УДК 519.4

С. П. СТРУНКОВ

О СПЕКТРЕ СУММ ОБРАЗУЮЩИХ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

Пусть K — произвольное поле, конечное над полем рациональных чисел, n, α_1, α_2, ..., α_n — заданные натуральные числа. Доказывается конечность числа конечных попарно неизоморфных групп G с n образующими a_1, ..., a_n такими, для которых спектр элемента $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$ алгебры $\mathbf{C}G$ принадлежит K.

Одно из важных направлений в теории конечных групп связано с изучением вопросов о возможности восстановления группы по каким-либо её свойствам или системам параметров, чаще всего числовых. К этой тематике относится много различных задач характеризации групп данного класса свойствами некоторых подгрупп или представлений. В ряду этих задач заметно выделяется ослабленная проблема Бернсайда (ОПБ) о возможности почти восстановить конечную группу по числу образующих и показателю [2]. Особое положение этой проблемы определяется, с одной стороны, её трудностью, оценить которую можно по непревзойдённой до настоящего времени работе А. И. Кострикина [1], содержащей положительное решение ОПБ в классе групп произвольного простого показателя, а с другой — её изолированностью, почти полным отсутствием результатов типа ОПБ, т. е. доказательств конечности числа групп с заданным числом образующих и дополнительными ограничениями. В настоящей работе как раз рассматривается задача, формулировка которой очень похожа на ОПБ, причём для неё оказалось возможным получить окончательное решение.

Пусть G — конечная группа, порождённая n образующими a_1, ..., a_n. Каждому элементу x групповой алгебры $\mathbf{C}G$ группы G над полем $\mathbf{C}$ комплексных чисел (в том числе и каждому $g \in G$) естественным образом в линейном пространстве $\mathbf{C}G$ поставлен в соответствие линейный оператор умножения элемента x слева на все элементы алгебры $\mathbf{C}G$. *Спектром элемента* $x \in \mathbf{C}G$ называется множество попарно различных собственных значений оператора умножения, соответствующего x. В настоящей работе доказывается, что группа G почти определяется полем спектра любого элемента $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$ алгебры $\mathbf{C}G$, где α_1, ..., α_n — натуральные числа. Таким образом, здесь дополнительное условие накладывается на спектр только одного элемента групповой алгебры $\mathbf{C}G$, в то время как в ОПБ спектр каждого элемента группы G должен принадлежать заданному полю, т. е. в нашем случае число ограничений меньше, чем в ОПБ. Тем не менее положительное решение рассматриваемого аналога ОПБ получается в классе всех конечных групп.

ТЕОРЕМА. *Пусть K — произвольное поле, конечное над полем рациональных чисел, α_1, ..., α_n — натуральные числа, S — некоторое мно-*

жество попарно неизоморфных конечных групп G_1, G_2, ..., в котором каждая группа G_k порождена n образующими $a_1^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)}$. Если спектр элемента $x^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i^{(k)}$ алгебры $\mathbf{C}G_k$ принадлежит полю K для каждой группы $G_k \in S$, то множество S конечно.

Доказательство. Пусть $G \in S$, $G = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$. Если в линейном пространстве $\mathbf{C}G$ регулярного представления группы G в качестве базиса взять элементы группы G, то оператору, соответствующему элементу $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \in \mathbf{C}G$, отвечает матрица A с неотрицательными матричными элементами. При этом сумма элементов в каждой строке и каждом столбце матрицы A равна числу $r = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, откуда получаем, что число r является характеристическим для A. Матрица A кратна дважды стохастической матрице, поэтому r является её наибольшим по модулю характеристическим числом. Так как элементы $a_1, \ldots, a_n$ порождают группу G, то матрица A неразложима и, следовательно, r — простой корень её характеристического уравнения [3, гл. 13, теорема 2].

Без ограничения общности мы можем считать, что поле K является конечным нормальным расширением поля рациональных чисел, в противном случае мы вложим поле K в такое нормальное расширение и будем рассматривать последнее в качестве заданного в условии теоремы поля. Обозначим через Γ группу Галуа поля K, Γ — конечная группа, её порядок $|\Gamma|$ зависит только от поля K.

Пусть λ — некоторое характеристическое число матрицы A, $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2, \ldots, \lambda_k$ — орбита элемента $\lambda \in K$ относительно группы Галуа Γ поля K. Тогда $k \leqslant |\Gamma|$. Так как коэффициенты характеристического многочлена матрицы A являются целыми рациональными числами, то легко показать, что все числа λ_i ($i = 1, \ldots, k$) принадлежат спектру матрицы A и, следовательно, $|\lambda_i| \leqslant r$ для всех $i = 1, \ldots, k$. Рассмотрим многочлен

$$P(t) = (t - \lambda_1) \ldots (t - \lambda_k) = t^k + c_1 t^{k-1} + \ldots + c_k.$$

Коэффициенты этого многочлена являются целыми рациональными числами. Из выражений c_i через $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ и из неравенств $|\lambda_i| \leqslant r$ получаем, что $|c_i| \leqslant \binom{k}{i} r^i \leqslant |\Gamma|!\, r^i$, при этом имеем также $k \leqslant |\Gamma|$. Таким образом, число различных многочленов $P(t)$, построенных по Γ-орбитам характеристических чисел матрицы A, ограничено сверху числом, зависящим только от поля K и не зависящим от выбора группы G во множестве S. Следовательно, количество m всех чисел λ спектра матрицы A также ограничено сверху числом, зависящим только от поля K (и не зависящим от порядка $|G|$ матрицы A).

Обозначим теперь через $\lambda_1 = r$, $\lambda_2, \ldots, \lambda_m$ все попарно различные характеристические числа матрицы A, а через k_i — кратность λ_i как корня характеристического уравнения матрицы A. Тогда $k_1 = 1$, $\sum_{i=1}^{m} k_i = |G|$. Если s — целое рациональное неотрицательное число, то $\operatorname{tr}(A^s) = \sum_{i=1}^{m} k_i \lambda_i^s$.

С другой стороны,

$$\operatorname{tr}(A^s)=\chi\left(\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j a_j\right)^s\right)=\chi\left(\sum_{g\in G}\beta_{s,g}g\right)=\beta_{s,1}|G|,$$

где χ — характер регулярного представления группы G. Таким образом, имеем следующую систему равенств:

$$\sum_{i=1}^{m}k_i\lambda_i^s=\beta_s|G|,\quad s=0,\,1,\,\ldots,\,m-1.$$

В этих соотношениях $\beta_s=\beta_{s,1}$ — целые рациональные числа, $\beta_0=1$. Рассматривая эти равенства как систему уравнений для k_i, получаем

$$k_i=\frac{W_i}{W(\lambda_1,\,\ldots,\,\lambda_m)},\quad i=1,\,\ldots,\,m,$$

где $W(\lambda_1,\,\ldots,\,\lambda_m)$ — определитель Вандермонда, построенный по системе чисел $\lambda_1,\,\ldots,\,\lambda_m$, а W_i — определитель, получаемый из определителя $W(\lambda_1,\,\ldots,\,\lambda_m)$ заменой i-го столбца на столбец, состоящий из чисел $\beta_0|G|,\,\ldots,\,\beta_{m-1}|G|$. Раскладывая определитель W_i по i-ому столбцу, будем иметь равенства

$$W_i=|G|\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^{j+1+i}\beta_jW_{ij},\quad i=1,\,\ldots,\,m,$$

в которых W_{ij} — определитель, получаемый из $W(\lambda_1,\,\ldots,\,\lambda_m)$ вычёркиванием i-го столбца и $(j+1)$-ой строки. Хорошо известно, что

$$W_{ij}=S_{m-1-j}(\lambda_1,\,\ldots,\,\lambda_{i-1},\,\lambda_{i+1},\,\ldots,\,\lambda_m)\,W(\lambda_1,\,\ldots,\,\lambda_{i-1},\,\lambda_{i+1},\,\ldots,\,\lambda_m)$$

(в этих равенствах через $S_k(x_1,\,\ldots,\,x_l)$ обозначен k-ый элементарный симметрический многочлен от l аргументов $x_1,\,\ldots,\,x_l$). После сокращения одинаковых сомножителей, входящих в выражение для k_i от $W(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$ и $W(\lambda_1,\ldots,\lambda_{i-1},\lambda_{i+1},\ldots,\lambda_m)$, получим

$$k_i=\frac{|G|\sum\limits_{j=0}^{m-1}(-1)^{j+1+i}\beta_jS_{m-1-j}(\lambda_1,\,\ldots,\,\lambda_{i-1},\,\lambda_{i+1},\,\ldots,\,\lambda_m)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{m}(\lambda_i-\lambda_j)}.$$

Так как $k_1=1$, $\lambda_1=r$, то

$$\prod_{j=2}^{m}(r-\lambda_j)=|G|\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j\beta_jS_{m-1-j}(\lambda_2,\,\ldots,\,\lambda_m).$$

Множество чисел $\lambda_2,\,\ldots,\,\lambda_m$ инвариантно относительно группы Γ Галуа поля K, поэтому все числа $\prod\limits_{j=2}^{m}(r-\lambda_j)$, $S_{m-1-j}(\lambda_2,\,\ldots,\,\lambda_m)$ являются целыми рациональными. Следовательно, $\prod\limits_{j=2}^{m}(r-\lambda_j)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,|G|)$, откуда получаем оценку

$$|G|\leqslant\prod_{j=2}^{m}(r-\lambda_j).$$

Из неравенств $|\lambda_j| \leqslant r$ вытекает, что $|G| \leqslant (2r)^{m-1}$. Так как число m ограничено сверху числом, зависящим только от поля K, а $r = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, то из последнего неравенства следует ограниченность сверху порядков всех групп, входящих во множество S, а следовательно, и конечность самого множества S. Теорема доказана.

Список литературы

1. *Кострикин А. И.* О проблеме Бернсайда//Изв. АН СССР. Сер. матем. 1959. Т. 23, № 1. С. 3—34.
2. *Кострикин А. И.* Вокруг Бернсайда. М.: Наука, 1988.
3. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966.

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию 6.II.1989