbb{C})$ .

Сформулированные выше условия на функции  $\alpha$  и  $\beta$  обеспечивают полупростоту коммутативных банаховых алгебр  $L_\alpha(G)$  и  $M_\beta(G)$  (см. [9–11]). Спектры этих алгебр (т. е. компактные пространства ненулевых комплексных гомоморфизмов или пространства максимальных идеалов) естественным образом отождествляются с компактной группой  $\hat{G}$  унитарных характеров группы  $G$  (см. [9–11]). Для каждой функции  $f$ , принадлежащей одной из банаховых алгебр  $L_\alpha(G, \mathcal{F})$  и  $M_\alpha(G, \mathcal{F})$ , через  $\hat{f}$  обозначим преобразование Фурье функции  $f$ , т. е.  $\hat{f} : \hat{G} \rightarrow \mathcal{F}$  — функция, определенная формулой

$$\hat{f}(\gamma) = \sum_{g \in G} f(g)\gamma(-g), \quad \gamma \in \hat{G}.$$

Введем в рассмотрение три класса линейных операторов из алгебры  $\text{End } X$  с помощью представления  $T : \hat{G} \rightarrow \text{End } X$ , определенного формулой

$$T(\gamma)x = \sum_{g \in S} P(g)x\gamma(g), \quad x \in X, \gamma \in \hat{G}.$$

Поскольку из формулы (1) следует, что  $\|T(\gamma)\| \leq C(P) \forall \gamma \in \hat{G}$ , то  $T$  — ограниченное сильно непрерывное представление компактной группы  $\hat{G}$ .

Каждому оператору  $A \in \text{End } X$  поставим в соответствие функцию  $\hat{A} : \hat{G} \rightarrow \text{End } X$ , имеющую вид

$$\hat{A}(\gamma) = T(\gamma)AT(-\gamma), \quad \gamma \in \hat{G}.$$

Пусть

$$\hat{A}(\gamma)x \sim \sum_{k \in G} A_k x \gamma(k), \quad x \in X, \quad (2)$$

— ряд Фурье функции  $\hat{A}$ , где коэффициенты Фурье  $A_k \in \text{End } X$  имеют вид

$$A_k = \int_{\hat{G}} \hat{A}(\gamma)\gamma(-k)\mu(d\gamma) \quad (3)$$

и  $\mu$  — мера Хаара на компактной группе  $\hat{G}$ , причем  $\mu(\hat{G}) = 1$ .

Ряд  $\sum_{k \in G} A_k$  назовем *рядом Фурье оператора  $A$* , а операторы  $A_k$  ( $k \in G$ ) — *коэффициентами Фурье оператора  $A$* .

**Лемма 1.** *Каждый коэффициент Фурье  $A_k$  ( $k \in G$ ) оператора  $A$  допускает представление в виде сильно и безусловно сходящегося ряда вида*

$$A_k = \sum_{i+j=k, i, j \in S} P(i)AP(j), \quad (4)$$

причем существуют такие положительные постоянные  $M_1(P)$ ,  $M_2(P)$ , что

$$M_1(P)d_A(k) \leq \|A_k\| \leq M_2(P)d_A(k) \quad \forall k \in G. \quad (5)$$

**Доказательство.** Непосредственно из формулы (3) для любых  $i, j \in S, k \in G$  получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned} P(i)A_k P(j)x &= \int_{\widehat{G}} P(i)\widehat{A}(\gamma)P(j)\gamma(-k)x\mu(d\gamma) \\ &= \int_{\widehat{G}} P(i)T(\gamma)AT(-\gamma)P(j)x\gamma(-k)\mu(d\gamma) = \int_{\widehat{G}} A_{ij}x\gamma(i-j)\gamma(-k)\mu(d\gamma) \\ &= \left( \int_{\widehat{G}} \gamma(i-j-k)\mu(d\gamma) \right) A_{ij}x = \delta_{i-j,k}A_{ij}x, \quad x \in X, \end{aligned}$$

где  $\delta_{i-j,k}$  — символ Кронекера.

Пусть  $S = \{g_1, g_2, \dots\}$  и  $Q_n = P(g_1) + \dots + P(g_n), n \geq 1$ , — последовательность проекторов, сильно сходящаяся к тождественному оператору  $I$ . Тогда из полученных равенств следует, что

$$A_k x = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n A_k x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i \leq n, g_i - s_i = k, s_i \in S} P(g_i)AP(s_i)x, \quad x \in X,$$

т. е. верна формула (4), в которой ряд является сильно сходящимся.

Оценки (5) непосредственно следуют из равенства (4) и предположения 1. Лемма доказана.

**Следствие.** Все диагонали матрицы оператора  $A_k (k \in G)$  нулевые, кроме  $k$ -й, которая совпадает с  $k$ -й диагональю матрицы оператора  $A$ .

В дальнейшем рассматриваются операторы из алгебры  $\text{End } X$ , для которых считается выполненным

**Предположение 2.** Для матрицы оператора  $A \in \text{End } X$  выполнено одно из следующих условий:

- 1)  $\sum_{k \in G} d_A(k)\alpha(k) < \infty$ ;
- 2)  $\lim_{k \rightarrow \infty} d_A(k)/\beta(k) = 0$ ;
- 3)  $G = \mathbb{Z}^n$  и существуют постоянные  $M = M(A) > 0, \gamma = \gamma(A) \in (0, 1)$  такие, что

$$d_A(k) \leq M\gamma^{\|k\|} \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n, \quad \|k\| = \max_{1 \leq i \leq n} |k_i|, \quad k = (k_1, \dots, k_n).$$

Совокупности линейных операторов из алгебры  $\text{End } X$ , удовлетворяющих предположению 2, обозначим через  $\text{End}_\alpha X$  (если выполнено условие 1),  $\text{End}_\beta X$  (если выполнено условие 2) и  $\text{End}_\gamma X$  (если выполнено условие 3, при этом постоянные  $M$  и  $\gamma$  свои для каждого оператора  $A \in \text{End } X$ ). Все они являются линейными подпространствами из  $\text{End } X$ , причем подпространства  $\text{End}_\alpha X$  и  $\text{End}_\beta X$  являются банаховыми пространствами относительно следующих норм:

$$\begin{aligned} \|A\|_\alpha &= \sum_{k \in G} d_A(k)\alpha(k), \quad A \in \text{End}_\alpha X, \\ \|A\|_\beta &= \sup_{k \in G} d_A(k)/\beta(k), \quad A \in \text{End}_\beta X. \end{aligned}$$

Непосредственно из свойств функций  $\alpha, \beta$  и леммы 1 следует, что ряды Фурье для операторов из выделенных классов абсолютно сходятся, т. е. принадлежат подпространству  $\text{End}_1 X = \text{End}_\alpha X$ , где  $\alpha \equiv 1$ .

**Лемма 2.** Классы операторов  $\text{End}_\alpha X$ ,  $\text{End}_\beta X$  и  $\text{End}_* X$  являются подалгебрами банаховой алгебры  $\text{End} X$ , причем для любой пары операторов  $A, B$ , принадлежащих одному классу, оператор  $C = AB$  имеет ряд Фурье вида

$$C = \sum_{k \in G} C_k, \quad C_k = \sum_{i+j=k} A_i B_j, \quad k \in G, \quad (6)$$

где ряд, определяющий коэффициент Фурье  $C_k$  оператора  $C$ , абсолютно сходится.

**Доказательство.** Ряд Фурье оператора  $C$  определяется с помощью функции  $\hat{C}(\gamma) = T(\gamma)CT(-\gamma)$ ,  $\gamma \in \hat{G}$ , которая является произведением функций  $\hat{A}, \hat{B} : \hat{G} \rightarrow \text{End} X$ , имеющих абсолютно сходящиеся ряды Фурье. Следовательно, равенства (6) непосредственно следуют из теоремы об умножении рядов Фурье почти периодических функций.

Имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|C\|_\alpha &= \sum_{k \in G} \|C_k\|_\alpha(k) \leq \sum_{k \in G} \left( \sum_{i+j=k} \|A_i\| \|B_j\| \right) \alpha(k) \\ &= \sum_{k \in G} \left( \sum_{i+j=k} \frac{\|A_i\| \alpha(i) \|B_j\| \alpha(j)}{\alpha(i) \alpha(j)} \right) \alpha(k) \leq \|A\|_\alpha \|B\|_\alpha, \quad A, B \in \text{End}_\alpha X, \end{aligned}$$

$$\|C\|_\beta = \sup_{k \in G} \frac{\|C_k\|}{\beta(k)} \leq \sup_{k \in G} \sum_{i+j=k} \frac{\|A_i\| \beta(i) \|B_j\| \beta(j)}{\beta(i) \beta(j)} \leq L \|A\|_\beta \|B\|_\beta,$$

$$A, B \in \text{End}_\beta X,$$

где  $L > 0$  — постоянная из свойства 2 функции  $\beta$ .

Если  $A, B \in \text{End}_* X$  и  $\|A_k\| \leq M_1 \gamma_1^{\|k\|}$ ,  $\|B_k\| \leq M_2 \gamma_2^{\|k\|}$ ,  $k \in \mathbb{Z}^n$ , где  $M_1, M_2 > 0$ ,  $\gamma_1, \gamma_2 \in (0, 1)$ , то непосредственно из (6) следует, что

$$\|C_k\| \leq M_1 M_2 \sum_{i+j=k} \gamma_1^{\|i\|} \gamma_2^{\|j\|}$$

и для любого числа  $\gamma \in (\max\{\gamma_1, \gamma_2\}, 1)$  существует такое число  $M > 0$ , что  $\|C_k\| \leq M \gamma^{\|k\|} \forall k \in \mathbb{Z}^n$ , т. е.  $C = AB \in \text{End}_* X$ . Лемма доказана.

**Следствие.** Имеют место следующие свойства:

- 1)  $\|AB\|_\alpha \leq \|A\|_\alpha \|B\|_\alpha \forall A, B \in \text{End}_\alpha X$ ;
- 2)  $\|AB\|_\beta \leq \|A\|_\beta \|B\|_\beta \forall A, B \in \text{End}_\beta X$ .

Таким образом,  $\text{End}_\alpha X$  и  $\text{End}_\beta X$  являются банаховыми алгебрами (относительно введенных в них норм).

## § 2. Асимптотические оценки элементов матриц обратных операторов

Нам удобно сформулировать некоторые понятия и результаты из статей [1, 2], используемые в дальнейшем.

Пусть банахова алгебра  $\mathscr{B}$  с единицей обладает следующими свойствами:

1) существуют (замкнутые) коммутативная подалгебра  $\mathscr{A}$  (с единицей) и подалгебра  $\mathscr{F}$  из центра  $Z(\mathscr{B})$  алгебры  $\mathscr{B}$  такие, что векторы вида

$$(a, f) = \sum_{i=1}^n a_i f_i, \quad a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathscr{A}^n, \quad f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathscr{F}^n,$$

плотны в  $\mathcal{B}$ ;

$$2) \|a_0 f_0\| = \|a_0\| \|f_0\| \text{ для любых } a_0 \in \mathcal{A}, f \in \mathcal{F};$$

3)  $\left\| \sum_{i=1}^n \chi(a_i) f_i \right\| \leq \|(a, f)\|$  для любых  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{A}^n$ ,  $f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{F}^n$  и для любого комплексного гомоморфизма  $\chi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  из спектра  $\text{Sp } \mathcal{A}$  банаховой алгебры  $\mathcal{A}$ .

Гомоморфизм алгебр  $\bar{\chi} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{F}$  называется *обобщенным гомоморфизмом* алгебры  $\mathcal{B}$ , если существует гомоморфизм  $\chi \in \text{Sp } \mathcal{A}$  такой, что  $\bar{\chi}(af) = \chi(a)f \forall a \in \mathcal{A} \forall f \in \mathcal{F}$ . Совокупность всех обобщенных характеров алгебры  $\mathcal{B}$  обозначим символом  $\text{Sp}(\mathcal{B}, \mathcal{F})$ .

Перечисленным условиям 1-3 удовлетворяет банахова алгебра  $\mathcal{B}$ , совпадающая с одной из банаховых алгебр  $L_\alpha(G, \mathcal{F})$ ,  $M_\beta(G, \mathcal{F})$ , где  $\mathcal{F}$  — некоторая банахова алгебра с единицей  $e$ . Роль алгебры  $\mathcal{A}$  будут играть соответственно алгебры  $L_\alpha(G)$  и  $M_\beta(G)$ , отождествленные с функциями вида  $fe$ ,  $f \in \mathcal{B}_0$ , где  $\mathcal{B}_0$  — одна из алгебр  $L_\alpha(G)$ ,  $M_\beta(G)$ . Банахову алгебру  $\mathcal{F}$  можно рассматривать как подалгебру в  $\mathcal{B}$ , если каждому элементу  $f \in \mathcal{F}$  поставить в соответствие функцию  $f\delta_0$ , где  $\delta_0$  — единица алгебры  $\mathcal{B}_0$ . Каждый обобщенный характер алгебры  $\mathcal{B}$  определяется преобразованием Фурье (функций из  $\mathcal{B}$ ) в некоторой точке из  $\hat{G}$ .

В следующей теореме, доказательство которой можно найти [1, 2], рассматривается банахова алгебра  $\mathcal{B}$ , удовлетворяющая условиям 1-3.

**Теорема 1.** *Для того чтобы элемент  $b$  из алгебры  $\mathcal{B}$  имел левый (правый) обратный, необходимо и достаточно, чтобы для каждого обобщенного характера  $\bar{\chi} \in \text{Sp}(\mathcal{B}, \mathcal{F})$  элемент  $\bar{\chi}(b) \in \mathcal{F}$  имел левый (правый) обратный в  $\mathcal{F}$ .*

Для нас важно

**Следствие.** Пусть  $\mathcal{B}$  — одна из банаховых алгебр  $L_\alpha(G, \mathcal{F})$ ,  $M_\beta(G, \mathcal{F})$ . Для обратимости элемента  $f \in \mathcal{B}$  необходимо и достаточно, чтобы все элементы из  $\mathcal{F}$  вида

$$\hat{f}(\gamma) = \sum_{g \in G} f(g)\gamma(-g), \quad \gamma \in \hat{G},$$

были обратимы в алгебре  $\mathcal{F}$ .

Поскольку основные результаты статьи получены с использованием теоремы 1, для замкнутости изложения приведем ее доказательство. При этом используются следующие два вспомогательных результата (см. леммы 10 и 11 из [2]). При их формулировке применяется гомоморфизм  $T_{\mathcal{I}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}/\mathcal{I}$  банаховых алгебр, построенный по произвольному левому идеалу  $\mathcal{I}$  из алгебры  $\mathcal{B}$ , причем операторы представления  $T_{\mathcal{I}}(a)$ ,  $a \in \mathcal{B}$ , имеют вид

$$T_{\mathcal{I}}(a)\tilde{x} = \tilde{a}\tilde{x} = ax + \mathcal{I}, \quad \tilde{x} = x + \mathcal{I} \in \mathcal{B}/\mathcal{I}, \quad x \in \mathcal{B}.$$

**Лемма 1'.** Пусть  $\mathcal{I}$  — левый максимальный идеал из алгебры  $\mathcal{B}$ . Тогда алгебра  $V = T_{\mathcal{I}}(\mathcal{B}) = \{T_{\mathcal{I}}(a), a \in \mathcal{B}\}$  операторов из  $\text{End}(\mathcal{B}/\mathcal{I})$  неприводима.

**Доказательство.** Пусть  $\tilde{a} \neq 0$  ( $a \in \mathcal{B}$ ) — произвольный фиксированный элемент из фактор-пространства  $\mathcal{X} = \mathcal{B}/\mathcal{I}$ . Рассмотрим линейное пространство  $\mathcal{X}_0$  векторов из  $\mathcal{X}$  вида

$$\mathcal{X}_0 = V\tilde{a} = \{T_{\mathcal{I}}(b)\tilde{a}, a \in \mathcal{B}\}.$$

Поскольку алгебра  $\mathcal{B}$  содержит единицу, то  $\mathcal{X}_0$  содержит  $\tilde{a} \neq 0$ , т. е.  $\mathcal{X} \neq \{0\}$ . Множество элементов  $\mathcal{I}_1 = \{b \in \mathcal{B} : \tilde{b} \in \mathcal{X}_0\}$  является левым идеалом, содержащим максимальный левый идеал  $\mathcal{I}$ . Поэтому  $\mathcal{I}_1 = \mathcal{B}$ . Таким образом,  $\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}$ . Лемма доказана.

**Лемма 2'.** Если для фиксированного элемента  $a$  из алгебры  $\mathcal{B}$  и каждого левого максимального идеала  $\mathcal{I}$  оператор  $T_{\mathcal{I}}(a) \in \text{End}(\mathcal{B}/\mathcal{I})$  имеет левый обратный в алгебре  $\text{End}(\mathcal{B}/\mathcal{I})$ , то элемент  $a$  имеет левый обратный в алгебре  $\mathcal{B}$ .

**Доказательство.** Если элемент  $a$  не обратим слева, то он содержится в некотором максимальном левом идеале [10, гл. II, п. 4], и поэтому  $T_{\mathcal{I}}(a)$  — нулевой оператор. Лемма доказана.

**Доказательство теоремы 4.** Пусть  $\mathcal{I}$  — произвольный левый максимальный идеал алгебры  $\mathcal{B}$ . Тогда  $T_{\mathcal{I}} : \mathcal{B} \rightarrow \text{End}(\mathcal{B}/\mathcal{I})$  — гомоморфизм банаховых алгебр. Поскольку подалгебра  $\mathcal{A}$  принадлежит центру  $Z(\mathcal{B})$  алгебры  $\mathcal{B}$ , то операторы  $T_{\mathcal{I}}(a) \in \text{End}(\mathcal{B}/\mathcal{I})$ ,  $a \in \mathcal{A}$ , коммутируют со всеми операторами  $T_{\mathcal{I}}(b)$ ,  $b \in \mathcal{B}$ . Из леммы 1' следует, что все они скалярные, поэтому существует такой комплексный гомоморфизм  $\chi \in \text{Sp } \mathcal{A}$ , что имеют место равенства

$$T_{\mathcal{I}}(a_0) = \chi(a_0)\tilde{e}, \quad a_0 \in \mathcal{A},$$

где  $\tilde{e}$  — единица алгебры  $\text{End}(\mathcal{B}/\mathcal{I})$ . Тогда для любого элемента  $(a, f) \in \mathcal{B}$  вида  $a_1 f_1 + \dots + a_n f_n$ , где  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{A}^n$ ,  $f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{F}^n$ , получаем

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{I}}((a, f)) &= \sum_{i=1}^n T_{\mathcal{I}}(a_i)T_{\mathcal{I}}(f_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \chi(a_i)T_{\mathcal{I}}(f_i) = T_{\mathcal{I}}\left(\sum_{i=1}^n \chi(a_i)f_i\right) = T_{\mathcal{I}}(\bar{\chi}((a, f))). \end{aligned}$$

Таким образом,  $T_{\mathcal{I}}((a, f)) = T_{\mathcal{I}}(\bar{\chi}((a, f)))$  для обобщенного гомоморфизма  $\bar{\chi} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{F}$ , и это соотношение распространяется на все векторы из  $\mathcal{B}$ , т. е.  $T_{\mathcal{I}}(c) = T_{\mathcal{I}}(\bar{\chi}(c)) \quad \forall c \in \mathcal{B}$ . Из этих равенств и леммы 2' получаем, что элемент  $b$  обратим слева тогда и только тогда, когда обратимы слева все элементы  $\bar{\chi}(b)$ ,  $\bar{\chi} \in \text{Sp}(\mathcal{A}, \mathcal{F})$ . Теорема доказана.

Отметим, что в статье [2] получен аналог теоремы 1 для банаховых алгебр векторных функций, а в статье [1] приводятся более общие результаты.

**Теорема 2.** Пусть  $A \in \text{End } X$  — обратимый оператор, удовлетворяющий одному из условий 1–3 предположения 2. Тогда матрица обратного оператора  $B = A^{-1} \in \text{End } X$  удовлетворяет соответствующим условиям:

- 1')  $\sum d_B(k)\alpha(k) < \infty$ ;
- 2')  $\lim_{k \rightarrow \infty} d_A(k)/\beta(k) = 0$ ;
- 3')  $G = \mathbb{Z}^n$  и существуют постоянные  $M_0 > 0$ ,  $\gamma_0 \in (0, 1)$  такие, что  $d_A(k) \leq M_0 \gamma_0^{\|k\|} \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n$ .

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{F} = \text{End } X$  и символ  $\mathcal{B}$  обозначает одну из банаховых алгебр  $L_\alpha(G, \mathcal{F})$ ,  $M_\beta(G, \mathcal{F})$ . Рассмотрим функцию  $f : G \rightarrow \mathcal{F}$ , определенную равенствами  $f(k) = A_k$ ,  $k \in G$ , где  $A_k$ ,  $k \in G$ , — коэффициенты Фурье оператора  $A$ . При выполнении условия 1 предположения 2 функция  $f$  принадлежит алгебре  $L_\alpha(G, \mathcal{F})$ , а если выполнено условие 2, то она является элементом алгебры  $M_\beta(G, \mathcal{F})$ . Таким образом,  $f \in \mathcal{B}$ . Непосредственно из формул (2) и (3) следует, что функция  $\hat{A}_1 : \hat{G} \rightarrow \mathcal{F}$ , определенная равенствами  $\hat{A}_1(\gamma) = \hat{A}(-\gamma)$ ,  $\gamma \in \hat{G}$ , является преобразованием Фурье функции  $f : G \rightarrow \mathcal{F}$ . Поскольку  $\hat{A}_1(\gamma) = T(-\gamma)AT(\gamma)$ ,  $\gamma \in \hat{G}$ , —



обратимые операторы, непосредственно из следствия теоремы 1 получаем, что  $f$  — обратимый элемент алгебры  $\mathcal{B}$ . Так как

$$\widehat{f^{-1}}(\gamma) = \widehat{A}(-\gamma)^{-1} = T(-\gamma)BT(\gamma), \quad \gamma \in \widehat{G}, \quad B = A^{-1},$$

то имеет место представление

$$\widehat{B}(\gamma) = T(\gamma)BT(-\gamma) = \sum_{k \in G} B_k \gamma(k) = \sum_{k \in G} f^{-1}(k) \gamma(-k).$$

Следовательно,  $A^{-1} \in \mathcal{B}$ .

При выполнении условия 3 предположения 2 можно не привлекать теорему 1 и ее следствие. Для доказательства свойства 3' (теперь  $G = \mathbb{Z}^n$ ) используем быстрое убывание коэффициентов Фурье функции  $\widehat{A} : \mathbb{T}^n \rightarrow \text{End } X$  ( $\mathbb{T}^n = \widehat{G} \subset \mathbb{C}^n$ ,  $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ). Рассмотрим ее голоморфное расширение  $\overline{A} : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathcal{F}$  в некоторую окрестность  $U$  тора  $\mathbb{T}^n$ . Ввиду устойчивости свойства обратимости линейных операторов относительно малых возмущений существует такое число  $\varepsilon_0 > 0$ , что все операторы  $\overline{A}(z)$ ,  $\text{dist}(z, \mathbb{T}^n) < \varepsilon_0$ , обратимы. Отсюда следует, что функция  $\gamma \mapsto T(\gamma)BT(-\gamma) : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathcal{F}$  допускает голоморфное расширение на некоторую открытую окрестность  $U_0 = \{z \in \mathbb{C}^n : \text{dist}(z, \mathbb{T}^n) < \varepsilon_0\}$ , совпадающее с функцией  $z \mapsto \overline{A}(z)^{-1} : U_0 \rightarrow \mathcal{F}$ . Поэтому ее коэффициенты Фурье  $B_k$  ( $k \in \mathbb{Z}^n$ ) удовлетворяют условию 3' для некоторых  $M_0 > 0$ ,  $\gamma_0 \in (0, 1)$ . Теорема доказана.

**Следствие 1.** Если  $A \in \text{End}_1 X$  обратим, то  $A^{-1} \in \text{End}_1 X$ .

**Следствие 2.** Пусть  $G = \mathbb{Z}^n$  и  $S \subset \mathbb{Z}^n$ . Если для обратимости оператора  $A \in \text{End } X$  выполнено условие  $\lim_{\|k\| \rightarrow \infty} d_A(k)(1 + \|k\|)^{\kappa} = 0$  при некотором  $\kappa > n$ , то для оператора  $B = A^{-1}$  выполнено условие  $\lim_{\|k\| \rightarrow \infty} d_B(k)(1 + \|k\|)^{\kappa} = 0$ .

Для доказательства достаточно заметить, что  $A \in \text{End}_{\beta} X$ , где  $\beta(k) = (1 + \|k\|)^{-\kappa}$ ,  $k \in \mathbb{Z}^n$ .

Символом  $l_p(S, Y)$  ( $p \in [1, \infty]$ ) обозначим банахово пространство функций (последовательностей), определенных на  $S$ , принимающих значения в комплексном банаховом пространстве  $Y$  и суммируемых со степенью  $p$  (ограниченных при  $p = \infty$ ). Рассмотрим проекторнозначную функцию  $P : S \rightarrow \text{End } l_p$ ,  $l_p = l_p(S, Y)$ , определенную соотношениями

$$P(i)\varphi = \varphi_i, \quad \varphi \in l_p, \quad i \in S,$$

где функция  $\varphi_i \in l_p$  имеет вид  $\varphi_i(i) = \varphi(i)$  и  $\varphi_i(k) = 0$  при  $k \neq i$ . При  $p \neq \infty$  функция  $P$  является разложением единицы, удовлетворяющим условиям предположения 1.

Если  $Y = \mathbb{C}$ ,  $A \in \text{End } l_p$  ( $p \in [1, \infty)$ ) и  $(a_{ij})$  — матрица оператора  $A$  относительно стандартного базиса в  $l_p$ , то  $A_{ij} = P(i)AP(j) = a_{ij}I_{ij}$  ( $i, j \in S$ ), где оператор  $I_{ij} \in \text{End } l_p$  определяется соотношениями:  $I_{ij}e_k = 0$  при  $k \neq j$ ,  $I_{ij}e_j = e_i$  ( $(e_i; i \in S)$  — базис в  $l_p$ ). В этом случае  $d_A(k) = \sup_{i-j=k} \|A_{ij}\| = \sup_{i-j=k} |a_{ij}|$ .

Каждый оператор  $A \in \text{End}_1 l_q(S, Y)$ , где  $q \in [1, \infty)$ , определен и ограничен во всех пространствах  $l_p$ ,  $p \in [1, \infty]$ , причем оценка  $\|A\| \leq \|A\|_1 = \sum_{k \in G} d_A(k)$  не зависит от  $p \in [1, \infty]$ . Далее символом  $\text{End}_1 l_{\infty}(S, Y)$  обозначается подпространство операторов из алгебры  $\text{End } l_{\infty}(S, Y)$ , которые при некотором  $p \in [1, \infty)$  оставляют инвариантным подпространство  $l_p(S, Y)$  и его сужение на  $l_p(S, Y)$  принадлежит алгебре  $\text{End}_1 l_p(S, Y)$ .

**Следствие 3.** Если оператор  $A \in \text{End}_1 l_q(S, Y)$  ( $q \in [1, \infty]$ ) обратим, то он обратим во всех остальных пространствах  $l_p(S, Y)$ ,  $p \in [1, \infty]$ .

Следующий результат обязан общему подходу к рассматриваемым вопросам.

**Теорема 3.** Существует функция  $\varphi : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ , обладающая свойством: для любого банахова пространства  $X$  с заданным разложением единицы  $P : S \rightarrow \text{End } X$  ( $S$  и  $G$  фиксируются) и для любого обратимого оператора  $A \in \mathcal{B}$  ( $\mathcal{B}$  — одна из банаховых алгебр  $\text{End}_\alpha X$ ,  $\text{End}_\beta X$ ) имеет место оценка  $\|A^{-1}\|_{\mathcal{B}} \leq \varphi(\|A\|_{\mathcal{B}}, \|A^{-1}\|, C(P))$ .

**Доказательство.** Отсутствие функции  $\varphi$  с такими свойствами означает, что существуют постоянные  $C_1, C_2, C_3 > 0$ , для которых найдутся последовательность банаховых пространств  $(X_k)$ ,  $k \geq 1$ , с разложениями единиц  $P_k : S \rightarrow \text{End } X_k$  и последовательность  $(A_k)$  обратимых операторов  $A_k$ ,  $k \geq 1$ , из алгебры  $\mathcal{B}_k$  ( $\mathcal{B}_k$  — одна из алгебр  $\text{End}_\alpha X_k$ ,  $\text{End}_\beta X_k$ ) такие, что  $\|A_k\| \leq C_1$ ,  $\|A_k^{-1}\| \leq C_2$ ,  $C(P_k) \leq C_3 \forall k \geq 1$ , но  $\lim_{k \geq 1} \|A_k^{-1}\|_{\mathcal{B}_k} = \infty$ .

Рассмотрим банахово пространство  $\tilde{X}_0$  сходящихся к нулю последовательностей вида  $x = (x_1, x_2, \dots)$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = 0$ ,  $x_k \in X_k$  ( $\|x\| = \sup_{k \geq 1} \|x_k\|$ ) и разложение единицы  $P_0 : S \rightarrow \text{End } X_0$ ,  $P_0 x = (P_1 x_1, P_2 x_2, \dots)$ .

Ясно, что  $C(P_0) \leq \sup_{k \geq 1} C(P_k) \leq C_3$ . Определим оператор  $A_0 \in \text{End } \tilde{X}_0$  формулой  $A_0 x = (A_1 x_1, A_2 x_2, \dots)$ . Тогда  $\|A_0\| = \sup_{k \geq 1} \|A_k\| \leq C_1$ , оператор  $A_0$  обратим ( $A_0^{-1} x = (A_1^{-1} x_1, A_2^{-1} x_2, \dots)$ ),  $\|A_0^{-1}\| \leq \sup_{k \geq 1} \|A_k^{-1}\| \leq C_2$ .

Из теоремы 2 следует, что оператор  $A_0^{-1}$  принадлежит алгебре  $\mathcal{B}_0$  ( $\mathcal{B}_0$  — одна из соответствующих алгебр  $\text{End}_\alpha \tilde{X}_0$ ,  $\text{End}_\beta \tilde{X}_0$ ) и поэтому  $\sup_{k \geq 1} \|A_k^{-1}\| = \|A_0^{-1}\| < \infty$ . Получено противоречие. Теорема доказана.

Отметим, что теорема 2 не дает способа построения функции  $\varphi : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$  (способа получения конкретных оценок).

**Теорема 4.** Пусть  $S$  — подмножество из группы  $\mathbb{Z}^n$ ,  $A \in \text{End } X$  — обратимый оператор и выполнено условие  $\sum_{i \neq j, i, j \in S} \|A_{ij}\| < \infty$ . Тогда матрица  $(B_{ij})$  обратного оператора  $B = A^{-1}$  обладает свойством  $\sum_{i \neq j, i, j \in S} \|B_{ij}\| < \infty$ .

**Доказательство.** Рассмотрим свободную абелеву группу  $G$ , порожденную множеством  $\mathbb{Z}^n$  (групповая структура в  $\mathbb{Z}^n$  снимается). Группа  $G$  может быть реализована как множество всех отображений  $\varphi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ , имеющих конечный носитель (сумма определяется обычным сложением отображений). Тогда множество  $S$  вкладывается в  $G$  отождествлением каждого элемента  $k \in S$  с функцией  $f_k \in G$ , имеющей вид:  $f_k(m) = 0$  при  $m \neq k$  и  $f_k(k) = 1$ .

При таком выборе группы  $G$  каждая  $k$ -я диагональ матрицы  $(A_{ij})$  оператора  $A$  (при  $k \in G$ ,  $k \neq 0$ ) либо будет нулевой, либо будет состоять из одного элемента  $A_{ij}$ , где  $i, j \in S$  удовлетворяют условию  $i - j = k$ . Следовательно,  $\sum_{k \in G} d_A(k) < \infty$ , и поэтому непосредственно из следствия 1 теоремы 2 получаем, что  $\sum_{i \neq j} \|B_{ij}\| \leq \sum_{k \in G} d_B(k) < \infty$ . Теорема доказана.

### § 3. Приложения к теории функций и спектральной теории линейных операторов

Рассмотрим банахово пространство  $C(\mathbb{R})$  непрерывных и ограниченных на  $\mathbb{R}$  комплекснозначных функций. Символом  $s(\varphi)$  обозначим спектр Бёрлинга (см. [2, 12, 13]) функции  $\varphi \in C(\mathbb{R})$ , т. е. множество  $\{\lambda_0 \in \mathbb{R} : f * \varphi \neq 0 \forall f \in L_1(\mathbb{R}) \text{ с } \hat{f}(\lambda_0) \neq 0\}$ .

Если  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  — непрерывная почти периодическая функция [12] с рядом Фурье

$$\varphi(t) \sim \sum_{n \geq 1} \varphi_n e^{i\lambda_n t},$$

то для функции  $f \in L_1(\mathbb{R})$  свертка функций

$$(f * \varphi)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-s)\varphi(s) ds$$

является почти периодической и ее ряд Фурье имеет вид

$$(f * \varphi)(t) \sim \sum_{n \geq 1} \hat{f}(\lambda_n) \varphi_n e^{i\lambda_n t}.$$

Поэтому из теоремы единственности рядов Фурье почти периодических функций следует, что множество  $s(\varphi)$  совпадает с замыканием  $\sigma(\varphi)$  показателей Фурье  $\sigma(\varphi) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$  функции  $\varphi$ .

Отметим известные свойства спектра Бёрлинга функций из  $C(\mathbb{R})$  (см. [12, 13]).

**Лемма 3.** *Имеют место следующие утверждения:*

- 1) если  $\varphi \in C(\mathbb{R})$ , то  $s(\varphi) = \emptyset \Leftrightarrow \varphi = 0$ ;
- 2)  $s(\varphi_1 + \varphi_2) \subset s(\varphi_1) \cup s(\varphi_2) \forall \varphi_1, \varphi_2 \in C(\mathbb{R})$ ;
- 3)  $s(f * \varphi) \subset \text{supp } \hat{f} \cap s(\varphi) \forall f \in L_1(\mathbb{R}) \forall \varphi \in C(\mathbb{R})$ ;
- 4)  $f * \varphi = 0$ , если  $\text{supp } \hat{f} \cap s(\varphi) = \emptyset$  ( $f \in L_1(\mathbb{R})$ ,  $\varphi \in C(\mathbb{R})$ );
- 5)  $f * \varphi = \varphi$ , если  $s(\varphi)$  — компакт и  $f = 1$  в окрестности множества  $s(\varphi)$  ( $f \in L_1(\mathbb{R})$ ,  $\varphi \in C(\mathbb{R})$ );

6) если  $s(\varphi)$  — компакт для  $\varphi \in C(\mathbb{R})$ , то  $\varphi$  допускает расширение на  $\mathbb{C}$ , которое является целой функцией экспоненциального типа (не превосходящего  $\sigma = \max\{|\lambda| : \lambda \in s(\varphi)\}$ );

7) множество  $s(\varphi)$  совпадает с носителем преобразования Фурье  $\hat{\varphi}$  функции  $\varphi \in C(\mathbb{R})$ , рассматриваемой как обобщенная функция умеренного роста.

Выделим некоторую функцию  $f$  из алгебры  $L_1(\mathbb{R})$ , преобразование Фурье которой обладает свойствами:  $\hat{f}(0) = 1$ ,  $\text{supp } \hat{f} \subset [-1/2, 1/2]$ . Рассмотрим семейство функций  $\{f_\lambda = f e_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$ , где  $e_\lambda(t) = \exp i\lambda t$ .

Для каждой функции  $\varphi \in C(\mathbb{R})$  определим функцию  $d_\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , положив  $d_\varphi(\lambda) = \|f_\lambda * \varphi\|$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Согласно лемме 3 функция  $f_\lambda * \varphi$  имеет компактный спектр Бёрлинга из множества  $[\lambda - 1/2, \lambda + 1/2]$  (ибо  $\text{supp } \hat{f}_\lambda \subset [\lambda - 1/2, \lambda + 1/2]$ ) и, следовательно, является целой функцией. Таким образом, функция  $d_\varphi$  характеризует убывание соответствующих частей функции  $\varphi$  со спектром из отрезков  $[\lambda - 1/2, \lambda + 1/2]$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  (характеризует интенсивность энергетического спектра функции  $\varphi$ , см. [14, гл. 4]).

Если  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  — почти периодическая функция с рядом Фурье  $\sum_{n \geq 1} \varphi_n \exp i\lambda_n t$ , то  $f_\lambda * \varphi$  имеет ряд Фурье вида

$$(f_\lambda * \varphi)(t) \sim \sum_{n \geq 1} \hat{f}_\lambda(\lambda_n) \varphi_n \exp i\lambda_n t = \sum_{|\lambda_n - \lambda| \leq 1/2} \varphi_n \hat{f}_\lambda(\lambda_n) \exp i\lambda_n t.$$

В частности, если  $\varphi$  — периодическая с периодом  $2\pi$  функция, то  $d_\varphi(\lambda) \leq \max\{|\varphi_n|, |\varphi_{n+1}|\}$   $\forall \lambda \in [n, n+1]$  (если  $\varphi(t) \sim \sum_{n \geq 1} \varphi_n \exp int$  — ее ряд

Фурье). Отметим, что если  $\varphi \in C(\mathbb{R})$  является преобразованием Фурье борелевской меры ограниченной вариации  $\mu$ , то  $s(\varphi) = \text{supp } \mu$ , и в этом случае  $d_\varphi(\lambda) \leq \text{var}(\mu, [\lambda - 1/2, \lambda + 1/2])$  ( $\text{var}(\mu, [a, b])$  — вариация меры  $\mu$  на отрезке  $[a, b]$ ).

**Предположение 3.** Функция  $\varphi$  удовлетворяет одному из следующих условий:

- 1)  $\int_{\mathbb{R}} d_\varphi(\lambda) |\lambda|^q d\lambda < \infty$  для некоторого  $q > 1$ ;
- 2)  $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} d_\varphi(\lambda) |\lambda|^q = 0$  для некоторого  $q > 1$ ;
- 3)  $d_\varphi(\lambda) \leq C \exp(-\varepsilon|\lambda|)$  для некоторых  $C, \varepsilon > 0$ .

**Лемма 4.** Пусть  $g$  — функция из алгебры  $L_1(\mathbb{R})$ , для которой  $\text{supp } \hat{g}$  — компактное множество. Тогда существуют числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  и постоянная  $C > 0$  такие, что

$$\|g_\lambda * \varphi\| \leq C \sum_{i=1}^m d_\varphi(\lambda + \lambda_i) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

В частности, если функция  $d_\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  удовлетворяет одному из условий предположения 3, то функция  $d'_\varphi(\lambda) = \|g_\lambda * \varphi\|$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , удовлетворяет одному из соответствующих условий:

- 1')  $\int_{\mathbb{R}} d'_\varphi(\lambda) (1 + |\lambda|)^q d\lambda < \infty$ ;
- 2')  $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} d'_\varphi(\lambda) |\lambda|^q = 0$ ;
- 3')  $d'_\varphi(\lambda) \leq M_1 \exp(-\varepsilon|\lambda|)$  для некоторого числа  $M_1 > 0$ .

**Доказательство.** Поскольку множество  $\text{supp } \hat{g}$  компактно и  $\hat{f}(0) = 1$ , то существуют элементы  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  такие, что  $|\hat{f}(\lambda + \lambda_1)| + \dots + |\hat{f}(\lambda + \lambda_m)| > 0 \forall \lambda \in \text{supp } \hat{g}$ . Тогда функция  $g$  принадлежит идеалу, порожденному функциями  $f_{\lambda_1}, \dots, f_{\lambda_m}$  (см. [9]), поэтому она представима в виде  $g = \varphi_1 * f_{\lambda_1} + \dots + \varphi_m * f_{\lambda_m}$ , где  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  — некоторые функции из алгебры  $L_1(\mathbb{R})$ . Следовательно,

$$g_\lambda = (\varphi_1 * f_{\lambda_1})e_\lambda + \dots + (\varphi_m * f_{\lambda_m})e_\lambda = (\varphi_1)_{\lambda_m} * f_{\lambda_1 + \lambda} + \dots + (\varphi_m)_\lambda * f_{\lambda_m + \lambda}, \\ x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Отсюда

$$d'_\varphi(\lambda) \leq \max_{1 \leq i \leq m} \|\varphi_i\| \sum_{i=1}^m d_\varphi(\lambda + \lambda_i) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Лемма доказана.

**Теорема 5.** Пусть для функции  $\varphi \in C(\mathbb{R})$  выполнены условие  $\inf_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)| > 0$  и одно из условий 1-3 предположения 3. Тогда для функции  $\psi(t) = 1/\varphi(t)$  выполнены соответствующие условия:

$$1') \int_{\mathbb{R}} d_{\psi}(\lambda)|\lambda|^q d\lambda < \infty;$$

$$2') \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} d_{\psi}(\lambda)|\lambda|^q = 0;$$

$$3') d_{\psi}(\lambda) \leq C_0 \exp(-\varepsilon_0|\lambda|) \text{ для некоторых } C_0, \varepsilon_0 > 0.$$

Доказательство. В гильбертовом пространстве  $L_2(\mathbb{R})$  суммируемых с квадратом на  $\mathbb{R}$  комплекснозначных функций определим линейный оператор  $A = A_{\varphi} \in \text{End } L_2(\mathbb{R})$  формулой

$$A_{\varphi}x = \mathcal{F}\varphi\mathcal{F}^{-1}x = \mathcal{F}(\varphi\mathcal{F}^{-1}x), \quad x \in L_2(\mathbb{R}),$$

где  $\mathcal{F} \in \text{End } L_2(\mathbb{R})$  — оператор Фурье ( $\mathcal{F}x = \hat{x}$ ,  $x \in L_2(\mathbb{R})$ ). Отметим, что  $\|A\| = \|\varphi\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)|$ .

Рассмотрим разбиение единицы  $P : \mathbb{Z} \rightarrow \text{End } L_2(\mathbb{R})$ , где  $P(n)$  — оператор умножения функций из  $L_2(\mathbb{R})$  на характеристическую функцию отрезка  $[n, n + 1]$ . Пусть  $A = A_{\varphi} \sim \sum A_k$  — ряд Фурье оператора  $A$ , построенный с помощью  $P$  (здесь  $G = S = \mathbb{Z}$ ). Докажем, что каждое из условий предположения 3 влечет выполнение одного из следующих соответствующих условий:

$$а) \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_A(k)|k|^q < \infty;$$

$$б) \lim_{|k| \rightarrow \infty} d_A(k)|k|^q = 0;$$

$$в) d_A(k) \leq M_1 \exp(-\varepsilon|k|), \quad M_1, \varepsilon > 0.$$

Из леммы 1 вытекает, что каждый коэффициент Фурье  $A_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , оператора  $A$  допускает представление вида (4) (где  $S = \mathbb{Z}$ ), из которого ввиду ортогональности проекторов  $P(i)$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , следует, что  $d_A(k) = \|A_k\| \forall k \in \mathbb{Z}$ . Пусть функция  $g \in L_1(\mathbb{R})$  имеет преобразование Фурье, обладающее свойствами:  $\hat{g} = 1$  на отрезке  $[-2, 2]$  и  $\text{supp } \hat{g} \subset [-3, 3]$ .

Докажем, что имеют место равенства  $P(i)A_{\varphi}P(j) = P(i)A_{g_{\lambda} * \varphi}P_j$  для всех  $i, j \in \mathbb{Z}$ , удовлетворяющих условию  $i - j = k$ , и всех  $\lambda = k \in \mathbb{Z}$  (здесь  $g_{\lambda} = g_{\lambda}$ ).

Вначале отметим, что если  $x_0 \in C(\mathbb{R})$  — бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем, то  $Ax_0 = \hat{\varphi} * x_0$  ( $\hat{\varphi} * x_0$  — свертка преобразования Фурье обобщенной функции  $\varphi$  медленного роста и функции  $x_0$ ). Поэтому имеет место включение (см. также [13])

$$\text{supp } Ax_0 \subset \text{supp } \hat{\varphi} + \text{supp } x_0 = \{t + s : t \in s(\varphi), s \in \text{supp } x_0\}.$$

Доказываемые равенства вытекают из включений

$$\text{supp } P_i(A_{\varphi} - A_{g_{\lambda} * \varphi})P_jx_0 = [i, i + 1] \cap (\text{supp}(\hat{\varphi} - \hat{g}_{\lambda}\hat{\varphi}) + [j, j + 1])$$

$$\subset [i, i + 1] \cap (\mathbb{R} \setminus [k - 2, k + 2] + [j, j + 1]) = \emptyset, \quad k = i - j.$$

Следовательно,  $k$ -й коэффициент Фурье операторов  $A_{\varphi}$  и  $A_{g_{\lambda} * \varphi}$  совпадает. Отсюда и из леммы 4 получаем, что существуют такие числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ ,  $C > 0$ , что

$$d_A(k) = \|A_k\| = \|g_k * \varphi\| \leq C \sum_{i=1}^m d_{\varphi}(k + \lambda_i), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Из этой оценки следует выполнение для функции  $d_A : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  одного из соответствующих условий а)-в).

Оператор  $A = A_{\varphi}$  обратим и обратный  $B = A^{-1}$  имеет вид  $Bx = \mathcal{F}\psi\mathcal{F}^{-1}x$ , т. е.  $B = A_{\psi}$ . Из теоремы 2 и ее следствия 2 получаем, что функция  $d_B(k) = \|B_k\|$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  ( $B_k$  —  $k$ -й коэффициент Фурье оператора  $B$ ) удовлетворяет одному из соответствующих условий:

$$a') \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_B(k) |k|^q < \infty;$$

$$б') \lim_{|k| \rightarrow \infty} d_B(k) |k|^q = 0;$$

$$в') d_B(k) \leq M_2 \exp -\varepsilon_0 |k|, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad M_2 > 0, \quad \varepsilon_0 > 0.$$

Докажем, что функция  $d_\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  обладает одним из соответствующих условий 1'-3'. При этом используем оценки а')-в').

С этой целью рассмотрим такую функцию  $l \in L_1(\mathbb{R})$ , что  $\hat{l} = 1$  на  $[-1, 1]$  и  $\text{supp } l \subset [-2, 2]$ . Оператор  $A_{l*\psi}$  представим в виде

$$A_{l*\psi} x = \int_{\mathbb{R}} l(\tau) T(\tau) A_\psi T(-\tau) x \, d\tau = \int_{\mathbb{R}} l(\tau) A_{\psi_\tau} \, d\tau, \quad x \in L_2(\mathbb{R}), \quad (7)$$

где  $(T(\tau)x)(s) = (\exp i\tau s)x(s)$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$  — группа изометрических операторов из  $\text{End } L_2(\mathbb{R})$  и  $\psi_\tau(s) = \psi(s - \tau)$  — сдвиг функции  $\psi$  на  $\tau$ . Из включений

$$\text{supp } P_i A_{l*\psi} P_j x \subset [i, i+1] \cap ([k-2, k+2] + [j, j+1]) = \emptyset,$$

где  $\lambda = k \in \mathbb{Z}$ ,  $|i-j-k| \geq 2$  и  $x \in L_2(\mathbb{R})$ , следует, что  $P_i A_{l*\psi} P_j = 0$ . С другой стороны, из формулы (7) получаем равенства

$$P_i A_{l*\psi} P_j x = \int_{\mathbb{R}} l_k(\tau) T(\tau) P_i A_\psi P_j T(-\tau) x \, d\tau, \quad i, j, k \in \mathbb{Z}, \quad x \in L_2(\mathbb{R}).$$

Поэтому имеем следующее представление:

$$A_{l*\psi} x = \sum_{|i-j-k| \leq 1} P_i A_{l*\psi} P_j = \int_{\mathbb{R}} l_k(\tau) T(\tau) (B_{k-1} + B_k + B_{k+1}) T(-\tau) x \, d\tau.$$

Отсюда

$$\|A_{l_k+\psi}\| \leq \|l\| (d_B(k-1) + d_B(k) + d_B(k+1)), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Если  $\lambda \in [k-1/2, k+1/2]$ , то  $f_\lambda * f_k = f_\lambda$  (в силу равенств  $\widehat{f_\lambda * l_k}(t) = \widehat{f_\lambda}(t) \widehat{l_k}(t) = \widehat{f_\lambda}(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ), и поэтому для всех  $\lambda \in [k-1/2, k+1/2]$  получаем оценки

$$\begin{aligned} d_\psi(\lambda) &= \|f_\lambda * \psi\| = \|A_{f_\lambda*\psi}\| = \|A_{f_\lambda*l_k*\psi}\| \\ &\leq \|f\| \|A_{l_k*\psi}\| \leq \text{const} (d_B(k-1) + d_B(k) + d_B(k+1)), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Следовательно, каждое из условий а')-в') влечет выполнение соответствующего из условий 1'-3'. Теорема доказана.

Доказанную теорему можно рассматривать как обобщение теоремы Н. Винера об абсолютно сходящихся рядах Фурье на функции с «непрерывным» спектром.

**Следствие.** Пусть  $\varphi \in C(\mathbb{R})$  удовлетворяет одному из условий 1', 2' теоремы 5 и  $F : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  — аналитическая в открытой окрестности  $U$  замыкания  $\overline{\text{Im } \varphi}$  множества значений функции  $\varphi$ . Тогда функция  $F(\varphi)$  также удовлетворяет одному из соответствующих условий 1'-3' (в условии 3' могут быть другими постоянные  $C_0$  и  $\varepsilon_0$ ).

**Доказательство.** Пусть  $\gamma$  — жорданов контур, окружающий множество  $\overline{\text{Im } \varphi}$ , причем  $\gamma \subset U$ . Тогда утверждение следствия вытекает из теоремы 5 и представления функции  $F(\varphi)$  в виде

$$F(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda - \varphi)^{-1} F(\lambda) \, d\lambda.$$

Следствие доказано.

Теперь приступим к применению полученных в § 2 результатов к оценкам спектральных разложений (коэффициентов Фурье) собственных векторов линейных операторов.

Пусть  $H$  — сепарабельное комплексное гильбертово пространство и  $P : S \rightarrow \text{End } H$  — разложение единицы ( $S$  — счетное подмножество из группы  $\mathbb{Z}^n$ ).

Рассмотрим линейный оператор  $A \in \text{End } H$ , принадлежащий банаховой алгебре  $\mathcal{B}$ , которая совпадает с одной из подалгебр  $\text{End}_\alpha H$ ,  $\text{End}_\beta H$  и  $\text{End}_* H$  (см. § 1).

**Теорема 6.** Пусть  $\lambda_0$  — изолированная точка спектра  $\sigma(A)$  оператора  $A$ , являющаяся простым собственным значением, и  $a, b$  — собственные векторы операторов  $A$  и  $A^*$ , отвечающие собственным значениям  $\lambda_0$  и  $\bar{\lambda}_0$  соответственно, причем  $(a, b) = 1$  ( $Aa = \lambda_0 a$ ,  $A^*b = \bar{\lambda}_0 b$ ). Рассмотрим последовательность

$$d(k; a, b) = \sup_{i-j=k} \|P_i b\| \|P_j^* a\|, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Тогда

- 1)  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} d(k; a, b) \alpha(k) < \infty$ , если  $A \in \text{End}_\alpha H$ ;
- 2)  $\lim_{|k| \rightarrow \infty} d(k; a, b) / \beta(k) = 0$ , если  $A \in \text{End}_\beta H$ ;
- 3)  $d(k; a, b) \leq M_0 \gamma_0^{|k|}$ ,  $M_0 > 0$ ,  $\gamma_0 \in (0, 1)$ , если  $A \in \text{End}_* H$ .

**Доказательство.** Пусть  $P = P(\sigma_0, A) \in \text{End } H$  — проектор Рисса, построенный по одноточечному спектральному множеству  $\sigma_0 = \{\lambda_0\}$  из  $\sigma(A)$ . Представим его в виде

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} R(\lambda, A) d\lambda, \quad \gamma_0 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| = \gamma_0\},$$

где  $\varepsilon_0$  — достаточно малое число и  $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$  — резольвента оператора  $A$ . Из теорем 2, 3 получаем, что функция  $\lambda \mapsto R(\lambda, A) : \gamma_0 \rightarrow \mathcal{B}$  ограничена и непрерывна (как функция, удовлетворяющая резольвентному тождеству Гильберта). Следовательно, оператор  $P$  принадлежит той же алгебре  $\mathcal{B}$ .

По условию теоремы проектор  $P$  можно представить также в виде  $Px = (x, a)b$ , поэтому  $d_P(k) = d(k; a, b) \forall k \in \mathbb{Z}$ , т. е. выполнено одно из соответствующих свойств 1-3. Теорема доказана.

Пусть  $S = \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$  и разложение единицы  $P : \mathbb{N} \rightarrow \text{End } H$  задается с помощью некоторого ортонормированного базиса  $(e_n)$  пространства  $H$ , т. е.  $P(n)x = (x, e_n)e_n$ ,  $n \geq 1$ . В этом случае для любого оператора  $A \in \text{End } H$  имеют место равенства  $d_A(k) = \sup_{i-j=k} |a_{ij}|$ , где  $a_{ij} = (Ae_j, e_i)$ ,  $i, j \geq 1$ , — матрица оператора  $A$  относительно базиса  $(e_n)$ .

**Следствие.** Пусть оператор  $A \in \text{End } H$  удовлетворяет условиям теоремы 6 и самосопряжен. Тогда выполнены свойства 1-3 теоремы 5, где  $a = b$  и

$$d(k; a, b) = \sup_{i-j=k} |\alpha_i \alpha_j|, \quad \alpha_i = (a, e_i), \quad i \geq 1,$$

— коэффициенты Фурье вектора  $a$  относительно базиса  $(e_n)$ .

**Замечание.** Все полученные в статье результаты справедливы, если не требовать выполнения предположения 1. Однако в таком случае следует для любого оператора  $A \in \text{End } X$  положить

$$d_A(k) = \|A_k\|, \quad k \in G,$$

где  $A_k$ ,  $k \in G$ , — коэффициенты Фурье оператора  $A$  (относительно заданного разложения единицы  $P : S \rightarrow \text{End } X$ ).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Allan G. R. Ideals of vector-valued functions // Proc. London Math. Soc. 1968. V. 18, N 3. P. 193–216.
2. Bochner S., Phillips R. S. Absolutely convergent Fourier expansions for non-commutative normed rings // Ann. of Math. (2). 1942. V. 43, N 3. P. 409–418.
3. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. М.: Наука, 1975. Т. 2.
4. Demko S., Moss W. F., Smith P. W. Decay rates for inverses of band matrices // Math. Comp. 1984. V. 43. P. 491–499.
5. Шубин М. А. Псевдоразностные операторы и их функция Грина // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1985. Т. 49, № 3. С. 652–671.
6. Курбатов В. Г. Об алгебрах разностных и интегральных операторов // Функцион. анализ и его прил. 1990. Т. 24, № 2. С. 98–99.
7. Блатов И. А. Об оценках элементов обратных матриц и о модификациях метода матричной прогонки // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 2. С. 10–21.
8. Баскаков А. Г. Теорема Винера и асимптотические оценки элементов обратных матриц // Функцион. анализ и его прил. 1990. Т. 24, № 3. С. 64–65.
9. Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилев Г. Е. Коммутативные нормированные кольца. М.: Физматгиз, 1960.
10. Наймарк М. А. Нормированные кольца. М.: Наука, 1968.
11. Dornar Y. Harmonic analysis based on certain commutative Banach algebras // Acta Math. 1956. V. 96. P. 1–66.
12. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. М.: Мир, 1966. Т. 2.
13. Herz C. S. The spectral theory of bounded functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1960. V. 94. P. 181–232.
14. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. М.: Мир, 1982.