A. V. Rodionov, Method N. M. Korobova approximate solution of the Dirichlet problem, *Chebyshevskii Sb.*, 2014, Volume 15, Issue 3, 48–85

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 15 Выпуск 3 (2014)

УДК 511.3

О МЕТОДЕ Н. М. КОРОБОВА ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ[1]

А. В. Родионов (г. Тула)
rodionovalexandr@mail.ru

Аннотация

В работе рассмотрены варианты обобщения метода Н. М. Коробова приближенного решения задачи Дирихле для уравнений с частными производными вида

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_s}\right)u(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})$$

с граничным условием $u(\mathbf{x})\,|_{\partial G_s}=\varphi(\mathbf{x})$, где функции $u(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x})$ пренадлежат классу периодческих функций E_s^α на случай использования обобщенных параллелепипедальных сеток $M(\Lambda)$ целочисленных решеток Λ.

Особое внимание уделено классу дифференциальных операторов, состоящему из операторов $Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_s}\right)$ с нулевым ядром. Важность этого класса операторов объясняется тем, что с точностью до константы решение дифференциального уравнения с частными производными для этих операторов определяется однозначно. Примером такого оператора является оператор Лапласа.

В работе было получено приближённое решение задачи Дирихле для уравнений с частными производными с помощью произвольной обобщенной параллелепипедальной сетки $M(\Lambda)$ целочисленной решетки Λ для некоторого класса периодических функций и показано, что при использовании бесконечной последовательности вложенных обобщенных параллелепипедальных сеток будет иметь место достаточно быстрая сходимость приближённого решения к функции $u(\mathbf{x})$.

Ключевые слова: обобщённые параллелепипедальные сетки, дифференциальные уравнения в частных производных, задача Дирихле.

Библиография: 15 названий.

METHOD N. M. KOROBOVA APPROXIMATE SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM

A. V. Rodionov (Tula)
rodionovalexandr@mail.ru

[1]Работа выполнена по гранту РФФИ № 11-01-00571

Abstract

The paper discusses the generalization of the method embodiments N. M. Korobov approximate solution of the Dirichlet problem for equations of the form

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_s}\right)u(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}),$$

where the functions $u(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x})$ belongs to the class of functions E_s^α in case of using generalized Parallelepipedal nets $M(\Lambda)$ integral lattices Λ.

Particular attention is paid to the class of differential operators, consisting of operators $Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_s}\right)$ with zero kernel. The importance of this class of operators due to the fact that up to a constant solution of differential equations with partial derivatives for these operators is uniquely determined. An example of such an operator is the Laplace operator.

In the work, an approximate solution of the Dirichlet problem for partial differential equations using arbitrary generalized parallelepiped mesh $M(\Lambda)$ integer lattice Λ for a certain class of periodic functions and shown that by using an infinite sequence of nested grids is generalized parallelepipedal nets sufficiently fast convergence of the approximate solutions to the function $u(\mathbf{x})$.

Keywords: parallelepiped nets, partial differential equations, the Dirichlet problem.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

В 1961 году В. С. Рябенький в работе [15] предложил численный метод решения задачи Коши для следующего класса дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_s}\right)u(t,\mathbf{x}), \tag{1}$$

$$0\leqslant t\leqslant T,\quad -\infty<x_\nu<\infty\quad(\nu=1,\ldots,s),$$

$$u(0,\mathbf{x})=\varphi(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_s), \tag{2}$$

где

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_s}\right)=\sum_{j_1=0}^{n_1}\ldots\sum_{j_s=0}^{n_s}a_{j_1,\ldots,j_s}\frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}}\ldots\frac{\partial^{j_s}}{\partial x_s^{j_s}} \tag{3}$$

— дифференциальный оператор порядка $n(Q)=n_1+\ldots+n_s$, с максимальным порядком по отдельным переменным, не превосходящим $m(Q)=\max(n_1,\ldots,n_s)$, а $\varphi(\mathbf{x})=\varphi(x_1,\ldots,x_s)$ — периодическая с периодом единица по каждому из своих аргументов функция из класса E_s^α $(\alpha>m(Q)+1)$.[2]

Таким образом,

$$\varphi(x_1,\ldots,x_s)=\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\ldots\sum_{m_s=-\infty}^{\infty}c_{m_1,\ldots,m_s}e^{2\pi i(m_1x_1+\ldots+m_sx_s)} \tag{4}$$

и для коэффициентов Фурье выполняется оценка

$$|c_{m_1,\ldots,m_s}|\leqslant\frac{\|\varphi\|_{E_s^\alpha}}{(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^\alpha}. \tag{5}$$

Величина

$$\|\varphi\|_{E_s^\alpha}=\sup_{m_1,\ldots,m_s}|c_{m_1,\ldots,m_s}(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^\alpha|<\infty \tag{6}$$

является нормой на пространстве E_s^α, относительно которой оно является несепарабельным банаховым пространством.

В своей работе В. С. Рябенький предложил некоторый общий подход численного решения задачи Коши с использованием произвольных сеток, для которых выполнены специальные условия, и показал, что его конструкция применима для многомерных кубических сеток, которые ещё называют равномерными, и для параллелепипедальных сеток Н. М. Коробова.

В работах [1], [12] — [14] предложено обобщение метода В. С. Рябенького на случай использования произвольных обобщенных параллелепипедальных сеток $M(\Lambda)$ целочисленной решетки Λ.

В работе [9] Н. М. Коробов рассмотрел решение частной задачи Дирихле с нулевым граничным условием для уравнения Пуассона с правой частью из класса E_s^α:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2}=f(\mathbf{x}), \tag{7}$$

$$u(\mathbf{x}),f(\mathbf{x})\in E_s^\alpha, \tag{8}$$

$$f(x_1,\ldots,-x_j,\ldots,x_s)=-f(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_s)\quad(j=1,\ldots,s),$$

$$u(\mathbf{x})=0 \text{ при } x_1(1-x_1)\cdot\ldots\cdot x_s(1-x_s)=0. \tag{9}$$

[2]Условие на α гарантирует, что ряд Фурье для образа $Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_s}\right)\varphi(\mathbf{x})$, полученный почленным дифференцированием, равномерно и абсолютно сходится.

Таким образом,

$$u(\mathbf{x})\,|_{\partial G_s} = 0, \qquad G_s = [0;1)^s.$$

Метод Н. М. Коробова состоял в получении с помощью параллелепипедальных сеток $M_k = \left(\left\{\frac{a_1 k}{N}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{N}\right\}\right)$ $(k = 0, \ldots, N-1)$ приближенного решения указанной задачи Дирихле на основании точного решения в виде ряда Фурье, которое легко выписать по ряду Фурье периодической функции $f(\mathbf{x})$. Необходимость приближенного решения обусловлена тем, что, как правило, явного вида ряда Фурье неизвестно, а потому, точное решение имеет только теоретическое значение.

Общая задача Дирихле для дифференциального оператора Q вида (3) выглядит следующим образом

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \tag{10}$$

$$u(\mathbf{x})\,|_{\partial G_s} = \varphi(\mathbf{x})\,, \tag{11}$$

$$u(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x}) \in E_s^\alpha. \tag{12}$$

Естественно, что в таком виде задача Дирихле не всегда разрешима. Требуются дополнительные необходимые и достаточные условия, связывающие функции $f(\mathbf{x})$ и $\varphi(\mathbf{x})$, которые обеспечивают разрешимость задачи Дирихле на некотором классе функций, который будет определен позднее.

Целью настоящей работы является получение приближенного решения общей задачи Дирихле с помощью произвольной обобщенной параллелепипедальной сетки $M(\Lambda)$ целочисленной решетки Λ.

Как показано в работе [8] по значениям произвольной функции $f(\mathbf{x})$ в узлах обобщенной параллелепипедальной сетки $M(\Lambda)$ однозначно определяется тригонометрический многочлен $I_\Lambda f(\mathbf{x})$, который, с одной стороны, является интерполяционным многочленом для функции $f(\mathbf{x})$ с узлами в $M(\Lambda)$, а с другой стороны — конечным рядом Фурье по этой обобщенной параллелепипедальной сетке.

Наш вариант обобщения метода Н. М. Коробова приближенного решения уравнений с частными производными на случай использования произвольных обобщенных параллелепипедальных сеток для целочисленных решеток состоит в следующем.

Пусть $\mathbb{Z}^s \supset \Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \ldots \supset \Lambda_n \supset \ldots$ — бесконечная последовательность целочисленных решеток в $\mathbb{R}^s$. Ей соответствует бесконечная последовательность обобщенных параллелепипедальных сеток:

$$\{\mathbf{0}\} = M(\mathbb{Z}^s) \subset M(\Lambda_1) \subset M(\Lambda_2) \subset \ldots \subset M(\Lambda_n) \subset \ldots$$

в единичном кубе $G_s = [0;1)^s$ и бесконечная последовательность конечных множеств целочисленных векторов $\mathbf{m}$ — минимальных гиперболических полных систем вычетов $M^*(\Lambda)$ фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки Λ_ν:

$$\{\mathbf{0}\} = M^*(\mathbb{Z}^s) \subset M^*(\Lambda_1) \subset M^*(\Lambda_2) \subset \ldots \subset M^*(\Lambda_\nu) \subset \ldots.$$

При соответствующих условиях на последовательность решеток для любой периодической функции $f(\mathbf{x})$ из класса E_s^α $(\alpha > 1)$ для последовательности интерполяционных многочленов $I_{\Lambda_\nu} f(\mathbf{x})$ будет иметь место достаточно быстрая сходимость

$$\lim_{\nu \to \infty} I_{\Lambda_\nu} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}).$$

Как будет показано далее, при достаточно естественных ограничениях либо на дифференциальный оператор $Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right)$, либо на граничные условия в задаче Дирихле последовательность решений $u_\nu(\mathbf{x})$, соответствующих граничным условиям $\varphi_\nu(\mathbf{x}) = I_{\Lambda_\nu}\varphi(\mathbf{x})$ и правой части $f_\nu(\mathbf{x}) = I_{\Lambda_\nu} f(\mathbf{x})$ будет сходиться к решению $u(\mathbf{x})$.

2. Необходимые сведения и обозначения из теории решеток

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — линейно независимая система векторов вещественного арифметического пространства $\mathbb{R}^s$. Совокупность Λ всех векторов вида

$$a_1\lambda_1 + \ldots + a_s\lambda_s,$$

где a_j независимо друг от друга пробегают все целые рациональные числа, называется решеткой в $\mathbb{R}^s$, а сами векторы $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — базисом этой решетки.

Взаимной решеткой к решетке Λ называется множество Λ^*, заданное равенством

$$\Lambda^* = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^s | \, \forall \mathbf{y} \in \Lambda \;\; (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^s\}. \tag{13}$$

Нетрудно видеть, что если $\lambda_j = (\lambda_{j\,1}, \lambda_{j\,2}, \ldots, \lambda_{j\,s})\,(1 \leqslant j \leqslant s)$ — произвольный базис решетки Λ, то взаимную решетку Λ^* можно задать взаимным базисом $\lambda_j^* = (\lambda_{j\,1}^*, \lambda_{j\,2}^*, \ldots, \lambda_{j\,s}^*)\,(1 \leqslant j \leqslant s)$, который определяется равенством

$$(\lambda_j, \lambda_i^*) = \delta_{j\,i} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad j = i, \\ 0, & \text{если} \quad j \neq i, \end{cases} \qquad (1 \leqslant j,\, i \leqslant s).$$

Из определения взаимного базиса и свойств определителей обратных и транспонированных матриц следует, что $\det \Lambda^* = (\det \Lambda)^{-1}$.

Для произвольного вектора $\mathbf{x}$ его дробной частью называется вектор $\{\mathbf{x}\} = (\{x_1\}, \ldots, \{x_s\})$.

Приведем определение обобщенной параллелепипедальной сетки $M(\Lambda)$ решетки Λ.

Определение 1. *Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$.*

Пусть целочисленная решетка Λ задана матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix}, \quad \det A \neq 0,$$

где $a_{\nu\mu}$ — целые числа $(\nu, \mu = 1, \dots, s)$. Рассмотрим взаимную решетку Λ^*, которая задается матрицей

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det\Lambda} & \dots & \frac{A_{s1}}{\det\Lambda} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1s}}{\det\Lambda} & \dots & \frac{A_{ss}}{\det\Lambda} \end{pmatrix},$$

где величина $A_{\nu\mu}$ — алгебраическое дополнение к элементу $a_{\nu\mu}$ в матрице A.

Отметим, что базису $\lambda_\nu = (a_{\nu 1}, \dots, a_{\nu s}) \quad (\nu = 1, \dots, s)$ решетки Λ взаимным базисом $\lambda_\nu^* \quad (\nu = 1, \dots, s)$ взаимной решетки Λ^* будут векторы

$$\lambda_\nu^* = \left(\frac{A_{\nu 1}}{\det\Lambda}, \dots, \frac{A_{\nu s}}{\det\Lambda}\right) \quad (\nu = 1, \dots, s).$$

Из определения сетки $M(\Lambda)$ следует, что

$$M(\Lambda) = \left\{ \mathbf{x} \;\middle|\; 0 \leqslant x_\nu = \frac{k_1 A_{1\nu} + \ldots + k_s A_{s\nu}}{\det\Lambda} < 1 \, (\nu = 1, \dots, s);\ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^s \right\}.$$

Усеченной нормой называется величина $q(\mathbf{x}) = \overline{x}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{x}_s$, где для вещественного x обозначаем $\overline{x} = \max(1, |x|)$. Гиперболический параметр $q(\Lambda)$ решетки Λ определяется равенством

$$q(\Lambda) = \min_{\mathbf{x} \in \Lambda,\, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}} q(\mathbf{x}).$$

Он имеет простой геометрический смысл: гиперболический крест $K(T)$ не содержит ненулевых точек решетки Λ при $T < q(\Lambda)$.

Гиперболическим крестом называется область

$$K(T) = \{\mathbf{x} \mid q(\mathbf{x}) \leqslant T\},$$

а величина T — его параметром.

Назовем r-й компонентой гиперболического креста $K(T)$ подмножество

$$K_r(T) = \{\mathbf{x} \mid q(\mathbf{x}) \leqslant T, \text{ ровно } r \text{ координат } \mathbf{x} \text{ отличны от } 0\}.$$

Ясно, что справедливо следующее разбиение гиперболического креста:

$$K(T) = \left(\bigcup_{r=1}^{s} K_r(T)\right) \bigcup \{\mathbf{0}\}.$$

Если $M \subset \Lambda$ – подрешетка решетки Λ, то величина $D = \det M/\det\Lambda$ называется индексом подрешетки M решетки Λ. Два вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ решетки Λ сравнимы по подрешетке M (находятся в одном классе относительно подрешетки M), если $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in M$. В этом случае пишем $\mathbf{x} \equiv \mathbf{y} \pmod{M}$. Индекс D подрешетки M решетки Λ равен числу классов решетки Λ относительно M. Произвольное множество векторов решетки Λ по одному из каждого класса относительно решетки M называется полной системой вычетов решетки Λ относительно M. Каждая полная система вычетов решетки Λ относительно M имеет естественную структуру конечной абелевой группы, изоморфной Λ/M.

Отсюда следует, что для любой целочисленной решетки Λ обобщенная параллелепипедальная сетка $M(\Lambda)$ является полной системой вычетов взаимной решетки Λ^* относительно фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$, т.е. $M(\Lambda) = \Lambda^*/\mathbb{Z}^s$. Таким образом, на обобщенной параллелепипедальной сетке целочисленной решетки определена естественная операция сложения, относительно которой она является конечной абелевой группой.

Обычно полную систему вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ будем обозначать через $M^*(\Lambda)$, хотя она определена неоднозначно. Ниже будут сформулированы дополнительные условия для выбора $M^*(\Lambda)$.

В одномерном случае любая целочисленная решетка имеет вид $p\mathbb{Z}$ и множество чисел $\{-p_1, \dots, 0, \dots, p_2\}$, где $p_1 = \left[\frac{p-1}{2}\right]$, $p_2 = \left[\frac{p}{2}\right]$, является наименьшей абсолютной полной системой вычетов одномерной фундаментальной решетки $\mathbb{Z}$ по подрешетке $p\mathbb{Z}$. Приведем многомерный аналог этому понятию из работы [8].

Определение 2. *Полная система вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ называется минимальной гиперболической полной системой вычетов, если минимальный гиперболический крест, содержащий эту полную систему вычетов, имеет минимальное значение своего параметра для всех полных систем вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ.*

Определение 3. *Полная система вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ, состоящая из представителей классов вычетов с наименьшей усеченной нормой среди всех элементов класса вычетов, называется абсолютно минимальной гиперболической полной системой вычетов.*

Такая полная система вычетов обозначается через $M^*_H(\Lambda)$. Вообще говоря, полная система вычетов $M^*_H(\Lambda)$ определена неоднозначно. Это видно на примере решетки $N\mathbb{Z}^s$ при четном N. Действительно, $N_2 \equiv -N_2 \pmod{N}$. Уже в одномерном случае две полные системы вычетов $\{-N_1, \dots, 0, \dots, N_2\}$ и $\{-N_2, \dots, 0, \dots, N_1\}$ удовлетворяют определению 3. В s-мерном случае таких систем будет 2^s. Для однозначности выбора $M^*_H(\Lambda)$ можно еще ввести лексикографический линейный порядок на $\mathbb{Z}^s$. Тогда из нескольких возможных элементов с одинаковым значением усеченной нормы выберем наименьший в смысле лексографического упорядочивания. Тем самым $M^*_H(\Lambda)$ будет определено однозначно.

Лемма 1. *Для любой целочисленной решетки Λ и подрешетки Λ_1 справедливо вложение*

$$M^*_H(\Lambda) \subset M^*_H(\Lambda_1)). \tag{14}$$

Доказательство. См. [8].

Для произвольной целочисленной решетки Λ определяются второй и третий гиперболические параметры.

Определение 4. *Вторым гиперболическим параметром целочисленной решетки Λ называется наименьшее натуральное число $q_2(\Lambda)$, такое, что гиперболический крест $K(q_2(\Lambda))$ содержит полную систему вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ.*

Определение 5. *Третьим гиперболическим параметром целочисленной решетки Λ называется наибольшее натуральное число $q_3(\Lambda)$, такое, что все целые точки гиперболического креста $K(q_3(\Lambda))$ содержатся в полной системе вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ. Другими словами все целые точки этого креста несравнимы по модулю Λ.*

Алгоритмы нахождения абсолютно наименьшей полной гиперболической системы вычетов, а также трёх гиперболических параметров решётки линейного сравнения предложены в работе [12].

Через $K_Z(T)$ обозначим множество всех целых точек, принадлежащих гиперболическому кресту $K(T)$. Так как $|K_Z(1)| = 3^s$, то для любого $N \geqslant 3^s$ можно определить функцию $T_s(N)$ из условий $|K_Z(T_s(N))| \leqslant N$, $|K_Z(T_s(N)+1)| > N$. Ясно, что

$$q_3(\Lambda) \leqslant T_s(N) \leqslant q_2(\Lambda). \tag{15}$$

Из (15) следует, что при $N < 3^s$ надо полагать $q_3(\Lambda) = 0$, так как минимальный крест $K(1)$ содержит больше элементов, чем полная система вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ, состоящая из N элементов.

В работе [3] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *При $N > e^{s\cdot e}$ справедливы неравенства:*

$$\frac{(s-1)!(N-1)}{2^s\left(\ln N + \frac{3s}{2}\right)^{s-1}} \leqslant T_s(N) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(s-1)!N}{2^s\left(\ln N+\ln((s-1)!)-s\ln 2-(s-1)\ln(\ln N)\right)^{s-1}}. \tag{16}$$

Из определений 4 и 5 сразу следует, что

$$q_3(\Lambda)<q(\Lambda), \quad q_3(\Lambda)\leqslant q_2(\Lambda).$$

Общие нетривиальные соотношения между этими тремя гиперполическими параметрами, по-видимому, установить непросто. Априори даже неясно, всегда ли существует полная система вычетов $M^*(\Lambda)$ фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ такая, что выполнены соотношения

$$K(q_3(\Lambda))\subset M^*(\Lambda)\subset K(q_2(\Lambda))\,? \tag{17}$$

Рассмотрим для примера случай решетки $\Lambda=N\mathbb{Z}^s$. Очевидно, что

$$M(N\mathbb{Z}^s)=\left\{0,\frac{1}{N},\dots,\frac{N-1}{N}\right\}^s, \quad |M(N\mathbb{Z}^s)|=\det(N\mathbb{Z}^s)=N^s. \tag{18}$$

Нетрудно видеть, что в качестве минимальной гиперболической полной системы вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки $N\mathbb{Z}^s$ можно взять

$$M^*(N\mathbb{Z}^s)=\{-N_1,\dots,N_2\}^s. \tag{19}$$

Отсюда следует, что

$$q(\Lambda)=N, \quad q_2(\Lambda)=N_2^s\leqslant\frac{\det N\mathbb{Z}^s}{2^s} \quad \text{и} \quad q_3(\Lambda)=N_1. \tag{20}$$

Лемма 2. *Для любой целочисленной решетки Λ найдется минимальная гиперболическая полная система вычетов $M^*(\Lambda)$ фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки Λ такая, что выполнены соотношения (17).*

Доказательство. См. [8].

Лемма 3. *Абсолютно минимальная гиперболическая полная система вычетов $M_H^*(\Lambda)$ фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки Λ удовлетворяет соотношению (17).*

Доказательство. См. [8].

Рассмотрим для произвольного вектора $\mathbf{x}$ понятие его индекса – количество ненулевых координат. Обозначим эту величину через $r(\mathbf{x})$. Таким образом наименьший индекс у нулевого вектора: $r(\mathbf{0})=0$, а максимальное значение индекса равно s. Для целого вектора $\mathbf{m}$ рассмотрим его индекс по модулю 2, т.е. количество его нечетных координат, которое обозначим через $r_2(\mathbf{m})$.

Лемма 4. *Если для целочисленной решетки Λ вектор $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$ и имеет минимальное значение усеченной нормы $(q(\mathbf{m}) = q(\Lambda))$, то для третьего гиперболического параметра решетки Λ справедлива оценка сверху:*

$$q_3(\Lambda) \leqslant \frac{q(\Lambda)}{2^{r(\mathbf{m})-r_2(\mathbf{m})}}. \tag{21}$$

Доказательство. См. [8].

Обозначим через J_s множество всех целочисленных векторов $\mathbf{j}_s$, каждый из которых имеет координаты, образующие перестановку чисел 1, 2, ..., s.

Лемма 5. *Пусть для заданного $\mathbf{j}_s \in J_s$ вектора $\lambda_1 = (\lambda_{1,1}, \ldots, \lambda_{1,s})$,..., $\lambda_s = (\lambda_{s,1}, \ldots, \lambda_{s,s})$ целочисленной решетки Λ определены из условий:*

$$\lambda_{1,j_1} = \min_{\mathbf{x}\in\Lambda\setminus\{\mathbf{0}\}} |x_{j_1}|, \tag{22}$$

$$\lambda_{\nu,1} = \ldots = \lambda_{\nu,j_\nu-1} = 0, \quad \lambda_{\nu,j_\nu} = \min_{\mathbf{x}\in\Lambda^{(\nu)}\setminus\{\mathbf{0}\}} |x_{j_\nu}| \quad (\nu = 2, \ldots, s), \tag{23}$$

где $\Lambda^{(\nu)} = \{\mathbf{x} \in \Lambda \,|\, x_{j_1} = \ldots = x_{j_{\nu-1}} = 0\}$, тогда они образуют базис решетки Λ.

Доказательство. См. [8].

Теорема 2. *Для любой целочисленной решетки Λ второй гиперболический параметр решетки удовлетворяет соотношению:*

$$q_2(\Lambda) \leqslant \min_{\mathbf{j}_s\in J_s} \left[\frac{N_1(\mathbf{j}_s)}{2}\right] \ldots \left[\frac{N_s(\mathbf{j}_s)}{2}\right]. \tag{24}$$

Доказательство. См. [8].

Теорема 3. *Для любой целочисленной решетки Λ с $q(\Lambda) > 4^s$ третий гиперболический параметр решетки удовлетворяет соотношению:*

$$q_3(\Lambda) \geqslant \left[\frac{\sqrt[s]{q(\Lambda)}}{2}\right] - 1. \tag{25}$$

Доказательство. Рассмотрим s-мерный куб $\left[-\left[\frac{\sqrt[s]{q(\Lambda)}}{2}\right]+1; \left[\frac{\sqrt[s]{q(\Lambda)}}{2}\right]\right]^s$, содержащий $2^s\left[\frac{\sqrt[s]{q(\Lambda)}}{2}\right]^s < q(\Lambda)$ целых точек. Если найдутся две различные целые точки $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \left[-\left[\frac{\sqrt[s]{q(\Lambda)}}{2}\right]+1; \left[\frac{\sqrt[s]{q(\Lambda)}}{2}\right]\right]^s$ такие, что $\mathbf{x} \equiv \mathbf{y} \pmod{\Lambda}$, тогда $\mathbf{0} \neq \mathbf{x}-\mathbf{y} \in \left[-2\left[\frac{\sqrt[s]{q(\Lambda)}}{2}\right]+1; 2\left[\frac{\sqrt[s]{q(\Lambda)}}{2}\right]-1\right]^s$, $\mathbf{x}-\mathbf{y} \in \Lambda$. Отсюда следует, что

$q(\mathbf{x}-\mathbf{y})<q(\Lambda)$, что невозможно. Следовательно, все целые точки гиперболического креста

$$K\left(\left[\frac{\sqrt[s]{q(\Lambda)}}{2}\right]-1\right)\subset\left[-\left[\frac{\sqrt[s]{q(\Lambda)}}{2}\right]+1;\left[\frac{\sqrt[s]{q(\Lambda)}}{2}\right]\right]^s$$

содержатся в полной системе вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ. Поэтому $q_3(\Lambda)\geqslant\left[\frac{\sqrt[s]{q(\Lambda)}}{2}\right]-1$ и теорема доказана. □

3. Концентрическая последовательность сеток

Следуя работе [2], последовательность вложенных обобщенных параллелепипедальных сеток будем называть концентрической.

Пусть даны две целочисленных решетки $\Lambda_1\supset\Lambda_2$ и $\det\Lambda_1<\det\Lambda_2$, тогда для обобщенных параллелепипедальных сеток имеем вложение: $M(\Lambda_1)\subset M(\Lambda_2)$.

Действительно, рассмотрим взаимные решетки Λ_1^* и Λ_2^*:

$$\Lambda_1^*=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^s|\,\forall\mathbf{y}\in\Lambda_1\ \ (\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbb{Z}^s\},\quad \Lambda_2^*=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^s|\,\forall\mathbf{y}\in\Lambda_2\ \ (\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbb{Z}^s\}. \quad (26)$$

Отсюда следует, что $\Lambda_1^*\subset\Lambda_2^*$, а, значит,

$$M(\Lambda_1)=(\Lambda_1^*\cap G_s)\subset M(\Lambda_2)=(\Lambda_2^*\cap G_s)\,.$$

Аналогичное свойство установлено для минимальных гиперболических полных систем вычетов $M^*(\Lambda)$ фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки Λ (см. лемму 1 на стр. 55).

Таким образом, если имеется вложенная последовательность решёток $\Lambda_1\supset\Lambda_2\supset\ldots\supset\Lambda_n\supset\ldots$, то она задает концентрическую последовательность вложенных обобщенных параллелепипедальных сеток.

В частности, если $\mathbb{Z}^s\supset\Lambda_1\supset\Lambda_2\supset\ldots\supset\Lambda_n\supset\ldots$ — бесконечная последовательность целочисленных решеток в $\mathbb{R}^s$, то ей соответствует бесконечная последовательность обобщенных параллелепипедальных сеток:

$$\{\mathbf{0}\}=M(\mathbb{Z}^s)\subset M(\Lambda_1)\subset M(\Lambda_2)\subset\ldots\subset M(\Lambda_n)\subset\ldots$$

в единичном кубе $G_s=[0;1)^s$ и бесконечная последовательность конечных множеств целочисленных векторов $\mathbf{m}$ — минимальных гиперболических полных систем вычетов $M^*(\Lambda_\nu)$ фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки Λ_ν:

$$\{\mathbf{0}\}=M^*(\mathbb{Z}^s)\subset M^*(\Lambda_1)\subset M^*(\Lambda_2)\subset\ldots\subset M^*(\Lambda_\nu)\subset\ldots.$$

4. Тригонометрические суммы и интерполяционные многочлены

При изучении вопросов приближенного интегрирования и интерполирования периодических функций многих переменных естественным образом возникают тригонометрические суммы. Приведем несколько необходимых определений и результатов из работ [5] и [7].

Определение 6. *Тригонометрической суммой сетки M и произвольного целочисленного вектора $\mathbf{m}$ называется величина*

$$S(\mathbf{m}, M) = \sum_{\mathbf{x}\in M} e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})}.$$

Рассмотрим для произвольной целочисленной решетки Λ, целого вектора $\mathbf{m}$ и произвольного вектора $\mathbf{x}$ из взаимной решетки Λ^* величины:

$$\delta_\Lambda(\mathbf{m}) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \mathbf{m}\in\Lambda, \\ 0, & \text{если} \quad \mathbf{m}\in\mathbb{Z}^s\setminus\Lambda, \end{cases} \qquad \delta^*_\Lambda(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \mathbf{x}\in\mathbb{Z}^s, \\ 0, & \text{если} \quad \mathbf{x}\in\Lambda^*\setminus\mathbb{Z}^s. \end{cases}$$

Символ $\delta_\Lambda(\mathbf{m})$ является многомерным обобщением известного теоретико-числового символа Коробова

$$\delta_N(m) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad m\equiv 0 \pmod N, \\ 0, & \text{если} \quad m\not\equiv 0 \pmod N. \end{cases}$$

Определение 7. *Полной линейной кратной тригонометрической суммой целочисленной решетки Λ называется выражение*

$$s(\mathbf{m}, \Lambda) = \sum_{\mathbf{x}\in M(\Lambda)} e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})} = \sum_{\mathbf{x}\in \Lambda^*/\mathbb{Z}^s} e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})},$$

где $\mathbf{m}$ — произвольный целочисленный вектор.

Ясно, что для обобщенной параллелепипедальной сетки $M(\Lambda)$ справедливо равенство $S(\mathbf{m}, M(\Lambda)) = s(\mathbf{m}, \Lambda)$.

Определение 8. *Полной линейной кратной тригонометрической суммой взаимной решетки Λ^* целочисленной решетки Λ называется выражение*

$$s^*(\mathbf{x}, \Lambda) = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^s/\Lambda} e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})} = \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i(\mathbf{m}_j,\mathbf{x})},$$

где $\mathbf{x}$ — произвольный вектор взаимной решетки Λ^* и $\mathbf{m}_0, \ldots, \mathbf{m}_{N-1}$ – полная система вычетов решетки $\mathbb{Z}^s$ по подрешетке Λ.

Справедливы следующие двойственные утверждения.

Теорема 4. *Для* $s(\mathbf{m},\Lambda)$ *справедливо равенство*

$$s(\mathbf{m},\Lambda)=\delta_\Lambda(\mathbf{m})\cdot\det\Lambda.$$

Доказательство. См. [7] стр. 47.

Теорема 5. *Для любой целочисленной решетки* Λ *с* $\det\Lambda=N$ *и для произвольного* $\mathbf{x}\in\Lambda^*$ *справедливо равенство*

$$s^*(\mathbf{x},\Lambda)=\delta^*_\Lambda(\mathbf{x})\cdot\det\Lambda.$$

Доказательство. См. [7] стр. 48.

Как уже отмечалось, класс периодических функций E_s^α состоит из функций $f(\mathbf{x})$ с рядом Фурье

$$f(\mathbf{x})=\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^s}c(\mathbf{m})e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})},$$

у которых для коэффициентов Фурье выполняется оценка

$$c(\mathbf{m})=\int_0^1\ldots\int_0^1 f(\mathbf{x})e^{-2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})}d\mathbf{x}=O\left(\frac{1}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}\right).$$

Класс периодических функций E_s^α относительно нормы

$$||f(\mathbf{x})||_{E_s^\alpha}=\sup_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^s}|c(\mathbf{m})(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha| \tag{27}$$

является несепарабельным банаховым пространством, изоморфным пространству l_0 — пространству всех ограниченных последовательностей комплексных чисел.

Наряду с нормой (27) рассмотрим нормы

$$||f(\mathbf{x})||_C=\sup_{\mathbf{x}\in G_s}|f(\mathbf{x})| \tag{28}$$

и

$$||f(\mathbf{x})||_{l_1}=\sum_{\mathbf{m}=-\infty}^{\infty}|c(\mathbf{m})|,\quad ||f(\mathbf{x})||_{l_2}=\left(\sum_{\mathbf{m}=-\infty}^{\infty}|c(\mathbf{m})|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{29}$$

Относительно норм (28) и (29) класс E_s^α становится незамкнутым линейным подмногообразием пространств непрерывных периодических функций и периодических функций с абсолютно сходящимися рядами Фурье соответственно (см. [6]).

Нетрудно видеть, что справедливы следующие неравенства:

$$||f(\mathbf{x})||_{l_2}\leqslant||f(\mathbf{x})||_C,\quad ||f(\mathbf{x})||_C\leqslant||f(\mathbf{x})||_{l_1},$$
$$||f(\mathbf{x})||_{l_1}\leqslant||f(\mathbf{x})||_{E_s^\alpha}(1+2\zeta(\alpha))^s. \tag{30}$$

Последнее неравенство (30) можно уточнить при дополнительном ограничении, что $c(\mathbf{m}) = 0$ при $\mathbf{m} \in K(t)$. Предварительно сформулируем несколько лемм из работ [3, 4].

Для натурального $t > 1$ положим, что

$$A_j(t) = \sum_{m_1 \ldots m_j > t} \frac{1}{(m_1 \ldots m_j)^\alpha} \quad (\alpha > 1), \tag{31}$$

$$B_j(t) = \sum_{m_1 \ldots m_j \leqslant t} 1, \quad C_j(t) = \sum_{m_1 \ldots m_j \leqslant t} \frac{1}{m_1 \ldots m_j}, \tag{32}$$

суммирование проводится только по натуральным $m_1, \ldots, m_j$.

Так как t – натуральное, то

$$A_1(t) = \sum_{m > t} \frac{1}{m^\alpha} < \int\limits_t^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{(\alpha - 1)t^{\alpha - 1}}, \quad B_1(t) = t, \quad C_1(t) \leqslant \ln t + 1. \tag{33}$$

Лемма 6. *Справедливо неравенство*

$$C_j(t) \leqslant \sum_{k=0}^{j} \frac{C_j^k \ln^k t}{k!}. \tag{34}$$

Доказательство. См. [4].

Лемма 7. *Справедливо неравенство*

$$B_j(t) \leqslant t \sum_{k=0}^{j-1} \frac{C_{j-1}^k \ln^k t}{k!}. \tag{35}$$

Доказательство. См. [4].

Лемма 8. *Справедливо неравенство*

$$A_j(t) \leqslant \frac{1}{t^{\alpha-1}} \left(\frac{\ln^{j-1} t}{(\alpha-1)(j-1)!} + \sum_{m=0}^{j-2} \frac{\ln^m t}{m!} \left(\sum_{k=m}^{j-2} \zeta(\alpha)^{j-2-k} C_k^m \frac{\alpha - 1 + \zeta(\alpha)}{\alpha - 1} + \frac{C_{j-1}^m}{\alpha - 1} \right) \right). \tag{36}$$

Доказательство. См. [4].

Теорема 6. *Пусть натуральное* $t > 1$ *и разложение периодической функции* $f(\mathbf{x}) \in E_s^\alpha$ *имеет вид:*

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m} \notin K(t)} c(\mathbf{m}) e^{2\pi i (\mathbf{m}, \mathbf{x})}. \tag{37}$$

Справедливо неравенство

$$||f(\mathbf{x})||_{l_1} \leqslant \frac{||f(\mathbf{x})||_{E_s^\alpha}}{t^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s \ln^{s-1} t}{(s-1)!(\alpha-1)} + \right.$$
$$\left. + \sum_{m=0}^{s-2} \frac{\ln^m t}{m!} \sum_{k=m}^{s-1} \frac{C_k^m}{\zeta(\alpha)^k} \left(\sum_{j=k+2}^{s} C_s^j 2^j \zeta(\alpha)^{j-2} + \sum_{j=k+1}^{s} C_s^j 2^j \frac{\zeta(\alpha)^{j-1}}{\alpha-1} \right) \right). \tag{38}$$

Доказательство. См. [4].

Рассмотрим для любого натурального t конечномерное подпространство $P^{(t)}$ всех тригонометрических полиномов вида:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m} \in K(t)} c(\mathbf{m}) e^{2\pi i (\mathbf{m}, \mathbf{x})}. \tag{39}$$

Тригонометрический полином

$$f_0(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m} \in K(t)} e^{2\pi i (\mathbf{m}, \mathbf{x})}, \tag{40}$$

очевидно, имеет следующие нормы:

$$\|f_0(\mathbf{x})\|_{l_0} = \sup_{\mathbf{m} \in |K(t)|} |c(\mathbf{m})| = 1, \quad \|f_0(\mathbf{x})\|_C = |K_Z(t)|,$$
$$\|f_0(\mathbf{x})\|_{l_1} = |K_Z(t)|, \quad \|f_0(\mathbf{x})\|_{E_s^\alpha} = t^\alpha. \tag{41}$$

В работе [3] доказаны следующие две теоремы.

Теорема 7. *Справедливо неравенство*

$$|K_Z(t)| \leqslant \frac{2^s}{(s-1)!} t \left(\ln t + \frac{3s}{2} \right)^{s-1} + 1. \tag{42}$$

Доказательство. См. [4].

Теорема 8. *Справедливо неравенство*

$$|K_Z(t)| \geqslant t \frac{2^s \ln^{s-1} t}{(s-1)!} + t(1-(-1)^s) + (-1)^s. \tag{43}$$

Доказательство. См. [4].

Из теоремы 7 и равенств (41) вытекает, что

$$\|f_0(\mathbf{x})\|_{l_0} = \frac{\|f_0(\mathbf{x})\|_{E_s^\alpha}}{t^\alpha},$$
$$\|f_0(\mathbf{x})\|_C = \|f_0(\mathbf{x})\|_{l_1} \leqslant \frac{\|f_0(\mathbf{x})\|_{E_s^\alpha}}{t^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s}{(s-1)!} \left(\ln t + \frac{3s}{2} \right)^{s-1} + 1 \right). \tag{44}$$

Из оценки снизу (43) и равенства (41) следует оценка снизу для норм:

$$\|f_0(\mathbf{x})\|_C = \|f_0(\mathbf{x})\|_{l_1} \geqslant \frac{\|f_0(\mathbf{x})\|_{E_s^\alpha}}{t^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s}{(s-1)!} \ln^{s-1} t + 1 + (-1)^{s-1} + \frac{(-1)^s}{t} \right). \tag{45}$$

Таким образом, оценка сверху (44) и оценка снизу (45) совпадают по порядку относительно t.

Теорема 5 позволяет доказать, что произвольную функцию $f(\mathbf{x})$ на обобщенной параллелепипедальной сетке $M(\Lambda)$ целочисленной решетки Λ с $\det\Lambda = N$ можно разложить в конечный ряд Фурье.

Теорема 9. *Для любой функции $f(\mathbf{x})$ на $M(\Lambda)$ справедливо равенство*

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{2\pi i(\mathbf{x},\mathbf{m}_j)},$$

где

$$c_j = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{y}\in M(\Lambda)} f(\mathbf{y}) e^{-2\pi i(\mathbf{y},\mathbf{m}_j)}.$$

Доказательство. См. [6].

Из этой теоремы сразу следует, что если известны значения периодической функции $f(\mathbf{x})$ в узлах обобщенной параллелепипедальной сетки $M(\Lambda)$ целочисленной решетки Λ и выбрана произвольная полная система вычетов $M^*(\Lambda)$ решетки $\mathbb{Z}^s$ по подрешетке Λ, то следующий тригонометрический полином

$$S_{M(\Lambda),M^*(\Lambda)}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m}\in M^*(\Lambda)} c_{M(\Lambda),M^*(\Lambda)}(\mathbf{m}) e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})}, \tag{46}$$

где

$$c_{M(\Lambda),M^*(\Lambda)}(\mathbf{m}) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{y}\in M(\Lambda)} f(\mathbf{y}) e^{-2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{y})} = \sum_{\mathbf{n}\in\Lambda} c(\mathbf{m}+\mathbf{n}), \tag{47}$$

является интерполяционным для функции $f(\mathbf{x})$.

Тригонометрический полином (46) зависит от полной системы вычетов $M^*(\Lambda)$ решетки $\mathbb{Z}^s$ по подрешетке Λ. Возникает вопрос о том, как оптимально выбирать $M^*(\Lambda)$, чтобы погрешность интерполирования была наименьшей. Ответ на этот вопрос зависит от класса функций, для которого рассматривается данная задача. Мы остановимся на классе E_s^α.

Рассмотрим сначала решетку $N\cdot\mathbb{Z}^s$. Как известно, для любой целочисленной решетки Λ с $\det\Lambda = N$ справедливо включение: $N\cdot\mathbb{Z}^s \subset \Lambda$. В следующей теореме будем использовать обозначения (18) и (19).

Теорема 10. *Для любой периодической функции $f(\mathbf{x}) \in E_s^\alpha$ и интерполяционного полинома $S_{M(N\cdot\mathbb{Z}^s),M^*(N\cdot\mathbb{Z}^s)}(\mathbf{x})$ справедливы неравенства*

$$|c(\mathbf{m}) - c_{M(N\cdot\mathbb{Z}^s),M^*(N\cdot\mathbb{Z}^s)}(\mathbf{m})| \leqslant$$

$$\leqslant ||f(\mathbf{x})||_{E_s^\alpha} \left(1 + \frac{2^\alpha + 2\zeta(\alpha)}{N^\alpha}\right)^{s-1} \frac{s(2^\alpha + 2\zeta(\alpha))}{N^\alpha}, \tag{48}$$

$$||f(\mathbf{x}) - S_{M(N\cdot\mathbb{Z}^s),M^*(N\cdot\mathbb{Z}^s)}(\mathbf{x})||_C \leqslant ||f(\mathbf{x})||_{E_s^\alpha} \frac{4s\alpha(1+2\zeta(\alpha))^{s-1}2^\alpha}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}. \tag{49}$$

Доказательство. См. [8].

Формула (46) задает оператор интерполирования I_Λ на пространстве E_s^α, который каждой функции $f(\mathbf{x}) \in E_s^\alpha$ ставит в соответствие ее интерполяционный многочлен (46). Таким образом,

$$I_\Lambda f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y}\in M(\Lambda)} f(\mathbf{y}) \left(\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{m}\in M^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x}-\mathbf{y})}\right). \tag{50}$$

Лемма 9. *Для любой функции $f(\mathbf{x}) \in E_s^\alpha$ справедливо неравенство*

$$||I_\Lambda f(\mathbf{x})||_{l_1} \leqslant ||f(\mathbf{x})||_{l_1}. \tag{51}$$

Доказательство. См. [8].

Лемма 10. *Для любого тригонометрического полинома $f(\mathbf{x})$ вида*

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m}\in M^*(\Lambda)} c(\mathbf{m}) e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})} \tag{52}$$

справедливо равенство

$$I_\Lambda f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}). \tag{53}$$

Доказательство. См. [8].

Множество тригонометрических полиномов вида (52) обозначим через P_Λ.

Теорема 11. *Для любой целочисленной решетки Λ с $\det\Lambda \geqslant 3^s$ и $q_3(\Lambda) \geqslant 1$ на пространстве $P^{(q_3(\Lambda))}$ для абсолютно минимальной гиперболической полной система вычетов $M_H^*(\Lambda)$ фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки Λ справедливо равенство (53).*

При $t > q_3(\Lambda)$ найдется тригонометрический полином $f(\mathbf{x}) \in P^{(t)}$ такой, что равенство (53) нарушается. В частности,

$$P^{(t)} \cap ker\, I_\Lambda \neq \emptyset.$$

Доказательство. См. [8].

Для любого $\mathbf{m} \in M^*(\Lambda)$ обозначим через $E^{\alpha}_{s,\mathbf{m}}$ банахово подпространство пространства E^{α}_s, состоящее из функций вида

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n}\in\Lambda} c(\mathbf{m}+\mathbf{n}) e^{2\pi i(\mathbf{m}+\mathbf{n},\mathbf{x})}. \tag{54}$$

Ясно, что имеет место разложение E^{α}_s в прямую сумму $E^{\alpha}_{s,\mathbf{m}}$:

$$E^{\alpha}_s = \sum_{\mathbf{m}\in M^*(\Lambda)} \oplus E^{\alpha}_{s,\mathbf{m}}.$$

Отсюда следует, что произвольная функция $f(\mathbf{x}) \in E^{\alpha}_s$ представима в виде сумм

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m}\in M^*(\Lambda)} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}),$$

где

$$f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n}\in\Lambda} c(\mathbf{m}+\mathbf{n}) e^{2\pi i(\mathbf{m}+\mathbf{n},\mathbf{x})}.$$

В работе [6] показано, что для проектора $A_{\mathbf{m}} : f(\mathbf{x}) \to f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})$ имеется конечное представление:

$$A_{\mathbf{m}}\left(f(\mathbf{x})\right) = f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\det\Lambda} \sum_{\mathbf{y}\in M(\Lambda)} f(\{\mathbf{x}+\mathbf{y}\}) e^{-2\pi i(\mathbf{y},\mathbf{m})} \quad (\mathbf{m} \in M^*(\Lambda)).$$

Здесь для произвольного вектора $\mathbf{x}$ под его дробной частью подразумевается вектор $\{\mathbf{x}\} = (\{x_1\}, \ldots, \{x_s\})$.

Теорема 12. *На пространстве E^{α}_s операторы $A_{\mathbf{m}}$ и I_{Λ} коммутируют:*

$$I_{\Lambda}(A_{\mathbf{m}}(f(\mathbf{x}))) = A_{\mathbf{m}}(I_{\Lambda}(f(\mathbf{x}))) = \left(\sum_{\mathbf{n}\in\Lambda} c(\mathbf{m}+\mathbf{n})\right) e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})}. \tag{55}$$

Доказательство. См. [8].

Теорема 13. *На пространстве E^{α}_s ядро $\ker I_{\Lambda}$ оператора интерполирования I_{Λ} имеет нормированный базис:*

$$f_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(q(\mathbf{m}+\mathbf{n}))^{\alpha}} \left(e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})} - e^{2\pi i(\mathbf{m}+\mathbf{n},\mathbf{x})}\right) \quad (\mathbf{m} \in M^*_H(\Lambda),\ \mathbf{n} \in \Lambda\backslash\{\mathbf{0}\}). \tag{56}$$

Доказательство. См. [8].

Следствие 1. *Пространство E_s^α разлагается в прямую сумму ядра $ker\, I_\Lambda$ оператора интерполирования I_Λ и пространства тригонометрических полиномов P_Λ:*

$$E_s^\alpha = ker\, I_\Lambda \oplus P_\Lambda.$$

Простейшую оценку снизу погрешности интерполирования получается с помощью третьего гиперболического параметра решетки.

Теорема 14. *Для любой целочисленной решетки Λ найдется функция $f(\mathbf{x}) \in E_s^\alpha$ такая, что справедлива оценка снизу погрешности интерполирования:*

$$||f(\mathbf{x}) - I_\Lambda(f(\mathbf{x}))||_C \geqslant \frac{2||f(\mathbf{x})||_{E_s^\alpha}}{(q_3(\Lambda)+1)^\alpha}. \tag{57}$$

Доказательство. См. [8].

Теорема 15. *Для любой целочисленной решетки Λ и абсолютно минимальной гиперболической полной системы вычетов $M_H^*(\Lambda)$ фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки Λ для любой функции $f(\mathbf{x}) \in E_s^\alpha$ справедлива оценка сверху погрешности интерполирования:*

$$||f(\mathbf{x}) - I_\Lambda(f(\mathbf{x}))||_C \leqslant \frac{2||f(\mathbf{x})||_{E_s^\alpha}}{(q_3(\Lambda))^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s \ln^{s-1}(q_3(\Lambda))}{(s-1)!(\alpha-1)} + O\left(\ln^{s-2}(q_3(\Lambda))\right)\right). \tag{58}$$

Доказательство. См. [8].

Теорема 16. *Пусть дана последовательность целочисленных решёток $\mathbb{Z}^s \supset \Lambda_0 \supset \Lambda_1 \supset \ldots \supset \Lambda_n \supset \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} q(\Lambda_n) = \infty$, тогда для любой $f(\mathbf{x}) \in E_s^\alpha$ справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \|f(\mathbf{x}) - I_{\Lambda_n} f(\mathbf{x})\|_C = 0. \tag{59}$$

Доказательство. Так как по теореме Минковского о выпуклом теле всегда $q(\Lambda) \leqslant \det \Lambda$, то при $n \to \infty$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \det \Lambda_n = \infty$. По определению 5 (см. стр. 55) и теореме 3 (см. стр. 57) отсюда делаем вывод, что $\lim\limits_{n\to\infty} q_3(\Lambda) = \infty$, но, применяя теорему 15, получаем доказываемое утверждение. □

5. Решение задачи Дирихле для случая тригонометрических полиномов

Прежде всего найдем собственные функции и ядро дифференциального оператора $Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right)$. Для любого $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^s$ зададим величины $Q(\mathbf{m})$ равенствами

$$Q(\mathbf{m}) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \ldots \sum_{j_s=0}^{n_s} a_{j_1,\ldots,j_s} (2\pi i)^{j_1+\ldots+j_s} m_1^{j_1} \ldots m_s^{j_s} = \sum_{j=0}^{n(Q)} A_j(\mathbf{m})(2\pi i)^j, \tag{60}$$

$$A_j(\mathbf{m}) = \sum_{j_1+\ldots+j_s=j} a_{j_1,\ldots,j_s} m_1^{j_1} \ldots m_s^{j_s}. \tag{61}$$

Заметим, что если все коэффициенты $a_{j_1,\ldots,j_s}$ — алгебраические числа, то в силу трансцендентности числа π величина $Q(\mathbf{m}) = 0$ тогда и только тогда, когда $A_j(\mathbf{m}) = 0$, для всех $j = 0, \ldots, n(Q)$.

Лемма 11. *Для любого $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^s$ функция $e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})}$ является собственной функцией оператора $Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right)$ с собственным числом $Q(\mathbf{m})$, если $Q(\mathbf{m}) \neq 0$, или принадлежит ядру Ker_Q оператора, если $Q(\mathbf{m}) = 0$.*

Доказательство. Действительно,

$$\frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}} \cdots \frac{\partial^{j_s}}{\partial x_s^{j_s}} e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})} = (2\pi i)^{j_1+\ldots+j_s} m_1^{j_1} \ldots m_s^{j_s} e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})}.$$

Поэтому

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})} =$$

$$= \sum_{j_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{j_s=0}^{n_s} a_{j_1,\ldots,j_s} (2\pi i)^{j_1+\ldots+j_s} m_1^{j_1} \ldots m_s^{j_s} e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})} =$$

$$= Q(\mathbf{m}) e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})},$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Будем использовать обозначение $\mathbb{K}er_Q$ для самого ядра оператора, а для множества значений $\mathbf{m}$, для которых $e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})} \in \mathbb{K}er_Q$ будем использовать обозначение Ker_Q.

Пусть $S \subset \mathbb{Z}^s$ — произвольное конечное множество целочисленных векторов $\mathbf{m}$. Обозначим через $\mathbb{T}_0(S)$ — пространство всех тригонометрических многочленов с постоянными коэффициентами

$$\mathbb{T}_0(S) = \left\{ P(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m}\in S} b_{\mathbf{m}} e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})} \middle| b_{\mathbf{m}} \in \mathbb{C},\, \mathbf{m} \in S \right\}.$$

Очевидно, что если $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{K}er_Q$ и $f(\mathbf{x}) \neq 0$, то уравнение

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \tag{62}$$

не имеет решений. Более того, пространство $\mathbb{T}_0(S)$ можно представить как прямую сумму подпространств

$$\mathbb{T}_0(S) = \mathbb{T}_0\left(S \setminus Ker_Q\right) \bigoplus \mathbb{T}_0\left(S \bigcap Ker_Q\right)$$

и уравнение (62) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$f(\mathbf{x}) \in \mathbb{T}_0\left(S \setminus Ker_Q\right).$$

Теорема 17. *Для пространства $\mathbb{T}_0(S)$ общим решением дифференциального уравнения*

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}),$$

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m} \in S \setminus Ker_Q} b_{\mathbf{m}} e^{2\pi i (\mathbf{m}, \mathbf{x})} \in \mathbb{T}_0\left(S \setminus Ker_Q\right), \quad -\infty < x_\nu < \infty \quad (\nu = 1, \ldots, s) \tag{63}$$

является тригонометрический многочлен

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m} \in S \setminus Ker_Q} \frac{b_{\mathbf{m}}}{Q(\mathbf{m})} e^{2\pi i (\mathbf{m}, \mathbf{x})} + \sum_{\mathbf{m} \in S \bigcap Ker_Q} c_{\mathbf{m}} e^{2\pi i (\mathbf{m}, \mathbf{x})}, \tag{64}$$

где $c_{\mathbf{m}}$ — произвольные числа.

Доказательство. Рассмотрим произвольный многочлен $u(\mathbf{x}) \in \mathbb{T}_0(S)$:

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m} \in S} c_{\mathbf{m}} e^{2\pi i (\mathbf{m}, \mathbf{x})}.$$

Тогда

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m} \in S} c_{\mathbf{m}} Q(\mathbf{m}) e^{2\pi i (\mathbf{m}, \mathbf{x})} =$$

$$= \sum_{\mathbf{m} \in S \setminus Ker_Q} c_{\mathbf{m}} Q(\mathbf{m}) e^{2\pi i (\mathbf{m}, \mathbf{x})} = f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m} \in S \setminus Ker_Q} b_{\mathbf{m}} e^{2\pi i (\mathbf{m}, \mathbf{x})}.$$

Таким образом, приравнивая коэффициенты тригонометрических многочленов слева и справа, получим

$$c_{\mathbf{m}} = \frac{b_{\mathbf{m}}}{Q(\mathbf{m})}$$

для каждого $\mathbf{m} \in S \setminus Ker_Q$ и $c_{\mathbf{m}}$ — произвольное число, если $\mathbf{m} \in S \bigcap Ker_Q$, что и доказывает утверждение теоремы. □

Обозначим через $J^*_{s,t}$ множество всех целочисленных векторов $\mathbf{j}_{s,t} = (j_1, \ldots, j_s)$, каждый из которых имеет координаты, образующие перестановку чисел 1, 2, …, s такую, что $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_t \leqslant s$, $1 \leqslant j_{t+1} < \ldots < j_s \leqslant s$. Таким образом $|J^*_{s,t}| = C^t_s$ и $J^*_{s,0} = J^*_{s,s} = \{(1, 2, \ldots, s)\}$. Для дальнейшего потребуется явный вид $J^*_{s,s-1}$:

$$J^*_{s,s-1} = \left\{(2, \ldots, s, 1), (1, 3, \ldots, s, 2), \ldots, (1, \ldots, s-2, s, s-1), (1, \ldots, s)\right\},$$

$$|J^*_{s,s-1}| = s.$$

Для произвольного вектора $\mathbf{j}_{s,t} \in J^*_{s,t}$ и многочлена $\varphi(\mathbf{x}) \in \mathbb{T}_0(S)$ определим действие оператора $Pr(\mathbf{j}_{s,t})$ проектирования на пространство $\mathbb{T}_0(S, \mathbf{j}_{s,t})$, где

$$\mathbb{T}_0\left(S, \mathbf{j}_{s,t}\right) =$$

$$= \left\{ P((x_{j_1}, \ldots, x_{j_t})) = \sum_{(m_{j_1}, \ldots, m_{j_t}) \in S(\mathbf{j}_{s,t})} b_{(m_{j_1}, \ldots, m_{j_t})} e^{2\pi i (m_{j_1} x_{j_1} + \ldots + m_{j_t} x_{j_t})} \right|$$

$$\left. b_{(m_{j_1}, \ldots, m_{j_t})} \in \mathbb{C},\, (m_{j_1}, \ldots, m_{j_t}) \in S\left(\mathbf{j}_{s,t}\right) \right\},$$

$$S\left(\mathbf{j}_{s,t}\right) = \{(m_{j_1}, \ldots, m_{j_t}) | (m_1, \ldots, m_s) \in S\},$$

следующим образом

$$Pr(\mathbf{j}_{s,t})\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{(m_{j_1}, \ldots, m_{j_t}) \in S(\mathbf{j}_{s,t})} e^{2\pi i (m_{j_1} x_{j_1} + \ldots + m_{j_t} x_{j_t})} \sum_{\substack{\mathbf{n} \in S, \\ (n_{j_1}, \ldots, n_{j_t}) = (m_{j_1}, \ldots, m_{j_t})}} b_{\mathbf{n}}.$$

Таким образом

$$Pr(\mathbf{j}_{s,0})\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \in S} b_{\mathbf{n}},$$

а

$$Pr(\mathbf{j}_{s,s})\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}).$$

Лемма 12. *Для $u(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x}) \in \mathbb{T}_0(S)$ граничное условие*

$$u(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) \quad \left(\mathbf{x} \in \partial \overline{G_s}\right) \tag{65}$$

выполняется тогда и только тогда, когда для любого t с $0 \leqslant t < s$ и $\mathbf{j}_{s,t} \in J^*_{s,t}$ выполняются соотношения

$$Pr(\mathbf{j}_{s,t})u(\mathbf{x}) = Pr(\mathbf{j}_{s,t})\varphi(\mathbf{x}).$$

Доказательство. Обозначим через $G^0_s(\mathbf{j}_{s,t})$ грань s-мерного единичного куба $\overline{G_s}$ такую, что $x_{j_\nu} = 0$ для $t+1 \leqslant \nu \leqslant s$, а через $G^1_s(\mathbf{j}_{s,t})$ грань s-мерного единичного куба $\overline{G_s}$ такую, что $x_{j_\nu} = 1$ для $t+1 \leqslant \nu \leqslant s$. Ясно, что

$$\partial \overline{G_s} = \bigcup_{0 \leqslant t < s, \mathbf{j}_{s,t} \in J^*_{s,t}} \left(G^0_s(\mathbf{j}_{s,t}) \bigcup G^1_s(\mathbf{j}_{s,t}) \right).$$

Если $\mathbf{x} \in G^0_s(\mathbf{j}_{s,t}) \bigcup G^1_s(\mathbf{j}_{s,t})$, то справедливо равенство $u(\mathbf{x}) = Pr(\mathbf{j}_{s,t})u(\mathbf{x})$, аналогично, $\varphi(\mathbf{x}) = Pr(\mathbf{j}_{s,t})\varphi(\mathbf{x})$. Отсюда следует утверждение леммы. □

Лемма 13. *Для $u(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x}) \in \mathbb{T}_0(S)$:*

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m} \in S} c_{\mathbf{m}} e^{2\pi i (\mathbf{m}, \mathbf{x})}, \quad \varphi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m} \in S} d_{\mathbf{m}} e^{2\pi i (\mathbf{m}, \mathbf{x})}$$

граничное условие (65) выполняется тогда и только тогда, когда для любого $\mathbf{j}_{s,s-1} \in J^*_{s,s-1}$ *и* $(m_{j_1}, \ldots, m_{j_{s-1}}) \in S\left(\mathbf{j}_{s,s-1}\right)$ *выполняются соотношения*

$$\sum_{\substack{\mathbf{n}\in S,\\ (n_{j_1},\ldots,n_{j_{s-1}})=(m_{j_1},\ldots,m_{j_{s-1}})}} c_{\mathbf{n}} = \sum_{\substack{\mathbf{n}\in S,\\ (n_{j_1},\ldots,n_{j_{s-1}})=(m_{j_1},\ldots,m_{j_{s-1}})}} d_{\mathbf{n}}. \tag{66}$$

Доказательство. Действительно,

$$Pr(\mathbf{j}_{s,s-1})u(\mathbf{x}) =$$
$$= \sum_{(m_{j_1},\ldots,m_{j_{s-1}})\in S(\mathbf{j}_{s,s-1})} e^{2\pi i(m_{j_1}x_{j_1}+\ldots+m_{j_{s-1}}x_{j_{s-1}})} \sum_{\substack{\mathbf{n}\in S,\\ (n_{j_1},\ldots,n_{j_{s-1}})=(m_{j_1},\ldots,m_{j_{s-1}})}} c_{\mathbf{n}},$$

$$Pr(\mathbf{j}_{s,s-1})\varphi(\mathbf{x}) =$$
$$= \sum_{(m_{j_1},\ldots,m_{j_{s-1}})\in S(\mathbf{j}_{s,s-1})} e^{2\pi i(m_{j_1}x_{j_1}+\ldots+m_{j_{s-1}}x_{j_{s-1}})} \sum_{\substack{\mathbf{n}\in S,\\ (n_{j_1},\ldots,n_{j_{s-1}})=(m_{j_1},\ldots,m_{j_{s-1}})}} d_{\mathbf{n}}.$$

В силу леммы 12 имеем:

$$\sum_{(m_{j_1},\ldots,m_{j_{s-1}})\in S(\mathbf{j}_{s,s-1})} e^{2\pi i(m_{j_1}x_{j_1}+\ldots+m_{j_{s-1}}x_{j_{s-1}})} \sum_{\substack{\mathbf{n}\in S,\\ (n_{j_1},\ldots,n_{j_{s-1}})=(m_{j_1},\ldots,m_{j_{s-1}})}} c_{\mathbf{n}} =$$
$$= \sum_{(m_{j_1},\ldots,m_{j_{s-1}})\in S(\mathbf{j}_{s,s-1})} e^{2\pi i(m_{j_1}x_{j_1}+\ldots+m_{j_{s-1}}x_{j_{s-1}})} \sum_{\substack{\mathbf{n}\in S,\\ (n_{j_1},\ldots,n_{j_{s-1}})=(m_{j_1},\ldots,m_{j_{s-1}})}} d_{\mathbf{n}},$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Теорема 18. *Для пространства* $\mathbb{T}_0(S)$ *задача Дирихле для дифференциального уравнения с частными производными*

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}),$$
$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m}\in S\setminus Ker_Q} b_{\mathbf{m}} e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})} \in \mathbb{T}_0\left(S \setminus Ker_Q\right), \quad -\infty < x_\nu < \infty \quad (\nu = 1, \ldots, s) \tag{67}$$

с граничным условием

$$u(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) \quad \left(\mathbf{x} \in \partial\overline{G_s}\right), \quad \varphi(\mathbf{x}) \in \mathbb{T}_0(S), \tag{68}$$

где тригонометрический многочлен $\varphi(\mathbf{x})$ *имеет вид*

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m}\in S} d_{\mathbf{m}} e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})}, \tag{69}$$

разрешима тогда и только тогда, когда найдутся $c_{\mathbf{m}}$ ($\mathbf{m} \in S\bigcap Ker_Q$), *для которых для любого* $\mathbf{j}_{s,s-1} \in J^*_{s,s-1}$ *и* $(m_{j_1}, \ldots\ldots, m_{j_{s-1}}) \in S(\mathbf{j}_{s,s-1})$ *выполняются соотношения*

$$\sum_{\substack{\mathbf{n}\in S\setminus Ker_Q,\\ (n_{j_1},\ldots,n_{j_{s-1}})=(m_{j_1},\ldots,m_{j_{s-1}})}} \frac{b_{\mathbf{m}}}{Q(\mathbf{m})} + \sum_{\substack{\mathbf{n}\in S\bigcap Ker_Q,\\ (n_{j_1},\ldots,n_{j_{s-1}})=(m_{j_1},\ldots,m_{j_{s-1}})}} c_{\mathbf{n}} = \\ = \sum_{\substack{\mathbf{n}\in S,\\ (n_{j_1},\ldots,n_{j_{s-1}})=(m_{j_1},\ldots,m_{j_{s-1}})}} d_{\mathbf{n}}, \tag{70}$$

и её решением является тригонометрический многочлен

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m}\in S\setminus Ker_Q} \frac{b_{\mathbf{m}}}{Q(\mathbf{m})} e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})} + \sum_{\mathbf{m}\in S\bigcap Ker_Q} c_{\mathbf{m}} e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})}. \tag{71}$$

Доказательство. Пусть

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m}\in S\setminus Ker_Q} \frac{b_{\mathbf{m}}}{Q(\mathbf{m})} e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})} + \sum_{\mathbf{m}\in S\bigcap Ker_Q} c_{\mathbf{m}} e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})} \tag{72}$$

— общее решение дифференциального уравнения (67). Тогда на основании леммы 13 имеем утверждение теоремы. □

В случае, если $S\bigcap Ker_Q = \{(0,\ldots,0)\}$, то общим решением уравнения (63) является многочлен

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m}\in S\setminus\{\mathbf{0}\}} \frac{b_{\mathbf{m}}}{Q(\mathbf{m})} e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})} + c,$$

где c — произвольная константа.

Рассмотрим, например, задачу Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} = f(\mathbf{x}), \tag{73}$$

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m}\in S\setminus\{\mathbf{0}\}} b_{\mathbf{m}} e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})} \in \mathbb{T}_0\left(S\setminus\{\mathbf{0}\}\right), \quad -\infty < x_\nu < \infty \quad (\nu = 1,\ldots,s) \tag{74}$$

с граничным условием

$$u(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) \quad \left(\mathbf{x}\in\partial\overline{G_s}\right), \quad \varphi(\mathbf{x}) \in \mathbb{T}_0(S), \tag{75}$$

где тригонометрический многочлен $\varphi(\mathbf{x})$ имеет вид

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m}\in S} d_{\mathbf{m}} e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})}. \tag{76}$$

Для оператора Лапласа

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_s}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_s^2}$$

имеем:

$$Q(\mathbf{m})=-(2\pi)^2\cdot(m_1^2+\ldots+m_s^2).$$

Таким образом $Ker_Q=\{\mathbf{0}\}$. Тогда, согласно теореме 17, общим решением дифференциального уравнения (73) является тригонометрический многочлен

$$u(\mathbf{x})=-\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{\mathbf{m}\in S\setminus\{\mathbf{0}\}}\frac{b_{\mathbf{m}}}{m_1^2+\ldots+m_s^2}e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})}+c.$$

Согласно теореме 18 задача Дирихле (73) — (76) разрешима тогда и только тогда, когда существует c_0 такое, что для каждого $\mathbf{j}_{s,s-1}\in J^*_{s,s-1}$ выполнены соотношения

$$-\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{\substack{\mathbf{n}\in S,\\(n_{j_1},\ldots,n_{j_{s-1}})=(m_{j_1},\ldots,m_{j_{s-1}})}}\frac{b_{\mathbf{n}}}{n_1^2+\ldots+n_s^2}=\sum_{\substack{\mathbf{n}\in S,\\(n_{j_1},\ldots,n_{j_{s-1}})=(m_{j_1},\ldots,m_{j_{s-1}})}}d_{\mathbf{n}},$$
$$m_{j_1}^2+\ldots+m_{j_{s-1}}^2\neq 0, \tag{77}$$

$$\sum_{\substack{\mathbf{n}\in S,\\(n_{j_1},\ldots,n_{j_{s-1}})=(m_{j_1},\ldots,m_{j_{s-1}})}}d_{\mathbf{n}}+\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{\substack{\mathbf{n}\in S\setminus\{\mathbf{0}\},\\(n_{j_1},\ldots,n_{j_{s-1}})=(m_{j_1},\ldots,m_{j_{s-1}})}}\frac{b_{\mathbf{n}}}{n_1^2+\ldots+n_s^2}=c_0,$$
$$m_{j_1}^2+\ldots+m_{j_{s-1}}^2=0. \tag{78}$$

Решением задачи Дирихле (73) — (76) является функция

$$u(\mathbf{x})=-\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{\mathbf{m}\in S\setminus\{\mathbf{0}\}}\frac{b_{\mathbf{m}}}{m_1^2+\ldots+m_s^2}e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})}+c_0. \tag{79}$$

Среди всех дифференциальных операторов $Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_s}\right)$ выделим класс $\mathfrak{Q}$ невырожденных дифференциальных операторов, состоящий из операторов $Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_s}\right)$, для которых $Ker_Q=\{(0,\ldots,0)\}$. Важность этого класса операторов объясняется тем, что с точностью до константы решение дифференциального уравнения с частными производными для этих операторов определяется однозначно. Из предыдущего видно, что оператор Лапласа принадлежит классу $\mathfrak{Q}$.

Отметим, что если оператор $Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_s}\right)$ вида (3) невырожденный, то $a_{0,\ldots,0}=0$.

6. Дискретная задача Дирихле с решеткой Λ

Пусть задана целочисленная решетка Λ, которая определяет обобщенную параллелепипедальную сетку $M(\Lambda)$ и абсолютно минимальную гиперболическую полную систему вычетов $M^*_H(\Lambda)$. С задачей Дирихле (10) — (12) свяжем дискретную задачу Дирихле с решеткой Λ, отличие которой от просто задачи Дирихле заключается в том, что дифференциальное уравнение с частными производными и граничное условие ослабляются и задаются не на единичном s-мерном кубе и его границе, а только на конечном множестве $M(\Lambda)$ и его проекциях на грани единичного s-мерного куба. За счет этого решение можно найти в пространстве $\mathbb{T}(M^*_H(\Lambda))$.

Введем следующие обозначения:

Для произвольного вектора $\mathbf{j}_{s,t} \in J^*_{s,t}$ и обобщенной параллелепипедальной сетки $M(\Lambda)$ определим действие оператора $Pr(\mathbf{j}_{s,t})$ проектирования на грань $G_s(\mathbf{j}_{s,t})$, где

$$G_s(\mathbf{j}_{s,t}) = \left\{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_s) | (x_{j_1}, \ldots, x_{j_t}) \in \overline{G_t},\, x_{j_{t+1}} = \ldots = x_{j_s} = 0\right\},$$

следующим образом

$$Pr(\mathbf{j}_{s,t})M(\Lambda) = \left\{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_s) \left| \begin{array}{c} \mathbf{y} \in M(\Lambda),\, (x_{j_1}, \ldots, x_{j_t}) = (y_{j_1}, \ldots, y_{j_t}), \\ x_{j_{t+1}} = \ldots = x_{j_s} = 0 \end{array} \right.\right\}.$$

Пространство E^α_s представим в виде прямой суммы $E^\alpha_s = E^{\alpha,\,Q}_s \bigoplus \mathbb{K}er_Q$, где

$$E^{\alpha,\,Q}_s = \left\{ f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^s \setminus Ker_Q} c(\mathbf{m}) e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})} \right| \left. f(\mathbf{x}) \in E^\alpha_s \right\},$$

$$\mathbb{K}er_Q = \left\{ f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m} \in Ker_Q} c(\mathbf{m}) e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})} \right| \left. f(\mathbf{x}) \in E^\alpha_s \right\}.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение с частными производными

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$$

разрешимо только для функций $f(\mathbf{x}) \in E^{\alpha,\,Q}_s$.

Прежде всего рассмотрим дискретную задачу для дифференциального уравнения с частными производными.

Определение 9. *Дискретной задачей с решеткой Λ для дифференциального уравнения с частными производными называется уравнение*

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in M(\Lambda), \tag{80}$$

$$f(\mathbf{x}) \in E^{\alpha,Q}_s, \tag{81}$$

Решением дискретной задачи с решеткой Λ для дифференциального уравнения с частными производными назовем тригонометрический многочлен $u(\mathbf{x}) \in \mathbb{T}(M^*(\Lambda))$, удовлетворяющий уравнению (80) с функцией (81).

Определение 10. *Дискретной задачей Дирихле с решеткой Λ называется уравнение*

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in M(\Lambda), \tag{82}$$

$$f(\mathbf{x}) \in E_s^{\alpha, Q}, \tag{83}$$

с дискретными граничными условиями

$$u(\mathbf{x}) = I_\Lambda \varphi(\mathbf{x}), \quad \left(\mathbf{x} \in \partial\overline{G_s}\right), \tag{84}$$

где $\varphi(\mathbf{x})$ — периодическая функция из класса E_s^α $(\alpha > m(Q)+1)$, а $I_\Lambda \varphi(\mathbf{x})$ — её интерполяционный многочлен,

$$I_\Lambda \varphi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m} \in M^*(\Lambda)} d(\mathbf{m}) e^{2\pi i (\mathbf{m}, \mathbf{x})},$$

где

$$d(\mathbf{m}) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{y} \in M(\Lambda)} \varphi(\mathbf{y}) e^{-2\pi i (\mathbf{m}, \mathbf{y})}, \quad N = |M(\Lambda)|.$$

Решением дискретной задачи Дирихле с решеткой Λ назовем тригонометрический многочлен $u(\mathbf{x}) \in \mathbb{T}(M^*(\Lambda))$, удовлетворяющий уравнению (82) с функцией (83) и с дискретными граничными условиями (84).

Таким образом, дискретную задачу Дирихле с решеткой Λ для дифференциального уравнения с частными производными можно рассматривать как приближение решения задачи Дирихле (10) — (12). Вопрос о сходимости последовательности решений дискретных задач Дирихле с последовательностью вложенных решеток $\Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \ldots \supset \Lambda_n \supset \ldots$ будет рассмотрен в последнем разделе.

Для невырожденных операторов $Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) \in \mathfrak{Q}$ имеем $\mathbb{K}er_Q = \mathbb{C}$ как множество функций и $Ker_Q = \{\mathbf{0}\}$ как множество тех $\mathbf{m}$, для которых $e^{2\pi i (\mathbf{m}, \mathbf{x})} \in \mathbb{K}er_Q$. В этом случае для краткости будем писать $E_s^{*\alpha} = E_s^{\alpha, Q}$. Другими словами, класс функций $E_s^{*\alpha}$ состоит из всех функций $f(\mathbf{x}) \in E_s^\alpha$, у которых $c(\mathbf{0}) = 0$.

Отметим одну особенность оператора интерполирования по сетке $M(\Lambda)$. Если $f(\mathbf{x}) \in E_s^{*\alpha}$, то интерполяционный многочлен $I_\Lambda f(\mathbf{x})$ не обязан принадлежать $E_s^{*\alpha}$. Действительно, для функции $f(\mathbf{x}) \in E_s^{*\alpha}$,[3]

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^s}{}' c(\mathbf{m}) e^{2\pi i (\mathbf{m}, \mathbf{x})}$$

[3]Здесь и далее символ $\sum'$ означает, что из области суммирования исключена точка $\mathbf{n} = \mathbf{0}$.

имеем

$$I_\Lambda f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m}\in M^*(\Lambda)} b(\mathbf{m}) e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})},$$

где

$$b(\mathbf{m}) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{y}\in M(\Lambda)} f(\mathbf{y}) e^{-2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{y})}, \quad N = |M(\Lambda)|$$

и на основании теоремы 4 (см. стр. 60) имеем

$$b(\mathbf{0}) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{y}\in M(\Lambda)} f(\mathbf{y}) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{y}\in M(\Lambda)} \sideset{}{'}\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^s} c(\mathbf{m}) e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})} =$$
$$= \sideset{}{'}\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^s} c(\mathbf{m}) \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{y}\in M(\Lambda)} e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})} =$$
$$= \sideset{}{'}\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^s} c(\mathbf{m}) \frac{1}{N} s(\mathbf{m},\Lambda) = \sideset{}{'}\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^s} c(\mathbf{m}) \delta_\Lambda(\mathbf{m}) = \sideset{}{'}\sum_{\mathbf{m}\in\Lambda} c(\mathbf{m}).$$

Поэтому коэффициент $b(\mathbf{0})$ не обязан равняться 0.

Теорема 19. *Решением дискретной задачи с решеткой Λ для дифференциального уравнения с частными производными*

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{y}\in M(\Lambda)} f(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in M(\Lambda), \tag{85}$$

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) \in \mathfrak{Q}, \ \ f(\mathbf{x}) \in E_s^{*\alpha}, \tag{86}$$

является тригонометрический многочлен

$$u(\mathbf{x}) = \sideset{}{'}\sum_{\mathbf{m}\in M^*(\Lambda)} \frac{b(\mathbf{m})}{Q(\mathbf{m})} e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})} + c, \tag{87}$$

где c — произвольное число и

$$b(\mathbf{m}) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum\limits_{\mathbf{y}\in M(\Lambda)} f(\mathbf{y}) e^{-2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{y})}, & \textit{при } \mathbf{m} \neq \mathbf{0}; \\ 0, & \textit{при } \mathbf{m} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим интерполяционный многочлен для функции $f(\mathbf{x})$

$$I_\Lambda f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m}\in M^*(\Lambda)} b(\mathbf{m}) e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})},$$

где

$$b(\mathbf{m}) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{y}\in M(\Lambda)} f(\mathbf{y}) e^{-2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{y})}.$$

Поскольку $b(\mathbf{0}) = \frac{1}{N} \sum\limits_{\mathbf{y}\in M(\Lambda)} f(\mathbf{y})$, то для функции $f^*(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \frac{1}{N} \sum\limits_{\mathbf{y}\in M(\Lambda)} f(\mathbf{y})$ интерполяционный многочлен имеет вид

$$I_\Lambda f^*(\mathbf{x}) = {\sum_{\mathbf{m}\in M^*(\Lambda)}}' b(\mathbf{m}) e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})}.$$

Из теоремы 17 в случае $S = M^*(\Lambda)$ имеем доказываемое утверждение. □

Теорема 20. *Дискретная задача Дирихле с решёткой Λ для дифференциального уравнения с частными производными*

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{y}\in M(\Lambda)} f(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in M(\Lambda), \tag{88}$$

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) \in \mathfrak{Q}, \ \ f(\mathbf{x}) \in E_s^{*\alpha}, \tag{89}$$

с дискретными граничными условиями

$$u(\mathbf{x}) = I_\Lambda \varphi(\mathbf{x}), \quad \left(\mathbf{x} \in \partial\overline{G_s}\right), \tag{90}$$

где $\varphi(\mathbf{x})$ — периодическая функция из класса E_s^α ($\alpha > m(Q)+1$), а $I_\Lambda\varphi(\mathbf{x})$ — её интерполяционный многочлен,

$$I_\Lambda \varphi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m}\in M^*(\Lambda)} d(\mathbf{m}) e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})},$$

где

$$d(\mathbf{m}) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{y}\in M(\Lambda)} \varphi(\mathbf{y}) e^{-2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{y})}, \quad N = |M(\Lambda)|$$

разрешима тогда и только тогда, когда существует c_Λ такое, что для каждого $\mathbf{j}_{s,s-1} \in J^*_{s,s-1}$ выполнены соотношения

$$\sum_{\substack{\mathbf{n}\in M^*(\Lambda),\\ (n_{j_1},\ldots,n_{j_{s-1}})=(m_{j_1},\ldots,m_{j_{s-1}})}} \frac{b(\mathbf{n})}{Q(\mathbf{n})} = \sum_{\substack{\mathbf{n}\in M^*(\Lambda),\\ (n_{j_1},\ldots,n_{j_{s-1}})=(m_{j_1},\ldots,m_{j_{s-1}})}} d(\mathbf{n}),$$
$$m_{j_1}^2 + \ldots + m_{j_{s-1}}^2 \neq 0, \tag{91}$$

$$\sum_{\substack{\mathbf{n}\in M^*(\Lambda),\\ (n_{j_1},\ldots,n_{j_{s-1}})=(m_{j_1},\ldots,m_{j_{s-1}})}} d(\mathbf{n}) + {\sum_{\substack{\mathbf{n}\in M^*(\Lambda),\\ (n_{j_1},\ldots,n_{j_{s-1}})=(m_{j_1},\ldots,m_{j_{s-1}})}}}' \frac{b(\mathbf{n})}{Q(\mathbf{n})} = c_\Lambda,$$
$$m_{j_1}^2 + \ldots + m_{j_{s-1}}^2 = 0, \tag{92}$$

где

$$b(\mathbf{n}) = \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{y}\in M(\Lambda)} f(\mathbf{y})e^{-2\pi i(\mathbf{n},\mathbf{y})}.$$

Решением дискретной задачи Дирихле с решёткой Λ (88) — (90) является функция

$$u(\mathbf{x}) = {\sum_{\mathbf{m}\in M^*(\Lambda)}}' \frac{b(\mathbf{m})}{Q(\mathbf{m})}e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})} + c_\Lambda, \tag{93}$$

Доказательство. Согласно теореме 18 в случае $S = M^*(\Lambda)$ и $Ker_Q = \{\mathbf{0}\}$ имеем доказываемое утверждение. $\square$

Рассмотрим пространство тригонометрических многочленов $\mathbb{T}^*(M^*(\Lambda))$, состоящее из всех тригонометрических многочленов $P(\mathbf{x})$ вида

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m}\in M^*(\Lambda)\setminus\{\mathbf{0}\}} b(\mathbf{m})e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})} = {\sum_{\mathbf{m}\in M^*(\Lambda)}}' b(\mathbf{m})e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})}.$$

В пространстве тригонометрических многочленов $\mathbb{T}^*(M^*(\Lambda))$ рассмотрим базис, состоящий из функций

$$L_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{N}{\sum_{\mathbf{m}\in M^*(\Lambda)}}' e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x}-\mathbf{y})}, \quad \mathbf{y}\in M(\Lambda),$$

которые выделяются характеристическим свойством

$$L_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1-\frac{1}{N}, & \text{при } \mathbf{x}=\mathbf{y}, \\ -e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})}, & \text{при } \mathbf{x}\neq\mathbf{y},\ \mathbf{x}\in M(\Lambda). \end{cases}$$

Обозначим через $U_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) \in \mathbb{T}^*(M^*(\Lambda))$ решение дифференциального уравнения с частными производными

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_s}\right)u(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in M(\Lambda). \tag{94}$$

Таким образом,

$$U_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{N}{\sum_{\mathbf{m}\in M^*(\Lambda)}}' \frac{e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{Q(\mathbf{m})}$$

и общее решение дискретной задачи с решеткой Λ дифференциального уравнения с частными производными

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_s}\right)u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{y}\in M(\Lambda)} f(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x}\in M(\Lambda) \tag{95}$$

можно записать через базисные функции следующим образом

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y}\in M(\Lambda)} f(\mathbf{y})U_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) + c,$$

где c — произвольное число.

7. Решение задачи Дирихле для общего периодического случая

Введем в рассмотрение новый класс функций $E_s^\alpha(Q)$, где

$$Q = Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_s=0}^{n_s} a_{j_1,\dots,j_s} \frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}} \dots \frac{\partial^{j_s}}{\partial x_s^{j_s}}$$

— дифференциальный оператор порядка $n = n_1 + \ldots + n_s$.

Определение 11. *Периодическая функция $\varphi(x_1, \dots, x_s)$ с периодом 1 по каждой переменной принадлежит классу $E_s^\alpha(Q)$, если*

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^s} c_{\mathbf{m}} e^{2\pi i (\mathbf{m}, \mathbf{x})}$$

и для коэффициентов Фурье выполняется оценка

$$|c_{\mathbf{m}}| \leqslant \frac{\|\varphi\|_{E_s^\alpha(Q)}}{(\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha \cdot \overline{Q(\mathbf{m})}}. \tag{96}$$

Величина

$$\|\varphi\|_{E_s^\alpha(Q)} = \sup_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^s} |c_{\mathbf{m}} \cdot (\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha \cdot \overline{Q(\mathbf{m})}| < \infty, \tag{97}$$

$$Q(\mathbf{m}) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_s=0}^{n_s} a_{j_1,\dots,j_s} (2\pi i)^{j_1+\dots+j_s} m_1^{j_1} \dots m_s^{j_s}. \tag{98}$$

является нормой на пространстве $E_s^\alpha(Q)$, относительно которой оно является несепарабельным банаховым пространством.

Положим

$$Q^*(\mathbf{m}) = \max_{q(\mathbf{n}) \leqslant q(\mathbf{m})} \overline{Q(\mathbf{n})^{-1}}.$$

Заметим, что для любого $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^s$ справедливо неравенство $Q^*(\mathbf{m}) \geqslant 1$.

Определение 12. *Периодическая функция $\varphi(x_1, \dots, x_s)$ с периодом 1 по каждой переменной принадлежит классу $E_s^{+\alpha}(Q)$, если*

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^s} c_{\mathbf{m}} e^{2\pi i (\mathbf{m}, \mathbf{x})}$$

и для коэффициентов Фурье выполняется оценка

$$|c_{\mathbf{m}}| \leqslant \frac{\|\varphi\|_{E_s^{+\alpha}(Q)}}{(\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha \cdot Q^*(\mathbf{m})}. \tag{99}$$

Величина

$$\|\varphi\|_{E_s^{+\alpha}(Q)} = \sup_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^s} |c_{\mathbf{m}} \cdot (\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^{\alpha} \cdot Q^*(\mathbf{m})| < \infty. \tag{100}$$

является нормой на пространстве $E_s^{+\alpha}(Q)$, относительно которой оно является несепарабельным банаховым пространством.

Теорема 21. *Для пространства $E_s^{\alpha}(Q)$ общим решением дифференциального уравнения*

$$\begin{gathered} Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_s}\right)u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}),\\ -\infty < x_\nu < \infty \quad (\nu = 1,\ldots,s),\\ f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^s\setminus\{\mathbf{0}\}} b_{\mathbf{m}} e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})}, \quad f(\mathbf{x}) \in E_s^{+\alpha}(Q) \end{gathered} \tag{101}$$

является периодическая функция

$$u(\mathbf{x}) = {\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^s}}' \frac{b_{\mathbf{m}}}{Q(\mathbf{m})} e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})} + c, \quad u(\mathbf{x}) \in E_s^{\alpha}(Q), \tag{102}$$

где c — произвольное число и ряды в правых частях (101) и (102) абсолютно сходятся.

Доказательство. Рассмотрим произвольную периодическую функцию $u(\mathbf{x}) \in E_s^{\alpha}(Q)$:

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^s} c_{\mathbf{m}} e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})}, \quad c_{\mathbf{m}} \in \mathbb{C},\ \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^s.$$

Тогда

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_s}\right)u(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^s} c_{\mathbf{m}} Q(\mathbf{m}) e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})}.$$

Таким образом, приравнивая коэффициенты тригонометрических рядов Фурье, получим для каждого вектора $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^s \setminus \{\mathbf{0}\}$ уравнение $c_{\mathbf{m}} Q(\mathbf{m}) = b_{\mathbf{m}}$, решение которого имеет вид $c_{\mathbf{m}} = \frac{b_{\mathbf{m}}}{Q(\mathbf{m})}$.

Далее заметим, в силу условия

$$|b_{\mathbf{m}}| \leqslant \frac{C}{(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^{\alpha} \cdot Q^*(\mathbf{m})}$$

имеем

$$\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^s} \left|b_{\mathbf{m}} e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})}\right| \leqslant \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^s} \frac{C}{(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^{\alpha}} = C(1+2\zeta(\alpha))^s, \tag{103}$$

$$\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^s} \left|\frac{b_{\mathbf{m}}}{Q(\mathbf{m})} e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})}\right| \leqslant \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^s} \frac{C}{(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^{\alpha} \cdot |Q(\mathbf{m})| \cdot Q^*(\mathbf{m})} \leqslant C(1+2\zeta(\alpha))^s, \tag{104}$$

что и доказывает утверждение теоремы. □

Теорема 22. *Для пространства $E_s^\alpha(Q)$ задача Дирихле для дифференциального уравнения*

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_s}\right)u(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}),$$
$$-\infty<x_\nu<\infty\quad(\nu=1,\dots,s),$$
$$f(\mathbf{x})=\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^s}{}' b_{\mathbf{m}}e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})} \tag{105}$$

с граничным условием

$$u(\mathbf{x})=\varphi(\mathbf{x})\quad\left(\mathbf{x}\in\partial\overline{G_s}\right),\quad\varphi(\mathbf{x})\in E_s^\alpha, \tag{106}$$

где периодическая функция $\varphi(\mathbf{x})$ имеет вид

$$\varphi(\mathbf{x})=\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^s}d_{\mathbf{m}}e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})} \tag{107}$$

разрешима тогда и только тогда, когда найдётся c_0, для которого для любого $\mathbf{j}_{s,s-1}\in J^*_{s,s-1}$ и $(m_{j_1},\dots\dots,m_{j_{s-1}})\in\mathbb{Z}^s(\mathbf{j}_{s,s-1})$ выполняются соотношения

$$\sum_{\substack{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^s,\\(n_{j_1},\dots,n_{j_{s-1}})=(m_{j_1},\dots,m_{j_{s-1}})}}\frac{b_{\mathbf{n}}}{Q(\mathbf{n})}=\sum_{\substack{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^s,\\(n_{j_1},\dots,n_{j_{s-1}})=(m_{j_1},\dots,m_{j_{s-1}})}}d_{\mathbf{n}},$$
$$m_{j_1}^2+\ldots+m_{j_{s-1}}^2\neq0, \tag{108}$$

$$\sum_{\substack{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^s,\\(n_{j_1},\dots,n_{j_{s-1}})=(m_{j_1},\dots,m_{j_{s-1}})}}d_{\mathbf{n}}+\sum_{\substack{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^s,\\(n_{j_1},\dots,n_{j_{s-1}})=(m_{j_1},\dots,m_{j_{s-1}})}}{}'\frac{b_{\mathbf{n}}}{Q(\mathbf{n})}=c_0,$$
$$m_{j_1}^2+\ldots+m_{j_{s-1}}^2=0. \tag{109}$$

Решением задачи Дирихле (105) — (107) является периодическая функция

$$u(\mathbf{x})=\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^s}{}'\frac{b_{\mathbf{m}}}{Q(\mathbf{m})}e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})}+c_0, \tag{110}$$

Доказательство. На границе $\partial\overline{G_s}$ функция $u(\mathbf{x})$ имеет вид

$$Pr(\mathbf{j}_{s,s-1})u(\mathbf{x})=$$
$$=\sum_{(m_{j_1},\dots,m_{j_{s-1}})\in Z^s(\mathbf{j}_{s,s-1})}{}' e^{2\pi i(m_{j_1}x_{j_1}+\ldots+m_{j_{s-1}}x_{j_{s-1}})}\sum_{\substack{\mathbf{n}\in Z^s,\\(n_{j_1},\dots,n_{j_{s-1}})=(m_{j_1},\dots,m_{j_{s-1}})}}{}'\frac{b_{\mathbf{m}}}{Q(\mathbf{m})}+c_0.$$

Аналогично для функции $\varphi(\mathbf{x})$

$$Pr(\mathbf{j}_{s,s-1})\varphi(\mathbf{x})=$$
$$=\sum_{(m_{j_1},\dots,m_{j_{s-1}})\in Z^s(\mathbf{j}_{s,s-1})}e^{2\pi i(m_{j_1}x_{j_1}+\ldots+m_{j_{s-1}}x_{j_{s-1}})}\sum_{\substack{\mathbf{n}\in Z^s,\\(n_{j_1},\dots,n_{j_{s-1}})=(m_{j_1},\dots,m_{j_{s-1}})}}d_{\mathbf{n}}.$$

Приравнивая коэффиценты рядов Фурье получим утверждение теоремы.□

8. Погрешность приближенного решения задачи Дирихле

Пусть задана целочисленная решетка Λ и $M^*(\Lambda) = M^*_H(\Lambda)$ — абсолютно минимальная гиперболическая полная система вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ. Согласно теореме 20 (см. стр. 76) решением дискретной задачи Дирихле (88) — (90) с решеткой Λ является тригонометрический многочлен

$$u_\Lambda(\mathbf{x}) = {\sum_{\mathbf{m}\in M^*(\Lambda)}}' \frac{b(\mathbf{m})}{Q(\mathbf{m})} e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})} + c_\Lambda, \tag{111}$$

где

$$b(\mathbf{m}) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{y}\in M(\Lambda)} f(\mathbf{y}) e^{-2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{y})},$$

$$c_\Lambda = \sum_{\substack{\mathbf{n}\in M^*(\Lambda),\\ \mathbf{n}=(n_1,0,\ldots,0)}} d(\mathbf{n}) + {\sum_{\substack{\mathbf{n}\in M^*(\Lambda),\\ \mathbf{n}=(n_1,0,\ldots,0)}}}' \frac{b(\mathbf{n})}{Q(\mathbf{n})}.$$

Естественно рассматривать тригонометрический многочлен $u_\Lambda(\mathbf{x})$ как приближение к решению $u(\mathbf{x})$ задачи Дирихле (105) — (106). Следующая теорема отвечает на вопрос о точности этого приближения.

Теорема 23. *Для произвольной целочисленной решетки Λ для решения (110) задачи Дирихле (105) — (106) справедливо неравенство*

$$\|u(\mathbf{x}) - u_\Lambda(\mathbf{x})\|_C \leqslant \frac{2\|\varphi(\mathbf{x})\|_{E_s^\alpha(Q)}}{q_3(\Lambda)^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s \ln^{s-1} q_3(\Lambda)}{(s-1)!(\alpha-1)} + \right.$$
$$\left. + \sum_{m=0}^{s-2} \frac{\ln^m q_3(\Lambda)}{m!} \sum_{k=m}^{s-1} \frac{C_k^m}{\zeta(\alpha)^k} \left(\sum_{j=k+2}^{s} C_s^j 2^j \zeta(\alpha)^{j-2} + \sum_{j=k+1}^{s} C_s^j 2^j \frac{\zeta(\alpha)^{j-1}}{\alpha-1} \right) \right). \tag{112}$$

Доказательство. Действительно,

$$u(\mathbf{x}) = {\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^s}}' \frac{b_{\mathbf{m}}}{Q(\mathbf{m})} e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})} + c_0,$$

$$u_\Lambda(\mathbf{x}) = {\sum_{\mathbf{m}\in M^*(\Lambda)}}' \frac{b(\mathbf{m})}{Q(\mathbf{m})} e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})} + c_\Lambda.$$

Поэтому

$$u(\mathbf{x}) - u_\Lambda(\mathbf{x}) = {\sum_{\mathbf{m}\in M^*(\Lambda)}}' \frac{b_{\mathbf{m}} - b(\mathbf{m})}{Q(\mathbf{m})} e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})} + \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^s\setminus M^*(\Lambda)} \frac{b_{\mathbf{m}}}{Q(\mathbf{m})} e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})} + c_0 - c_\Lambda.$$

Оценим по отдельности сначала первую сумму, а затем остаточный ряд и последнюю разность.

Имеем для суммы:

$$S_1 = \left| \sum_{\mathbf{m}\in M^*(\Lambda)}{}' \frac{b_{\mathbf{m}} - b(\mathbf{m})}{Q(\mathbf{m})} e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})} \right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\mathbf{m}\in M^*(\Lambda)} \sum_{\mathbf{n}\in\Lambda}{}' \frac{|b_{\mathbf{m}+\mathbf{n}}|}{|Q(\mathbf{m})|} = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^s\setminus M^*(\Lambda)} \frac{|b_{\mathbf{n}}|}{|Q(\mathbf{m}(\mathbf{n},\Lambda))|},$$

где $\mathbf{m}(\mathbf{n},\Lambda) \in M^*(\Lambda)$ и $\mathbf{n} - \mathbf{m}(\mathbf{n},\Lambda) \in \Lambda$, то есть $\mathbf{n} \equiv \mathbf{m}(\mathbf{n},\Lambda) \pmod{\Lambda}$. Отсюда следует, что

$$S_1 \leqslant \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^s\setminus M^*(\Lambda)} \frac{\|f(\mathbf{x})\|_{E_s^{+\alpha}(Q)}}{(\overline{n_1}\dots\overline{n_s})^\alpha \cdot Q^*(\mathbf{n}) \cdot |Q(\mathbf{m}(\mathbf{n},\Lambda))|} \leqslant$$
$$\leqslant \|f(\mathbf{x})\|_{E_s^{+\alpha}(Q)} \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^s\setminus M^*(\Lambda)} \frac{1}{(\overline{n_1}\dots\overline{n_s})^\alpha},$$

так как $Q^*(\mathbf{n}) \cdot |Q(\mathbf{m}(\mathbf{n},\Lambda))| \leqslant 1$ по определению величины $Q^*(\mathbf{n})$ и неравенству $q(\mathbf{m}(\mathbf{n},\Lambda)) \leqslant q(\mathbf{n})$.

Аналогично оценивается остаточный ряд:

$$S_2 = \left| \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^s\setminus M^*(\Lambda)} \frac{b_{\mathbf{m}}}{Q(\mathbf{m})} e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})} \right| \leqslant \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^s\setminus M^*(\Lambda)} \frac{\|f(\mathbf{x})\|_{E_s^{\alpha}(Q)}}{(\overline{m_1}\dots\overline{m_s})^\alpha \cdot |Q(\mathbf{m})| \cdot \overline{\overline{Q(\mathbf{m})}^{-1}}} \leqslant$$
$$\leqslant \|f(\mathbf{x})\|_{E_s^{\alpha}(Q)} \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^s\setminus M^*(\Lambda)} \frac{1}{(\overline{m_1}\dots\overline{m_s})^\alpha}.$$

Теперь рассмотрим разность

$$c_0 - c_\Lambda = \sum_{\substack{\mathbf{n}\in Z^s,\\ \mathbf{n}=(n_1,0,\dots,0)}} d_{\mathbf{n}} + \sum_{\substack{\mathbf{n}\in Z^s,\\ \mathbf{n}=(n_1,0,\dots,0)}}{}' \frac{b_{\mathbf{n}}}{Q(\mathbf{n})} - \left(\sum_{\substack{\mathbf{n}\in M^*(\Lambda),\\ \mathbf{n}=(n_1,0,\dots,0)}} d(\mathbf{n}) + \sum_{\substack{\mathbf{n}\in M^*(\Lambda),\\ \mathbf{n}=(n_1,0,\dots,0)}}{}' \frac{b(\mathbf{n})}{Q(\mathbf{n})} \right) =$$
$$= \sum_{\substack{\mathbf{n}\in M^*(\Lambda),\\ \mathbf{n}=(n_1,0,\dots,0)}} (d_{\mathbf{n}} - d(\mathbf{n})) + \sum_{\substack{\mathbf{n}\in Z^s\setminus M^*(\Lambda),\\ \mathbf{n}=(n_1,0,\dots,0)}} d_{\mathbf{n}} + \sum_{\substack{\mathbf{n}\in M^*(\Lambda),\\ \mathbf{n}=(n_1,0,\dots,0)}}{}' \frac{b_{\mathbf{n}} - b(\mathbf{n})}{Q(\mathbf{n})} + \sum_{\substack{\mathbf{n}\in Z^s\setminus M^*(\Lambda),\\ \mathbf{n}=(n_1,0,\dots,0)}} \frac{b_{\mathbf{n}}}{Q(\mathbf{n})}.$$

Очевидно, что оценки данных сумм аналогичны соответствующим оценкам сумм S_1 и S_2. Отличие состоит лишь в том, что суммирование происходит по одной переменной.

Из теоремы 6 (см. стр. 61) при $t = q_3(\Lambda)$ следует оценка

$$|u(\mathbf{x}) - u_\Lambda(\mathbf{x})| \leqslant \frac{2\|\varphi(\mathbf{x})\|_{E_s^\alpha(Q)}}{q_3(\Lambda)^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s \ln^{s-1} q_3(\Lambda)}{(s-1)!(\alpha-1)} + \right.$$
$$\left. + \sum_{m=0}^{s-2} \frac{\ln^m q_3(\Lambda)}{m!} \sum_{k=m}^{s-1} \frac{C_k^m}{\zeta(\alpha)^k} \left(\sum_{j=k+2}^{s} C_s^j 2^j \zeta(\alpha)^{j-2} + \sum_{j=k+1}^{s} C_s^j 2^j \frac{\zeta(\alpha)^{j-1}}{\alpha-1} \right) \right),$$

что и доказывает утверждение теоремы.□

9. Заключение

В работе [9] Н. М. Коробов рассмотрел решение задачи Дирихле с нулевым граничным условием для уравнения Пуассона с правой частью из класса E_s^α:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} = f(\mathbf{x}),$$
$$u(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}) \in E_s^\alpha,$$
$$f(x_1, \ldots, -x_j, \ldots, x_s) = -f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_s) \quad (j = 1, \ldots, s),$$
$$u(\mathbf{x}) = 0 \text{ при } x_1(1 - x_1) \cdot \ldots \cdot x_s(1 - x_s) = 0.$$

В данной работе метод Н. М. Коробова был обобщён на случай использования обобщённых параллелепипедальных сеток $M(\Lambda)$ целочисленных решеток Λ. При этом рассмотрена более общая задача с дифференциальным оператором

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \ldots \sum_{j_s=0}^{n_s} a_{j_1,\ldots,j_s} \frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}} \ldots \frac{\partial^{j_s}}{\partial x_s^{j_s}}$$

и ненулевыми граничными условиями. Условие нечётности функции $f(\mathbf{x})$ также не требуется.

Особое внимание уделено классу невырожденных дифференциальных операторов, состоящему из операторов $Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right)$ с нулевым ядром. Важность этого класса операторов объясняется тем, что с точностью до константы решение дифференциального уравнения с частными производными для этих операторов определяется однозначно. Для этого класса дифференциальных операторов получено приближённое решение задачи Дирхле с помощью обобщенной параллелепипедальной сетки $M(\Lambda)$ целочисленной решетки Λ для некоторого класса периодических функций и показано, что при использовании бесконечной последовательности вложенных обобщенных параллелепипедальных сеток будет иметь место достаточно быстрая сходимость приближённого решения к функции $u(\mathbf{x})$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rodionov A. V. Number theoretic metods for solving partial differential equations // Proceedings XII Iinternatioonal Conference Algebra and Number Theory: Modern Problems and Application, dedicated to 80-th anniversary of Professor V. N. Latyshev, 2014, Tula, pp. 159 — 161.

2. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник, 2008. Т. 9, вып. 1(25). С. 185 — 223.

3. Добровольский М. Н. Об оптимальных коэффициентах комбинированных сеток // Чебышевский сборник, 2004. Т. 5, вып. 1(9). С. 95 — 121.

4. Добровольский М. Н. Оценки сумм по гиперболическому кресту // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 9, вып. 1. С. 82 — 90.

5. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, №6090–84.

6. Добровольский Н. М., Манохин Е. В. Банаховы пространства периодических функций // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. 1998. Т. 4, вып. 3. С. 56–67.

7. Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Киселева О. В. О произведении обобщенных параллелепипедальных сеток целочисленных решёток // Чебышевский сборник. 2002. Т. 3, вып. 2(4). С. 43 – 59.

8. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Андреева О. В., Зайцева Н. В. Многомерная теоретико-числовая Фурье интерполяция // Чебышевский сборник. 2004. Т. 5, вып. 1(9). С. 122 — 143.

9. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.

10. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (2-е изд.) М.: МЦНМО, 2004.

11. Родионов А. В., Чуприн С. Ю. О гиперболических параметрах решётки линейного сравнения // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2014. Вып. 1. Ч. 1. С. 50 — 63.

12. Родионов А. В. О методе В. С. Рябенького — Н. М. Коробова приближенного решения уравнений с частными производными // Чебышевский сборник. 2009. Т. 10, вып. 3(31). С. 110 — 136.

13. Родионов А. В. Решение дифференциальных уравнений в частных производных методом В. С. Рябенького // Известия саратовского университета, 2013. Вып. 4, ч. 2 С. 120 — 124.

14. Родионов А. В. Теоретико-числовые методы решения дифференциальных уравнений в частных производных // Алгебра и теория чисел: современныепроблемы и приложения: Материалы XII Междунар. конф., посвященной 80-летию проф. Виктора Николаевича Латышева, Тула 2014. С. 297 — 300.

15. Рябенький В. С. Об одном способе получения разностных схем и об использовании теоретикочисловых сеток для решения задачи Коши методом конечных разностей // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1961. Т. 60. С. 232 — 237.

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Поступило 6.06.2014