ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1991 МАТЕМАТИКА № 4 (347)

В. С. Адамчик, А. А. Килбас УДК 517.518

АСИМПТОТИКА СВЕРТКИ ЛАПЛАСА ДВУХ БЕССЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Работа посвящена нахождению асимптотики при $x \to +\infty$ интеграла

$$I(x) = \int_0^x t^{\alpha-1}(x-t)^{\beta-1} J_\nu(bt) J_\mu(a(x-t))\,dt, \qquad a>0,\ b>0,\ \mathrm{Re}(\alpha+\nu)>0,\ \mathrm{Re}(\beta+\mu)>0, \tag{1}$$

где $J_\nu(x)$, $J_\mu(x)$ — функции Бесселя первого рода ([1], гл. 7). При $a=b$ этот интеграл вычисляется и выражается через линейные комбинации конечного или бесконечного числа бесселевых функций первого рода при следующих частных значениях параметров: α — любое, $\beta=1$ или $\beta=0$; $\alpha=\nu+1$, $\beta=\mu+1$ или $\beta=\mu+2$, или $\beta=-\nu$; $\alpha=\nu+2$, $\beta=1-\nu$ или $\beta=-\nu$; $\alpha=-1$, $\beta=2$, $\mu=0$ ([2], п. 2.12.33, интегралы 1—13). В указанных случаях асимптотику интеграла (1) можно найти, используя нетрадиционную форму записи асимптотического разложения при $x\to+\infty$ функции Бесселя:

$$J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1/2+\nu)_k (1/2-\nu)_k}{k!\,2^k} x^{-k-1/2} \cos\left[x - \frac{\pi}{2}(\nu+k+1/2)\right], \tag{2}$$

где $(a)_0=1$, $(a)_k = a(a+1)\ldots(a+k-1)$ — символ Похгаммера (ср. с [1], п. 7.13).

В общем случае для получения асимптотики интеграла (1) при $x\to+\infty$ можно использовать классические методы [3] — [5], которые оказываются довольно трудоемкими. Здесь предлагается метод, основанный на записи $I(x)$ в виде суммы двух интегралов по $(0, x/2)$ и $(x/2, x)$ и использовании представления (2), с помощью чего исследование асимптотики $I(x)$ сводится к изучению асимптотики более простых интегралов:

$$\Phi(x) = \Phi(x, a, b, \alpha, \nu, \delta) = \int_0^x t^{\alpha-1} J_\nu(bt) \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}(at)\,dt, \qquad a>0,\ b>0,\ \mathrm{Re}(\alpha+\nu)>0,\ \delta=\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}, \tag{3}$$

также представляющих интерес. Для компактности изложения здесь и ниже применяется сокращенная запись двух интегралов:

$$\int_0^x t^{\alpha-1} J_\nu(bt)\sin(at)\,dt \ \text{ и } \int_0^x t^{\alpha-1} J_\nu(bt)\cos(at)\,dt.$$

Полученные результаты оказываются различными как для интегралов (1), так и для интегралов (3) при $a\neq b$ и $a=b$, при этом в последнем случае асимптотические представления могут содержать логарифмические члены. Отметим, что интегралы (1) и (3) встречаются в задачах ядерной физики [6], оптики [7], физики атмосферы и океана [8].

Учитывая (2), представим интеграл (3) в виде

$$\Phi(x) = \int_0^1 t^{\alpha-1} J_\nu(bt) \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}(at)\,dt + \left(\int_1^\infty - \int_x^\infty\right)\Bigg\{ t^{\alpha-1} J_\nu(bt) \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}(at) -$$

$$- \frac{t^{\alpha-3/2}}{\sqrt{2\pi b}} \sum_{m=0}^{M} \frac{(1/2+\nu)_m (1/2-\nu)_m}{m!\,(2b)^m t^m} \left[\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}\left(t(a-b) + \frac{\pi}{2}(\nu+m+1/2)\right) + \right.$$

$$\left. + \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}\left(t(a+b) - \frac{\pi}{2}(\nu+m+1/2)\right)\right]\Bigg\} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \sum_{m=0}^{M} \frac{(1/2+\nu)_m (1/2-\nu)_m}{m!\,(2b)^m} \times$$

$$\times \int_1^x t^{\alpha-m-3/2} \left[\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} \left(t(a-b) + \frac{\pi}{2}(\nu+m+1/2) \right) + \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} \left(t(a+b) - \frac{\pi}{2}(\nu+m+1/2) \right) \right] dt, \qquad (4)$$

где $M=[\alpha]-1$, если $a\neq b$ и $a=b$, $\alpha=1/2+m$, $m=0, 1, \ldots$; $M=[\alpha]$, если $a=b$, $\alpha\neq 1/2+m$, $m=0, 1, \ldots$ Непосредственным интегрированием по частям доказывается справедливость следующих асимптотических равенств при $x\to+\infty$:

$$\int_x^\infty t^\gamma \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} (ct)\,dt \sim -\sum_{n=0}^\infty \frac{(1+\gamma-n)_n}{c^{n+1}} x^{\gamma-n} \begin{Bmatrix}-\cos\\ \sin\end{Bmatrix} \left(cx + \frac{\pi}{2}n \right), \quad \operatorname{Re}\gamma<0, \qquad (5)$$

$$\int_1^x t^\gamma \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} (ct)\,dt \sim \sum_{n=0}^\infty \frac{(1+\gamma-n)_n}{c^{n+1}} x^{\gamma-n} \begin{Bmatrix}-\cos\\ \sin\end{Bmatrix} \left(cx + \frac{\pi}{2}n \right) - \sum_{n=0}^N \frac{(1+\gamma-n)_n}{c^{n+1}} \times$$

$$\times \begin{Bmatrix}-\cos\\ \sin\end{Bmatrix} \left(c + \frac{\pi}{2}n \right) - \frac{(\gamma-N)_{N+1}}{c^{N+1}} \int_1^\infty t^{\gamma-1-N} \begin{Bmatrix}-\cos\\ \sin\end{Bmatrix} \left(ct + \frac{\pi}{2}N \right) dt, \qquad (6)$$

где $c\neq 0$, $N=[\gamma]$, если $\gamma>0$; $N=-1$, если $\gamma<0 \left(\sum_{n=0}^{-1} = 0 \right)$.

Асимптотические разложения интегралов (3) при $x\to+\infty$ получаются подстановкой (5) и (6) в (4). Ввиду громоздкости мы их опускаем, а приведем только главные члены. Введем обозначения:

$$D(a, b, \alpha, \nu, \delta) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} J_\nu(bt) \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} (at)\,dt \qquad (7)$$

значения (7) даны в [2], п. 2.12.5, интегралы 3, 4; п. 2.12.15, интеграл 9),

$$G(x, a, b, \nu, \delta) = \frac{1}{a-b} \begin{Bmatrix}-\cos\\ \sin\end{Bmatrix} \left(x(a-b) + \frac{\pi}{2}(\nu+1/2) \right) +$$

$$+ \frac{1}{a+b} \begin{Bmatrix}-\cos\\ \sin\end{Bmatrix} \left(x(a+b) - \frac{\pi}{2}(\nu+1/2) \right), \qquad (8)$$

$$E(a, b, \alpha, \nu, \delta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} J_\nu(bt) \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} (at)\,dt + \int_1^\infty \left\{ t^{\alpha-1} J_\nu(bt) \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} (at) - \right.$$

$$- \frac{t^{\alpha-3/2}}{\sqrt{2\pi b}} \sum_{n=0}^{[\alpha]-1} \frac{(1/2+\nu)_n (1/2-\nu)_n}{n!\,(2b)^n t^n} \left[\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} \left(t(a-b) + \frac{\pi}{2}(\nu+n+1/2) \right) + \right.$$

$$\left. \left. + \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} \left(t(a+b) - \frac{\pi}{2}(\nu+n+1/2) \right) \right] \right\} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} G(0, a, b, \nu, \delta). \qquad (9)$$

Теорема 1. *При $a\neq b$ главный член асимптотики интеграла* (3) *при $x\to+\infty$ имеет вид*

$$\Phi(x) = \begin{cases} D(a, b, \alpha, \nu, \delta) + O(x^{\alpha-3/2}), & \text{если } \alpha<3/2; \\ \dfrac{G(x, a, b, \nu, \delta)}{\sqrt{2\pi b}} + E(a, b, \alpha, \nu, \delta) + O(1/x), & \text{если } \alpha=3/2; \\ x^{\alpha-3/2} \dfrac{G(x, a, b, \nu, \delta)}{\sqrt{2\pi b}} + O(x^{-\min(0, 5/2-\alpha)}), & \text{если } \alpha>3/2, \end{cases} \qquad (10)$$

а при $a = b$

$$
\Phi(x) = \begin{cases} D(a, a, \alpha, \nu, \delta) + O(x^{\alpha-1/2}), & \text{если } \alpha < 1/2; \\ \dfrac{\ln x}{\sqrt{2\pi a}} \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} \dfrac{\pi}{2}(\nu + 1/2) + O(1), & \text{если } \alpha = 1/2; \\ \dfrac{x^{\alpha-1/2}}{\sqrt{2\pi a}\,(\alpha - 1/2)} \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} \dfrac{\pi}{2}(\nu + 1/2) + O(x^{-\min(0,\,3/2-\alpha)}), & \text{если } \alpha > 1/2, \end{cases} \tag{11}
$$

где D, G, E даются соответственно формулами (7) — (9).

Асимптотика интеграла (1) при $x \to +\infty$ выражается через интегралы (3) следующим образом:

$$
I(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi a}}\, x^{\beta-3/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2+\mu)_n (1/2-\mu)_n}{n!\,(2a)^n x^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+3/2-\beta)_k}{k!\,x^k} \Big[\Phi(x/2, a, b, \alpha+k, \nu, 0) \times
$$

$$
\times \cos\left(ax - \frac{\pi}{2}(\mu+n+1/2)\right) + \Phi(x/2, a, b, \alpha+k, \nu, 1) \sin\left(ax - \frac{\pi}{2}(\mu+n+1/2)\right)\Big] +
$$

$$
+ \sqrt{\frac{2}{\pi b}}\, x^{\alpha-3/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2+\nu)_n (1/2-\nu)_n}{n!\,(2b)^n x^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+3/2-\alpha)_k}{k!\,x^k} \Big[\Phi(x/2, b, a, \beta+k, \mu, 0) \times
$$

$$
\times \cos\left(bx - \frac{\pi}{2}(\nu+n+1/2)\right) + \Phi(x/2, b, a, \beta+k, \mu, 1) \sin\left(bx - \frac{\pi}{2}(v+n+1/2)\right)\Big]. \tag{12}
$$

Если $a \neq b$, то для главного члена асимптотики (12) имеют место следующие три случая:

$$
I(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi a}}\, x^{\beta-3/2} \Big[D(a, b, \alpha, \nu, 0) \cos\left(ax - \frac{\pi}{2}(\mu+1/2)\right) +
$$

$$
+ D(a, b, \alpha, \nu, 1) \sin\left(ax - \frac{\pi}{2}(\mu+1/2)\right)\Big] + \sqrt{\frac{2}{\pi b}}\, x^{\alpha-3/2} \Big[D(b, a, \beta, \mu, 0) \times
$$

$$
\times \cos\left(bx - \frac{\pi}{2}(\nu+1/2)\right) + D(b, a, \beta, \mu, 1) \sin\left(bx - \frac{\pi}{2}(\nu+1/2)\right)\Big] + R_1(x), \tag{13}
$$

$$
R_1(x) = \begin{cases} O(x^{\alpha-5/2}) + O(x^{\beta-5/2}), & \text{если } \alpha < 3/2, \ \beta < 3/2; \\ O(x^{\alpha-3/2}) + O(1/x), & \text{если } \alpha < 3/2, \ \beta = 3/2; \\ O(1/x) + O(x^{\beta-3/2}), & \text{если } \alpha = 3/2, \ \beta < 3/2; \\ O(x^{\alpha-5/2}) + O(x^{\alpha+\beta-3}), & \text{если } \alpha > 3/2, \ \beta < 3/2; \\ O(x^{\alpha+\beta-3}) + O(x^{\beta-5/2}), & \text{если } \alpha < 3/2, \ \beta > 3/2, \end{cases} \tag{14}
$$

$$
I(x) = x^{\beta-3/2} \Big\{\frac{1}{\pi\sqrt{ab}}(1 - 2^{3/2-\beta}) \Big[\frac{1}{a-b} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+\nu+1) - \frac{a+b}{2}x\right) +
$$

$$
+ \frac{1}{a+b} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu-\nu) + \frac{b-a}{2}x\right)\Big] + \sqrt{\frac{2}{\pi a}} \Big[E(a, b, \alpha, \nu, 0) \cos\left(ax - \frac{\pi}{2}(\mu+1/2)\right) +
$$

$$
+ E(a, b, \alpha, \nu, 1) \sin\left(ax - \frac{\pi}{2}(\mu+1/2)\right)\Big]\Big\} + x^{\alpha-3/2} \Big\{\frac{1}{\pi\sqrt{ab}}(1 - 2^{3/2-\alpha}) \times
$$

$$
\times \Big[\frac{1}{a-b} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+\nu+1) - \frac{a+b}{2}x\right) + \frac{1}{a+b} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu-\nu) + \frac{b-a}{2}x\right)\Big] + \sqrt{\frac{2}{\pi b}} \times
$$

$$
\times \Big[E(b, a, \beta, \mu, 0) \cos\left(bx - \frac{\pi}{2}(\nu+1/2)\right) + E(b, a, \beta, \mu, 1) \sin\left(bx - \frac{\pi}{2}(\nu+1/2)\right)\Big]\Big\} + R_2(x), \tag{15}
$$

$$R_2(x) = \begin{cases} O(x^{\alpha-5/2}), & \text{если } \alpha > 3/2, \quad \beta = 3/2; \\ O(x^{\beta-5/2}), & \text{если } \alpha = 3/2, \quad \beta > 3/2; \\ O(x^{-1}), & \text{если } \alpha = \beta = 3/2, \end{cases} \tag{16}$$

$$I(x) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x^{\alpha+\beta-4}\left[\left(\frac{1-4\mu^2}{a\sqrt{a}} - \frac{1-4\nu^2}{b\sqrt{b}}\right)\frac{1}{a-b}\cos\left(\frac{a+b}{2}x - \frac{\pi}{2}(\mu+\nu+1)\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1-4\mu^2}{a\sqrt{a}} + \frac{1-4\nu^2}{b\sqrt{b}}\right)\frac{1}{a+b}\cos\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{\pi}{2}(\mu-\nu)\right)\right] + O(x^{\alpha+\beta-5}), \tag{17}$$

если $\alpha > 3/2$, $\beta > 3/2$.

Теорема 2. *При $a \neq b$ главный член асимптотики интеграла* (1) *при $x \to +\infty$ имеет вид* (13), (14), *если по крайней мере один из параметров α и β меньше* 3/2; (15), (16), *если оба параметра α и β не меньше* 3/2 *и по крайней мере один из них равен* 3/2; (17), *если α и β больше* 3/2.

Если $a = b$, то для главного члена асимптотики (9) также имеют место следующие три случая:

$$I(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi a}}\, x^{\beta-3/2}\left[D(a, a, \alpha, \nu, 0)\cos\left(ax - \frac{\pi}{2}(\mu+1/2)\right) + D(a, a, \alpha, \nu, 1) \times \right.$$

$$\left. \times \sin\left(ax - \frac{\pi}{2}(\mu+1/2)\right)\right] + \sqrt{\frac{2}{\pi b}}\, x^{\alpha-3/2}\left[D(a, a, \beta, \mu, 0)\cos\left(bx - \frac{\pi}{2}(\nu+1/2)\right) + \right.$$

$$\left. + D(a, a, \beta, \mu, 1)\sin\left(bx - \frac{\pi}{2}(\nu+1/2)\right)\right] + O(x^{\beta-5/2}) + O(x^{\alpha-5/2}), \tag{18}$$

$$I(x) = \frac{1}{\pi a}(x^{\alpha-3/2} + x^{\beta-3/2})\ln x + \sin\left(ax - \frac{\pi}{2}(\mu+\nu)\right) + O(x^{\alpha-3/2}) + O(x^{\beta-3/2}), \tag{19}$$

$$I(x) = \frac{1}{\pi a}\, x^{\alpha+\beta-2}\sin\left(ax - \frac{\pi}{2}(\mu+\nu)\right)\left(\frac{1}{\alpha-1/2} + \frac{1}{\beta-1/2}\right) + O(x^{\alpha+\beta-3}). \tag{20}$$

Теорема 3. *При $a = b$ главный член асимптотики интеграла* (1) *при $x \to +\infty$ имеет вид* (18), *если по крайней мере один из параметров α и β меньше* 1/2; (19), *если оба параметра α и β не меньше* 1/2 *и по крайней мере один из них равен* 1/2; (20), *если α и β больше* 1/2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены.— Изд. 2-е: Пер. с нем.— М. Наука. 1974.— 295 с.
2. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции.— М.: Наука, 1983.— 750 с.
3. Риекстыньш Э. Я. Асимптотические разложения интегралов.— Рига, Т. 1: 1974.— 391 с.; Т. 2: 1977.— 463 с.; Т. 3: 1981.— 370 с.
4. Федорюк М. В. Метод перевала.— М.: Наука, 1977.— 368 с.
5. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции.— М.: Наука, 1978.— 375 с.
6. Gervaios A., Navelet H. Some integrals involving three Bessel functions when their arguments satisfy the triangle inequalities // J. Math. Phys.— 1984.— V. 25.— № 1.— P. 3350—3356.
7. Ojeda-Castaneda J. Focus-error operator and related special functions // J. Opt. Soc. Amer.— 1983.— V. 73.— № 8.— P. 1042—1047.
8. Буданов С. П., Григорьев П. Л., Яковлев В. А. Об одном представлении фундаментального решения уравнения внутренних волн // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.— 1985.— Т. 21.— № 5.— С. 553—555.

г. Минск

Поступили
полный текст 30.01.1989
краткое сообщение 06.12.1990